M. SARIAN

MECANICA ȘI REZISTENȚA MATERIALELOR

I

MECANICA

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI, 1965

Scanned with OKEN Scanner

Culegere de probleme de necunoscă.

Buharz Coroncov

Stoenescu Buzdugan.

Scanned with OKEN Scanner

Circulat
14 Dec. 1968.

MIHAIL SARIAN

MECANICA
ȘI
REZISTENȚA
MATERIALELOR
VOL. I

MECANICA

Ediția a III-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI — 1965

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A III-A (1965)

În ediția a III-a s-au făcut unele precizări, reduceri și completări față de ediția precedentă.

Astfel, s-a căutat ca, pe baza unor exemple simple de mișcări, pe baza unor modele, să se justifice definițiile noțiunilor și mărimilor întîlnite în mecanica teoretică.

Deseori, mărimile sînt prezentate sub aspectul lor formal, matematic, sau alteori, sub aspectul lor operaționalist, descriindu-se doar metodele de măsurare. În ambele cazuri se identifică noțiunile cu mărimile.

Desigur, atît formulele cît și măsurătorile sînt necesare, însă, limitînd prezentarea mecanicii numai la aceste aspecte, noțiunile sînt golite de conținutul lor real, se neglijează cel mai important aspect, cel fizic, lăsîndu-se impresia falsă că mecanica nu ar fi ceea ce este, primul capitol al fizicii, și că ar face parte mai degrabă din matematici.

De aceea, fără a se neglija cîtuși de puțin aspectul matematic și procesele de măsurare, s-a căutat ca, prin folosirea modelelor, să se scoată în evidență atît aspectul fizic cît și legătura cauzală dintre mișcarea mecanică și formele nemecanice de mișcare.

În acest fel, noțiunile și mărimile din mecanică sînt privite potrivit concepției lui Engels: din punctul de vedere al unității formelor de mișcare a materiei și al legăturii dintre mișcarea mecanică și procesele nemecanice. Mecanica nu poate fi fundamentată în limitele înguste ale mecanicii însăși, complet izolată de fenomenele fizice, întrucît autolimitarea în cadrul „mecanicii pure" nu permite să se determine limitele de aplicabilitate a legilor ei.

În acest sens, ediția de față mai cuprinde: unele completări la principiul relativității clasice, transformarea Galilei, principiul relativității restrînse, transformarea Lorentz și legile lui Kepler.

Autorul reînnoiește rugămintea sa ca cititorii să-i semnaleze criticile și sugestiile lor și mulțumește tuturor celor care au contribuit la îmbunătățirea ediției de față.

M. S

PREFAȚĂ LA EDIȚIA I (1961)

În fața oamenilor muncii precum și în fața generației care se pregătește astăzi în școli și în institute stau sarcini de cinste, trasate prin hotărîrile Congresului al III-lea al P.M.R., a căror îndeplinire în următorii ani va permite desăvîrșirea construcției socialiste și trecerea treptată la construirea comunismului în țara noastră.

Pentru a realiza sarcinile care le revin, toate sectoarele economiei naționale și mai ales industria, agricultura și transporturile vor cere un număr sporit de specialiști cu o înaltă calificare, absolvenți ai institutelor de învățămînt tehnic superior.

Viitorii specialiști trebuie să primească în aceste institute o pregătire cu care, după absolvire, să fie în măsură să-și însușească noi cunoștințe, pe care să le aplice creator în domeniul lor de activitate.

În acest scop, cadrele didactice trebuie să orienteze disciplinele pe care le predau, astfel încît studenții, pe lîngă asimilarea cunoștințelor necesare specialității pentru care se pregătesc, să-și formeze o gîndire logică *și să-și însușească* metodologia cercetării științifice.

Scanned with OKEN Scanner

Marea majoritate a disciplinelor din planul de învățămînt al oricărei facultăți tehnice sînt susceptibile de a primi această orientare.

Astfel, matematicile, fizica, mecanica, rezistența materialelor etc., discipline de bază în pregătirea oricărui inginer, indiferent de specialitate, pot fi construite și coordonate în acest sens.

Aceeași orientare s-a urmărit și la alcătuirea manualului de față.

Manualul de Mecanică *(vol. I) și* Rezistența materialelor *(vol. II), care apar sub îngrijirea Ministerului Învățămîntului, se adresează studenților din institutele și facultățile de învățămînt tehnic superior în care mecanica și rezistența materialelor se predau sub forma unui singur curs.*

În această categorie sînt facultățile de chimie industrială, metalurgie, electronică și telecomunicații, silvicultură, tehnologia produselor alimentare, tehnologia și chimizarea țițeiului, arhitectură ș.a.

Avînd în vedere deosebirile mari dintre facultăți, la alcătuirea manualului, accentul s-a pus mai mult pe înțelegerea fenomenului fizic, pe stabilirea corectă a teoriei și pe aplicații simple, și mai puțin pe rezolvarea anumitor probleme complexe legate de specificul uneia sau alteia din facultăți.

Indicații în acest sens sînt date și în programele oficiale de curs ale M.I.

Astfel, volumul de față cuprinde toate capitolele obligatorii ale programei oficiale de mecanică. Pentru ultimul capitol (Probleme și metode speciale), *potrivit indicațiilor, s-au ales următoarele probleme ca fiind mai des întîlnite: ciocniri, percuții și mașini simple. Însă cadrele didactice care predau au latitudinea de a le înlocui sau completa cu altele, fie din ultimul capitol al programei oficiale, fie cu alte probleme mai legate de specificul facultății și în funcție de disponibilul de ore.*

În general, numărul de ore fiind restrîns, cele cuprinse în manual nu pot fi predate integral la curs. Ca urmare, studenții trebuie să fie îndrumați pe linia studiului individual, fără de care nu poate fi vorba de asimilarea cunoștințelor și cu atît mai puțin de însușirea metodologiei de cercetare științifică.

De un prețios ajutor pentru definirea în lumina materialismului dialectic a noțiunilor și mărimilor a fost proiectul terminologiei de mecanică generală, elaborat de o comisie compusă din profesorii I. N. Veselovski, I. M. Voronkov, cunoscuți autori de manuale și de culegeri de probleme de mecanică, V. V. Egorșin ș. a.

Proiectul de terminologie a apărut în Buletinul Comitetului pentru întocmirea terminologiei tehnice. *Acest comitet funcționează pe lîngă Academia de științe a U.R.S.S.*

Autorul mulțumește în mod deosebit tovarășului profesor R. Woinaroski care, în cadrul controlului științific, printr-o serie de observații și recomandări, a adus îmbunătățiri conținutului lucrării.

De asemenea, mulțumește tuturor colaboratorilor din catedră care au citit lucrarea și au făcut numeroase sugestii, de care a ținut seamă.

Cu toată dorința autorului de a întocmi un manual cu cît mai puține lipsuri, este sigur că se vor găsi destule. Cititorii sînt rugați să le semnaleze împreună cu sugestiile lor, pentru a servi la o eventuală ediție nouă. Toate aceste sugestii și observații vor fi primite cu recunoștință.

M. S.

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA ÎNTÎI

BAZELE TEORETICE ALE MECANICII CORPULUI SOLID

CAPITOLUL I

NOȚIUNI — PRINCIPII

A. NOȚIUNI FUNDAMENTALE. CONCEPTE

§ 1. Materia, spațiul și timpul

a. *Mecanica* este un capitol al fizicii, adică face parte din științele naturii. Științele naturii studiază multiplele manifestări și însușiri ale materiei.

Materia este *noțiunea primară* și *totodată cea mai cuprinzătoare* a științelor naturii. Noțiunea de materie cuprinde nu numai *natura* cu nenumăratele ei forme de manifestare, ci și *fenomenele sociale.*

„Materia este categoria filozofică care desemnează realitatea obiectivă dată omului prin senzațiile lui, oglindită de senzațiile noastre și existînd independent de ele“[1].

Materia este inepuizabilă și, ca atare, inepuizabil este și procesul cunoașterii ei.

Însușirea fundamentală a materiei și modul ei de existență este *mișcarea.*

„Mișcarea, în accepția cea mai largă a cuvîntului, înglobează în sine toate schimbările și procesele care au loc în univers, începînd cu simpla deplasare și terminînd cu gîndirea“[2].

Mecanica studiază una din cele mai simple forme de mișcare : *schimbarea pozițiilor r e l a t i v e, în timp, a părților de materie, adică a corpurilor*[3].

În consecință, deplasarea în timp a unui corp este studiată în raport cu un alt corp, care joacă rolul de *reper (sistem de referință).*

Aceasta este *mișcarea mecanică.*

Repausul este în mecanică o formă particulară a mișcării, fiind caracterizat prin lipsa de deplasare a corpului în raport cu reperul considerat. De pildă, un călător, așezat într-un vagon în mers, este în repaus pentru un observator din vagon, dar în mișcare pentru un observator din stație.

---

[1] V. I. L e n i n. *Opere.* Vol.-14, E.S.P.L.P., 1954, p. 120.
[2] F r. E n g e l s. *Dialectica naturii.* E.S.P.L.P., 1954, p. 55.
[3] În stadiul actual al științelor naturii, materia are o structură dublă : una discontinuă, substanța (particule, corpuri) și alta continuă, cîmpul (cîmpul gravitațional, cîmpul magnetic etc.).

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că, în mecanică, atît mişcarea cît şi repausul au un caracter *relativ*. Această relativitate trebuie înţeleasă în sensul că mişcarea mecanică poate fi observată în mod diferit din sisteme de referinţă diferite, dar că *mişcarea mecanică, ca şi mişcarea în general, este absolută prin natura ei, adică ea există în mod obiectiv*, independent de observator.

Repaus absolut, adică materie fără mişcare, nu există nicăieri în natură, iar mişcarea în afara materiei este o absurditate, o abatere de la ştiinţă, care duce la misticism.

În general, mişcarea mecanică însoţeşte sau este cuprinsă în celelalte forme mai complexe de mişcare, cum sînt : mişcările moleculare, undele electromagnetice, mişcările intraatomice, studiate în fizică, unirea şi separarea atomilor, studiate în chimie. Pentru a deosebi forma mecanică de celelalte forme mai complexe, acestea din urmă sînt denumite *forme nemecanice de mişcare.*

Forme de mişcare cu mult mai complexe se găsesc în viaţa organică începînd cu activitatea celulei şi terminînd cu viaţa organismelor superioare, cu gîndirea şi cu viaţa socială.

Formele *fundamentale* ale mişcării, *calitativ specifice*, nu sînt izolate. *Fr. Engels* subliniază trecerea unor forme de mişcare în altele, arătînd interdependenţa lor. Astfel, mişcarea mecanică se transformă în căldură, în electricitate, în magnetism; căldura şi electricitatea pot da naştere unor procese chimice, după cum procesele chimice pot produce căldură şi electricitate, care la rîndul lor se pot transforma în mişcare mecanică a materiei[1].

Interdependenţa formelor de mişcare, faptul că mişcarea mecanică este cea mai simplă şi permite o largă folosire a matematicilor şi mai ales succesele mecanicii au determinat un mare număr de oameni de ştiinţă şi filozofi să extindă legile mecanicii şi la alte forme de mişcare a materiei.

Această concepţie, caracterizată prin aplicarea legilor unor forme simple de mişcare asupra unor forme mai complexe, se numeşte *mecanicism.*

Mecanicismul, apărut acum două secole în ştiinţele naturii, este astăzi combătut ca o concepţie depăşită.

b. *Materia se mişcă în spaţiu şi în timp, iar spaţiul şi timpul sînt forme obiective de existenţă a materiei.*

Însuşirile spaţiului şi timpului sînt determinate de însuşirile materiei.

Caracterul infinit şi veşnic al materiei determină caracterul infinit şi veşnic al spaţiului şi timpului.

Spaţiul concret este tridimensional, ceea ce înseamnă că, ducînd printr-un punct oarecare al spaţiului două drepte distincte oarecare, prin acelaşi punct nu se mai poate duce decît o singură dreaptă perpendiculară pe primele. Cele trei dimensiuni ale spaţiului sînt echivalente şi sînt denumite lungime, lăţime, şi înălţime (adîncime sau grosime).

Caracterul tridimensional al spaţiului exprimă însuşirea materiei de a avea trei dimensiuni şi de a se mişca în cele trei dimensiuni[2].

---

[1] Fr. Engels. *Dialectica naturii.* E.S.P.L.P., 1954, p. 65.
[2] *Materialismul dialectic.* E.S.P.L.P., 1954, p. 299.

Scanned with OKEN Scanner

„Orice particulă de materie, oricît ar fi de mică, are trei dimensiuni"[1].

Timpul constituie legătura dintre procesele materiale în sensul succesiunii lor, al duratei lor.

Durata proceselor este obiectivă, nu depinde nici de senzațiile noastre, și nici de conștiința noastră.

Timpul, spre deosebire de spațiu, are o singură dimensiune și este *ireversibil.*

„Spațiul, timpul și mișcarea, ca forme fundamentale de existență a materiei, formează o unitate organică indisolubilă, determinată de unitatea lumii materiale"[2].

Această teză fundamentală a materialismului dialectic exprimă faptul că *spațiul și timpul sînt reale în mod obiectiv* și că sînt *indisolubil legate de materie și de mișcarea ei.*

După cum nu se poate concepe mișcare în afara materiei sau materie fără mișcare, tot astfel nu poate exista materie în afara spațiului și timpului sau spațiu și timp independente de materie și de mișcarea ei.

„Reprezentările omenești despre spațiu și timp sînt în permanentă evoluție și în continuă dezvoltare, apropiindu-se treptat de adevărul absolut"[3].

Astfel, concepția care stă la baza mecanicii, creată de marele învățat englez Isaac Newton (1643—1727), este că spațiul și timpul sînt obiective, dar *absolute.* Aceasta înseamnă că *mecanica newtoniană*, deși materialistă, are un caracter *metafizic*, deoarece spațiul și timpul sînt considerate rupte de legătura lor reciprocă și că nu depind de materie și de mișcarea ei.

Spațiul mecanicii newtoniene este tridimensional și euclidian (nelimitat, continuu, omogen, izotrop, iar geodezicele lui sînt linii drepte).

Se știe că geometria euclidiană este caracterizată prin celebra axiomă a paralelelor, axiomă care nu a putut fi dedusă, ca o simplă teoremă, din celelalte axiome ale geometriei.

N. Lobacevski (1793—1856) a făcut abstracție de această axiomă și, admițînd că într-un plan, printr-un punct, trec o infinitate de drepte care nu se întretaie cu o dreaptă dată, a pus bazele *geometriilor neeuclidiene*, geometrii perfect logice. Mai tîrziu, Riemann (1826—1866) a admis că toate dreptele dintr-un plan se întretaie și — printr-o largă generalizare — a construit *geometriile riemanniene.*

Geometriile neeuclidiene nu sînt numai perfect logice, ele mai arată că între spațiu și materie este o legătură strînsă și că însușirile spațiului depind de însușirile materiei.

În mecanica newtoniană, *timpul* este o mărime independentă de orice altă mărime, același în orice punct al spațiului, este nelimitat, continuu, omogen, ireversibil, adică este conceput ca *timp universal absolut.*

În ipoteza timpului universal absolut, două evenimente care sînt *simultane* în raport cu un sistem de referință sînt simultane în raport cu orice alt sistem de referință *(simultaneitate absolută).*

---

[1] V. I. Lenin. *Opere.* Vol. 14, E.S.P.L.P., 1954, p. 166.
[2] *Materialismul dialectic.* E.S.P.L.P., 1954, p. 295.
[3] V. I. Lenin. *Materialism și empiriocriticism.* Ed. P.M.R., 1946, p. 192—193.

Scanned with OKEN Scanner

Sub aspectul matematic, timpul este conceput ca o variabilă monoton crescătoare şi care poate primi orice valoare reală.

Timpul scurs între două evenimente nesimultane se numeşte *interval de timp*; el este acelaşi pentru observatorii din orice sistem de referinţă.

Graniţa dintre două intervale de timp consecutive se numeşte *moment*.

Folosind corespondenţa biunivocă dintre punctele unei drepte orientate şi numerele reale (abscisele punctelor), se poate construi o axă a timpurilor.

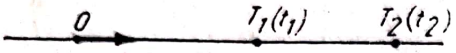


Fig. 1

Pe această axă (fig. 1) un punct reprezintă un moment, originea axei reprezintă momentul iniţial ($t = 0$), punctele din stînga originii reprezintă momentele care au trecut înaintea momentului iniţial, iar cele din dreapta originii reprezintă momentele care vor trece după momentul iniţial.

Pentru un acelaşi fenomen, măsura intervalului de timp scurs între două evenimente care se produc în momentele T_1 (t_1) şi T_2 (t_2) este $t_2 - t_1$. În acest caz T_1 este *momentul iniţial*, iar T_2 este *momentul final*.

Conceptele de timp absolut şi de simultaneitate absolută se bazează pe ipoteza că ar exista unele *fenomene instantanee*, care s-ar propaga cu *viteze infinite*.

Or, toate fenomenele din natură se propagă cu viteze *finite*, iar cea mai mare viteză cunoscută pînă azi este aceea a luminii.

Marele fizician E i n s t e i n a enunţat, sub formă de principiu, că viteza luminii în vid[1] este o constantă universală, adică viteza luminii nu depinde de mişcarea sursei care o emite.

Acesta este un principiu fundamental al *mecanicii relativiste*, care a apărut în ştiinţă la începutul secolului al XX-lea. În această mecanică, spaţiul şi timpul depind unul de altul şi ambele de materia în mişcare. Spaţiul-timp al mecanicii relativiste este o varietate cvadridimensională a geometriilor riemanniene. O consecinţă importantă a legăturii spaţiului şi timpului cu mişcarea materiei este faptul că simultaneitatea evenimentelor este relativă şi nu absolută, cum a afirmat Newton. Evenimentele simultane faţă de un anumit sistem de referinţă, în anumite condiţii de mişcare, nu sînt simultane faţă de un alt sistem şi în alte condiţii de mişcare. De acest fapt sînt legate alte consecinţe deosebit de importante pentru justificarea ştiinţifică a fenomenelor. Mecanica relativistă, prin conceptele şi rezultatele ei, corespunde cu mult mai bine decît mecanica newtoniană cu imaginea pe care o avem astăzi despre natură.

Concomitent cu progresele ştiinţelor naturii au evoluat şi *teoriile filozofice*.

Astfel, succesele mecanicii newtoniene, precum şi aplicarea metodelor metafizice în ştiinţele naturii au determinat caracterul *mecanicist* şi *metafizic* al materialismului din secolele al XVII-lea şi al XVIII-lea.

---

[1] $c \approx 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Sprijinindu-se pe progresul realizat de științele naturii în secolul al XIX-lea, *Marx* și *Engels* au înlăturat mărginirea metafizică a vechiului materialism și au imprimat materialismului un caracter *dialectic*.

„Aceasta a fost o victorie măreață în istoria gîndirii omenești: a apărut o teorie filozofică care considera întreaga natură, de la manifestările ei simple pînă la cele mai complexe, ca un singur tot și care explica în mod științific toate procesele și fenomenele prin dezvoltarea firească a materiei, prin trecerile ei dintr-o stare în alta, de la formele inferioare la cele superioare"[1].

Cît privește mecanicismul, Fr. Engels a arătat că extinderea legilor mecanicii newtoniene la alte mișcări decît cele mecanice duce la materialismul metafizic, antidialectic.

Dezvoltarea ulterioară a fizicii a confirmat pe deplin cele arătate de Engels. Astfel s-a constatat că mecanica newtoniană nu poate explica fenomene datorite unor mișcări care se propagă cu viteze comparabile cu viteza luminii. Ele au putut fi explicate cu ajutorul mecanicii relativiste. De asemenea, încercările de a aplica mecanica newtoniană la studiul mișcărilor intraatomice au dat greș, rezultatele nu au corespuns cu experiențele. Pentru asemenea cercetări, alte mecanici, bazate pe alte concepte, de pildă *mecanica cuantică*, dau rezultate confirmate de experiențe.

În aceste condiții, se poate pune întrebarea dacă studiul mecanicii newtoniene mai este util. Răspunsul este afirmativ: nu poate fi vorba de negarea absolută a acestei mecanici pentru că au apărut alte mecanici care sînt în măsură să rezolve o serie de probleme pe care nu le-a rezolvat mecanica newtoniană. Nu trebuie să se piardă din vedere că această mecanică a fost confirmată de nenumărate ori în secolele trecute, începînd cu problemele mișcării corpurilor cerești și terminînd cu cele puse de tehnica inginerească.

Se pot da exemple și din zilele noastre. Sînt cunoscute marile succese ale științei și tehnicii secolului al XX-lea în lansarea sateliților artificiali, a rachetelor balistice și cosmice ale căror viteze față de Pămînt nu depășesc a 20 000-a parte din viteza luminii. Studiind mișcarea lor pe baza mecanicii newtoniene, se constată că experiențele confirmă foarte bine rezultatele studiului.

De asemenea, și în tehnica inginerească mai există încă un număr imens de probleme în care mișcările sînt cu mult mai încete decît cele ale rachetelor, astfel că pentru rezolvarea acestor probleme mecanica newtoniană este pe deplin satisfăcătoare.

Aceasta înseamnă că: cu tot caracterul metafizic al spațiului absolut și al timpului absolut, care stau la baza mecanicii newtoniene, *în problemele în care corpurile au viteze mici în comparație cu viteza luminii*, se poate presupune că legăturile dintre spațiu, timp și materie, *deși reale*, sînt totuși *necesențiale* și ca atare se poate *să nu se țină seama* de aceste legături și să se folosească mecanica newtoniană pentru rezolvarea acestor probleme.

---

[1] Academia de Științe a U.R.S.S. *Bazele filozofiei marxiste*. E.P., 1960, p. 114—115.

Scanned with OKEN Scanner

Această neglijare își găsește justificarea științifică în *procesul de abstractizare* și în *gradul de aproximație* cerut de practică.

În aceste condiții, mecanica newtoniană apare ca un caz particular al mecanicii relativiste, după cum și aceasta va deveni un caz particular al unei noi teorii, care se va apropia și mai mult de realitatea obiectivă, de adevărul absolut.

În concluzie, este necesar ca ori de cîte ori se aplică mecanica newtoniană la rezolvarea unei probleme să se reconsidere, în cadrul problemei, *conceptele care stau la baza acestei mecanici, precum și limitele lor de valabilitate.*

Cele prezentate în continuare în acest manual sînt considerate exclusiv prin prisma mecanicii newtoniene.

c. *Gravitația* și *inerția.* Materia are un număr inepuizabil de *manifestări* și *însușiri*, care fac obiectul cercetărilor științelor naturii. Una din cele mai caracteristice manifestări ale materiei este *interacțiunea*[1] *corpurilor.*

Două din însușirile cele mai importante ale materiei, asociate cu interacțiunea corpurilor, sînt: gravitația și inerția.

Gravitația este însușirea corpurilor în interacțiune de a se atrage reciproc.

Cea de-a doua însușire, *inerția*, caracterizează *opunerea corpurilor față de acțiunea altor corpuri de a le modifica mișcarea sau starea lor de repaus.*

Exemple: 1°. O piatră lăsată liber la suprafața Pămîntului cade spre Pămînt. De obicei se spune că Pămîntul atrage piatra.

Din observarea unor asemenea fenomene simple și folosind observațiile înaintașilor săi, Newton, printr-o sinteză genială, a dedus *legea gravitației universale*, după care se atrag reciproc corpurile din natură.

2° Un om leagă a c e e a ș i piatră cu o sfoară, pe care apoi o rotește ca pe o praștie. Se știe că piatra scapă din praștie după o tangentă la cercul pe care-l descrie capătul liber al praștiei. Piatra s-ar mișca apoi mai departe după tangentă în virtutea inerției materiei. Însă, în cazul pietrei legate de sfoară, această mișcare este modificată în fiecare clipă de sfoara ținută în mînă, iar opunerea pietrei de a i se modifica mișcarea în virtutea i n e r ț i e i o simte, în permanență, omul în mîna sa.

Cele două însușiri ale materiei, gravitația și inerția, se reflectă în noțiunea și mărimea de masă.

Astfel, fenomenelor gravitaționale le corespunde *masa gravifică*, iar fenomenelor inerțiale, *masa inertă.*

Fizicianul maghiar E ö t v ö s a dovedit, pe baza unor experiențe celebre, că raportul celor două mărimi este constant și, alegînd unitățile în mod convenabil, a conchis că *masa gravifică este egală cu masa inertă.*

Egalitatea celor două mase oglindește strînsa legătură dintre cele două însușiri ale materiei, gravitația și inerția.

În consecință, pentru *mărimea de masă*, întîlnită în cadrul mecanicii, se va folosi următoarea *definiție*:

---

[1] Noțiunea de „interacțiune" trebuie înțeleasă într-un sens foarte larg, ca influența unei particule asupra alteia în timpul mișcării cînd se ajunge la o anumită distanță la care să se poată exercita o acțiune între ele (prof. V. N o v a c u. *Cercetări filozofice.* Anul VIII, 1961, p. 887).

Scanned with OKEN Scanner

Masa unui corp este măsura inerției acelui corp în mișcarea sa de translație rectilinie și uniformă.

Masa unui corp este o mărime *scalară pozitivă*, iar în mecanica newtoniană este considerată *invariabilă*.

§ 2. Simplificări și aproximații în mecanica newtoniană

a. Ca în toate științele naturii, și în mecanică, studiul mișcării mecanice a materiei începe prin *observații și experințe*, se continuă printr-un *proces de abstractizare* la *formularea legilor* și se încheie prin *verificarea practică*, prin *aplicații*, adică urmînd *treptele principale ale teoriei marxist-leniniste a cunoașterii.*

În mecanică, procesul de abstractizare începe printr-o serie de ipoteze și aproximații simplificatoare asupra structurii, însușirilor, formei și dimensiunilor corpurilor din natură.

Se admite, într-o primă aproximație, că aceste corpuri se compun din particule extrem de mici, care se interacționează după legi care fac obiectul cercetărilor științelor naturii.

Un studiu al mișcării mecanice a corpurilor, legat și de alte forme de mișcare, ar fi foarte dificil și uneori imposibil.

De aceea este necesar ca în primul rînd să se studieze numai forma mecanică și să se folosească un număr de concepte, care vor înlesni studiul. Evident, rezultatele obținute nu vor reprezenta decît numai aproximativ fenomenul considerat.

Asemenea concepte folosite în mecanica newtoniană sînt: *punctul material*, *sistemul de puncte materiale*, *continuul material*, *solidul rigid* etc., care se definesc după cum urmează:

1° *Punct material* poate fi considerat, într-un studiu aproximativ, *orice corp solid ale cărui dimensiuni*, *deformații*, *mișcări de rotație* pot fi neglijate în raport cu celelalte elemente sau obiective ale problemei, în așa fel încît corpul să poată fi redus la un punct în care să fie concentrată întreaga masă a lui (*centrul de masă*).

Astfel, conceptul de punct material *leagă o parte de materie*, caracterizată prin masă, de o noțiune matematică, *punctul geometric.*

Însă nu orice corp și în orice condiții poate fi asimilat cu un punct material.

Exemple: 1) În problema mișcării Pămîntului pe orbită în jurul Soarelui, se poate face abstracție de dimensiunile și de rotația diurnă a Pămîntului. În studiul acestei probleme, Pămîntul poate fi asimilat cu centrul lui de masă în care se consideră concentrată toată masa lui.

2) Dimpotrivă, dacă se studiază mișcarea volantului unei mașini termice, volantul nu poate fi asimilat cu un punct material.

Scanned with OKEN Scanner

2° *Sistemul discret de puncte materiale* este mulțimea formată dintr-un număr n finit, dar oricît de mare, de puncte materiale care se interacționează și care sînt așezate în punctele unui domeniu[1].

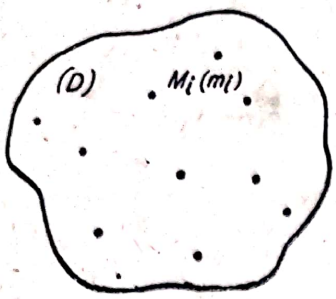


Fig. 2

Prin definiție, masa totală a sistemului discret de puncte materiale este:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i, \tag{1.1}$$

unde m_i este masa punctului M_i ($i = 1, 2, 3, ..., n$) al sistemului (fig. 2).

3° *Continuul material*[2] este un corp în care un volum, oricît ar fi de mic, conține materie.

Dacă M este un punct curent al domeniului și ΔV un element de volum oricît de mic din jurul punctului M, și dacă Δm este un element de masă distribuit acestui volum, prin definiție:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}, \tag{1.2}$$

dacă această limită există, ρ este *masa unității de volum* sau *densitatea volumică* din punctul M.

Masa totală a continuului se exprimă prin:

$$m = \int_{(D)} \mathrm{d}m = \int_{(V)} \rho \mathrm{d}V, \tag{1.3}$$

integralele fiind extinse la întreg domeniul (D) al continuului de volum V.

4° *Continuul material omogen* este caracterizat prin independența densității de poziția punctului M din domeniu, deci:

$$\rho = \text{const.}$$

și

$$m = \rho \int_{(V)} \mathrm{d}V = \rho V. \tag{1.4}$$

Sistemele materiale concrete, corpurile din natură, nu sînt nici continue și nici omogene.

5° *Solidul rigid.* Orice corp supus la anumite acțiuni (de pildă, la presiuni) se deformează.

Corpurile care, după dispariția cauzei care le-a deformat, revin la o formă foarte apropiată de forma dinainte de deformație se numesc *elastice;*

[1] În acest manual se va folosi noțiunea de domeniu închis tridimensional în sensul unei regiuni din spațiu limitată de o suprafață închisă, noțiunea de domeniu bidimensional în sensul unei regiuni de pe o suprafață limitată de o curbă trasată pe suprafață, și noțiunea de domeniu cu o singură dimensiune în sensul unei porțiuni a unei curbe limitată de două puncte ale ei.

[2] În cazurile în care nu va fi necesar să se precizeze dacă sistemul este discret sau continuu, se va folosi noțiunea mai cuprinzătoare de *sistem material.*

iar acele care, după ce a dispărut cauza deformației, revin prea puțin la forma lor inițială se numesc *plastice.*

În natură nu există corpuri *perfect elastice* sau corpuri *perfect plastice.*

Mecanica newtoniană are la bază conceptul de *sistem material nedeformabil,* caracterizat prin *invarianța distanțelor reciproce ale punctelor sistemului,* independent de cauza care ar tinde să modifice aceste distanțe, să deformeze sistemul.

Un asemenea sistem este și *solidul rigid,* care se definește ca un *continuu material nedeformabil.*

6° *Plăci, bare, fire.* Dacă una din dimensiunile solidului rigid este mică în comparație cu celelalte două, se poate — într-un calcul aproximativ — să se neglijeze această dimensiune, folosind conceptul de *placă,* plană sau curbă, adică un solid rigid numai cu două dimensiuni.

În acest caz, masa solidului este repartizată pe suprafața plăcii, iar:

$$\rho = \frac{dm}{dA} \tag{1.5}$$

se numește *densitatea superficială* a plăcii în punctul M.

Masa totală a plăcii este dată de:

$$m = \int_{(A)} \rho \, dA, \tag{1.6}$$

integrala fiind extinsă la întreg domeniul (D) al plăcii, de arie A.

Dacă două din dimensiunile solidului rigid sînt mici în comparație cu cea de-a treia se poate folosi, într-o primă aproximație, conceptul de *bară,* curbă sau dreaptă, adică un solid rigid cu o singură dimensiune.

Masa solidului este repartizată pe lungimea barei, iar:

$$\rho = \frac{dm}{ds} \tag{1.7}$$

se numește *densitatea liniară* a barei în punctul M.

Masa totală a barei este dată de:

$$m = \int_{(l)} \rho \, ds, \tag{1.8}$$

integrala fiind extinsă la întreg domeniul barei de lungime l.

Firul se definește ca un solid cu o singură dimensiune, *neextensibil,* dar *perfect flexibil.*

Firul se deosebește de bară prin aceea că nu se opune la deformare decît numai în sensul lungirii și că poate fi înfășurat pe orice corp, adaptîndu-se perfect, prin flexibilitatea lui, la suprafața corpului.

b. Aceste concepte nu reprezintă decît aproximativ solidele reale, totuși ele *conțin acele caracteristici ale solidelor care sînt esențiale pentru rezolvarea problemelor de mecanică.*

Folosirea lor permite aplicarea, în rezolvarea problemelor de mecanică, a unui instrument matematic precis.

iar acele care, după ce a dispărut cauza deformației, revin prea puțin la forma lor inițială se numesc *plastice.*

În natură nu există corpuri *perfect elastice* sau corpuri *perfect plastice.*

Mecanica newtoniană are la bază conceptul de *sistem material nedeformabil*, caracterizat prin *invarianța distanțelor reciproce ale punctelor sistemului*, independent de cauza care ar tinde să modifice aceste distanțe, să deformeze sistemul.

Un asemenea sistem este și *solidul rigid*, care se definește ca un *continuu material nedeformabil.*

6° *Plăci, bare, fire.* Dacă una din dimensiunile solidului rigid este mică în comparație cu celelalte două, se poate — într-un calcul aproximativ — să se neglijeze această dimensiune, folosind conceptul de *placă*, plană sau curbă, adică un solid rigid numai cu două dimensiuni.

În acest caz, masa solidului este repartizată pe suprafața plăcii, iar:

$$\rho = \frac{dm}{dA} \tag{1.5}$$

se numește *densitatea superficială* a plăcii în punctul M.

Masa totală a plăcii este dată de:

$$m = \int_{(A)} \rho \, dA, \tag{1.6}$$

integrala fiind extinsă la întreg domeniul (D) al plăcii, de arie A.

Dacă două din dimensiunile solidului rigid sînt mici în comparație cu cea de-a treia se poate folosi, într-o primă aproxi ație, conceptul de *bară*, curbă sau dreaptă, adică un solid rigid cu o singură dimensiune.

Masa solidului este repartizată pe lungimea barei, iar:

$$\rho = \frac{dm}{ds} \tag{1.7}$$

se numește *densitatea liniară* a barei în punctul M.

Masa totală a barei este dată de:

$$m = \int_{(l)} \rho \, ds, \tag{1.8}$$

integrala fiind extinsă la întreg domeniul barei de lungime l.

Firul se definește ca un solid cu o singură dimensiune, *neextensibil*, dar *perfect flexibil.*

Firul se deosebește de bară prin aceea că nu se opune la deformare decît numai în sensul lungirii și că poate fi înfășurat pe orice corp, adaptîndu-se perfect, prin flexibilitatea lui, la suprafața corpului.

b. Aceste concepte nu reprezintă decît aproximativ solidele reale, totuși ele *conțin acele caracteristici ale solidelor care sînt esențiale pentru rezolvarea problemelor de mecanică.*

Folosirea lor permite aplicarea, în rezolvarea problemelor de mecanică, a unui instrument matematic precis.

Scanned with OKEN Scanner

Totuşi, din cauza conceptelor, cu toată precizia lor matematică, rezultatele nu oglindesc decît imperfect fenomenul real.

În continuarea mecanicii solidului rigid, alte discipline, ca: rezistenţa materialelor, organe de maşini etc., aduc modificări conceptelor şi, prin ipoteze mai apropiate de realitate, obţin rezultate corespunzătoare gradului de aproximaţie cerut de aplicaţiile tehnice.

B. CARACTERISTICILE MIŞCĂRII MECANICE

§ 3. Sisteme de referinţă

Pentru a studia mişcarea mecanică a unui corp A este necesar să existe un alt corp B solid rigid, numit reper sau sistem de referinţă, faţă de care să fie considerată şi studiată mişcarea.

Newton a enunţat legile mecanicii sale *presupunînd existenţa unui reper fix.* Mişcarea faţă de un asemenea reper se numeşte *absolută.* Dar în natură nu există nimic fix, astfel că mişcarea corpului A faţă de reperul B este o *mişcare relativă.* De asemenea, dacă A este imobil faţă de B, se spune că A se află în *repaus relativ.*

Exemple: Un călător stă într-un vagon A în mişcare faţă de alt vagon B, care staţionează pe linie. Călătorul este în repaus relativ faţă de A şi în mişcare faţă de B. În anumite condiţii de mişcare a vagonului A, călătorul are impresia că vagonul B este cel care se mişcă, şi anume, în sens opus mişcării vagonului său.

Aceeaşi iluzie o au şi locuitorii Pămîntului cînd privesc mişcarea Soarelui şi a stelelor.

Din aceste exemple reiese că nu este indiferentă alegerea sistemului de referinţă pentru corecta cunoaştere a caracteristicilor mişcării mecanice.

Pentru marea majoritate a mişcărilor de pe suprafaţa Pămîntului, acesta poate fi considerat un reper convenabil, *preferabil* altor sisteme de pe Pămînt.

Pentru alte mişcări, de exemplu pentru mişcarea planetelor, sistemul de referinţă cel mai indicat este triedrul avînd originea în Soare, iar cele trei axe îndreptate spre trei stele foarte depărtate, astfel încît direcţiile axelor pot fi considerate invariabile. Acesta este sistemul de referinţă heliocentric folosit în mecanica cerească.

Pentru a determina cît mai corect caracteristicile mişcării este necesar să se aleagă sistemul de referinţă în funcţie de gradul de aproximaţie care se cere în rezolvarea problemei.

Astfel, dacă s-ar observa şi studia mişcarea unei bile lăsate să cadă în vagonul A, care are o mişcare oarecare faţă de vagonul B, solidar cu Pămîntul, şi s-ar alege următoarele trei sisteme de referinţă: *a*) vagonul A, *b*) vagonul B sau Pămîntul şi *c*) sistemul heliocentric, s-ar obţine trei rezultate diferite, cu toate că mişcarea bilei există în mod obiectiv, este unică şi absolută, independent de observator. Rezultatul cel mai apropiat de adevărul obiectiv l-ar da sistemul heliocentric.

La § 121 se arată că sistemele de referinţă în raport cu care legile mecanicii newtoniene pot fi exprimate întocmai ca în raport cu un reper fix se numesc sisteme sau *repere inerţiale.*

Scanned with OKEN Scanner

Cum nu există reper fix, studiul mișcării mecanice, pe baza legilor lui Newton, s-ar putea face în raport cu un reper inerțial.

Însă nici unul din reperele cunoscute astăzi nu este perfect inerțial. Observațiile și determinările astronomice în legătură cu mișcările planetelor din sistemul solar confirmă, cu un înalt grad de precizie, studiul, pe baza mecanicii newtoniene, al mișcărilor raportate la reperul heliocentric.

În consecință, reperul heliocentric, fără a fi perfect inerțial, poate fi *practic* considerat un sistem de referință inerțial.

Convenție. Pentru simplificarea exprimării se va folosi conceptul de *reper fix*, un *reper imobil în raport cu sistemul de referință considerat, în problema studiată, ca un reper inerțial.*

Astfel, dacă se admite că în mișcarea bilei care cade în vagonul A, observațiile din vagonul B, solidar cu Pămîntul, oglindesc în suficientă măsură adevărul obiectiv, în această problemă. Pămîntul este conceput ca reper inerțial, iar vagonul B ca reper fix.

§ 4. Traiectorie, viteză, accelerație

a. Se consideră un punct material M, care se mișcă în raport cu un triedru fix, descriind o linie dreaptă (triedrul este reprezentat în figura 3 numai prin originea sa O).

Mobilul trece în momentele t și t' prin punctele M și M', determinate prin vectorii de poziție $\bar{r}$ și $\bar{r}'$.

Mulțimea punctelor prin care trece mobilul se numește *traiectorie.* Traiectoria este una din caracteristicile mișcării punctului material și, în general este o linie curbă.

b. Pentru a cunoaște mișcarea punctului mai sînt necesare și alte caracteristici, cum sînt *viteza* și *accelerația* într-un anumit moment t.

Viteza medie a mobilului M este o mărime care *caracterizează rapiditatea mișcării mobilului într-un interval de timp* și care se exprimă prin raportul dintre drumul parcurs și timpul corespunzător:

$$v_m = \frac{MM'}{t' - t}.$$

Deoarece traiectoria este rectilinie, iar viteza medie este o *mărime vectorială*, se poate scrie:

$$\bar{v}_m = \frac{\overline{MM'}}{t' - t} = \frac{\bar{r}' - \bar{r}}{t' - t} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}.$$

Dacă se presupune că intervalul de timp tinde către zero, la limită, se obține expresia vitezei *în momentul* t a mobilului pentru o traiectorie rectilinie, adică:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \qquad (1.9)$$

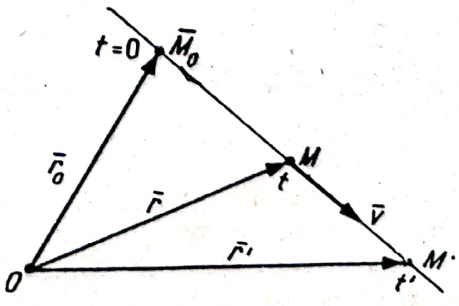


Fig. 3

Extinzînd rezultatul (1.9) la o traiectorie oarecare (fig. 4), se definește *viteza într-un moment* astfel:

Viteza *punctului mobil este o mărime vectorială ce caracterizează direcția, sensul mișcării precum și drumul parcurs în unitatea de timp. Viteza se exprimă prin derivata în raport cu timpul a vectorului de poziție al punctului mobil din momentul considerat.*

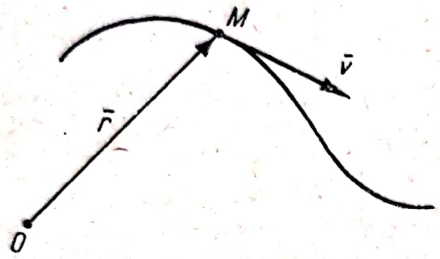


Fig. 4

În funcție de caracteristicile vectorului viteză, se pot distinge următoarele *tipuri de mișcări* ale punctului material:

1° Vectorul viteză are constante: *direcția*, *sensul* și *modulul*, adică:

$$\bar{v} = \bar{c},$$

traiectoria este rectilinie, iar mișcarea se numește *uniformă.*

2° Viteza are constantă numai direcția; mișcarea se numește *rectilinie variată.*

3° Viteza are numai modulul constant, iar direcția ei variază; mișcarea este curbilinie și *pseudouniformă.*

4° Toate caracteristicile vectorului viteză variază, mișcarea punctului este *curbilinie* și *variată.*

Deci, în afară de tipul *a)* de mișcare, în toate celelalte, vectorul viteză variază.

c. **Accelerația** *mobilului se definește ca viteza de variație a vectorului viteză al mobilului, exprimată prin derivata vectorului viteză în raport cu timpul,* adică:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}. \tag{1.10}$$

Consecințe: 1° Accelerația se poate exprima și prin derivata a doua a vectorului de poziție al mobilului în raport cu timpul:

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

2° Accelerația punctului cu mișcare uniformă este nulă, deoarece:

$$\bar{v} = \bar{c}, \text{ iar } \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{c}}{dt} = 0.$$

C. PRINCIPIILE MECANICII NEWTONIENE

§ 5. Poziția mecanicii ca știință

„Prin obiectiv, *mecanica este o știință fizică*, deoarece se ocupă cu mișcările mecanice ale corpurilor din natură".

„Prin conceptele și simplificările pe care le folosește, prin principiile ei, care au caracterul axiomelor din geometrie și care-i imprimă un caracter deductiv matematic, *mecanica are o structură matematică*",

„Dar nu este suficient ca propozițiile mecanicii să satisfacă numai condițiile impuse de logică, aplicîndu-le pe o bază axiomatică oarecare, mecanica este obligată să-și aleagă definițiile, conceptele, principiile, ținînd seama de realitatea fizică, și să confrunte mereu rezultatele obținute cu realitatea."[1]

Observînd mișcările corpurilor din natură, Newton, printr-o genială sinteză, a enunțat un număr de principii cu care a construit știința care îi poartă numele.

Din cele arătate pînă aici rezultă că la baza mecanicii newtoniene stau conceptele:

— spațiul euclidian absolut și timpul universal absolut, adică fără vreo legătură reciprocă, nedepinzînd de materie și nici de mișcarea ei;

— reperul fix, solidul rigid și masa invariabilă.

S-a mai arătat că, din cauza acestor concepte, domeniul de valabilitate al mecanicii newtoniene se restrînge la mișcări caracterizate prin viteze relativ mici în comparație cu viteza luminii.

Cu toate acestea, domeniul de aplicare al acestei științe rămîne deosebit de vast, cuprinzînd aproape întreaga tehnică inginerească din zilele noastre.

Principiile mecanicii newtoniene nu pot fi verificate direct experimental, ci numai indirect, adică prin *aplicarea lor corectă* se obțin rezultate care sînt confirmate de experiență, de practică.

§ 6. Principiul inerției (I)

Un punct material izolat în spațiu are o mișcare uniformă[2]

a. **Observații și consecințe.** 1° Din enunțul principiului rezultă că dacă ar exista posibilitatea izolării unei particule de materie (asimilabilă cu un punct material), atunci ea s-ar mișca pe o linie dreaptă, cu viteză constantă. În această ipoteză se spune că particula se mișcă în „virtutea inerției".

2° Deoarece — pe de o parte — particula nu este un punct material și — pe de altă parte — nu se poate izola nimic în natură, principiul inerției nu poate fi verificat direct.

3° Coexistența în spațiu și timp a particulelor de materie și a sistemelor de particule este urmată de acțiuni reciproce între particule.

4° Existența interacțiunilor se constată și se măsoară prin efectele produse de ele. Efectele interacțiunilor particulelor sînt multiple și complexe, fiind cercetate de diferitele științe ale naturii.

5° Mecanica studiază două din *aspectele interacțiunii*, caracterizate prin următoarele efecte:

— *modificarea* mișcării mecanice a particulei, *asimilată cu un punct material*;

[1] V. Vâlcovici. *Fundamentele Mecanicii.* „Studii și cercetări matematice" anul VII, 1956, 3—4, Editura Academiei R.P.R., p. 373—398.

[2] În raport cu un reper fix.

— *modificarea formei* sistemului de particule, *conceput ca un sistem de puncte materiale.*

De pildă, dacă punctul material ar fi izolat, el ar avea o mişcare uniformă, adică rectilinie cu :

$$\bar{v} = \bar{c} \quad \text{şi} \quad \bar{a} = 0.$$

Însă cum punctul material nu este izolat, viteza lui variază, şi ca atare el are o acceleraţie care se poate măsura.

Deci primul efect al interacţiunii este *acceleraţia* şi el caracterizează *aspectul mecanic al interacţiunii.*

Cel de-al doilea efect apare în cazul unui sistem de cel puţin două puncte materiale, care se interacţionează, dacă *distanţa dintre ele variază.*

Deci cel de-al doilea efect al interacţiunii este *deformaţia sistemului* şi el caracterizează *unul din aspectele nemecanice ale interacţiunii.*

În mecanica solidului rigid va interveni numai aspectul mecanic al interacţiunii, celălalt aspect se va studia în mecanica sistemelor deformabile.

b. **Forţa.** Aspectul mecanic al interacţiunii se reflectă în noţiunea de forţă.

Forţa este o caracteristică a acţiunii, în direcţie, sens şi intensitate, a unui sistem material asupra unui punct material căruia îi modifică mişcarea, adică îi imprimă o acceleraţie.

Observaţii.

1° Forţa este una din cele mai importante şi mai subtile noţiuni pe care Newton şi-a fundamentat mecanica, noţiune care aduce simplificări studiului mişcării mecanice şi face *legătura între această formă şi alte forme nemecanice de mişcare a materiei.*

2° Cînd asupra unei particule materiale acţionează un corp oarecare printr-o forţă, pentru simplificarea exprimării se spune că asupra particulei acţionează o forţă. De asemenea, dacă particula face parte dintr-un solid rigid, se spune că forţa este aplicată solidului.

3° În studiul mişcării mecanice se face abstracţie de natura fizică a forţei, care poate fi foarte variată, de pildă : gravitaţia, elasticitatea corpurilor, rezistenţa unui fluid, frecarea, presiunea unui fluid (abur, aer, apă) etc.

4° Asemenea abstractizări au înlesnit, în trecut, concepţia idealistă după care forţa ar fi o cauză nemterială a mişcării şi că materia ar fi inertă, în sensul că nu s-ar mişca decît acţionată de forţe.

Filozofia materialistă şi ştiinţa contemporană au lămurit lucrurile : *mişcarea este modul de existenţă a materiei, iar forţa are întotdeauna un substrat material şi este o caracteristică obiectivă a interacţiunii.*

În afară de principiul inerţiei, în care nu intervine noţiunea de forţă, la baza mecanicii newtoniene mai stau şi următoarele trei principii : principiul *acţiunii* (II), principiul *egalităţii acţiunii şi reacţiunii* (III) şi principul *paralelogramului forţelor* (IV).

Scanned with OKEN Scanner

§ 7. Principiul acțiunii (II)

O forță imprimă unui punct material de masă constantă o accelerație[1] *egală cu raportul dintre mărimea forței și masa punctului.*

Observații și consecințe. 1° Deoarece accelerația este o mărime vectorială ($\bar{a}$), iar masa o mărime scalară pozitivă (m), forța ($\bar{F}$) este o mărime vectorială reprezentată printr-un vector coliniar și orientat în același sens cu accelerația pe care o imprimă punctului material (fig. 5), adică:

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}. \qquad (1.11)$$

Fig. 5

2° Dacă în relația (1.11) se anulează $\bar{F}$, rezultă:

$$\bar{a} = 0,$$

adică punctul material are o mișcare uniformă, în virtutea inerției. Acest rezultat nu trebuie interpretat în sensul că principiul inerției este conținut în principiul acțiunii, deoarece noțiunea de forță se definește ca o consecință a principiului inerției. Rezultatul nu arată decît corespondența și lipsa de contradicție dintre cele două principii.

3° Relația (1.11) scrisă sub forma:

$$m\bar{a} - \bar{F} = 0 \qquad (1.12)$$

este *ecuația fundamentală a mecanicii newtoniene.*

4° Din (1.11) se mai poate observa că cu cît masa punctului material este mai mare cu atît o aceeași forță îi imprimă punctului material o accelerație mai mică, adică cu atît și opunerea punctului material față de acțiunea reprezentată de forța $\bar{F}$ este mai mare. Această observație justifică definiția și denumirea dată masei (inertă), în mișcarea mecanică a materiei.

5° Newton a dedus din observațiile lui Kepler *legea gravitației universale* (atracției), după care modulul forței cu care un punct material de masă m_1 atrage punctul de masă m_2, situat la o distanță d, se exprimă prin:

$$|\bar{F}| = k\frac{m_1 m_2}{d^2}, \qquad (1.13)$$

unde k este o constantă universală.

Dacă se notează cu $\bar{\Gamma}$ *forța de atracție newtoniană* pe care Pămîntul o exercită asupra unui punct material de masă m, și cu $\bar{\gamma}$, *accelerația gravitației*, pe baza egalității dintre masa gravifică și masa inertă, dovedită în urma experiențelor lui Eötvös, se poate scrie și ecuația:

$$m\bar{\gamma} - \bar{\Gamma} = 0, \qquad (1.14)$$

[1] În raport cu un reper fix.

ca un caz particular al ecuației fundamentale (1.12) valabilă, se înțelege, tot în raport cu un reper fix[1].

§ 8. Principiul egalității acțiunii și reacțiunii (III)

Acțiunile reciproce a două puncte materiale sînt egale și direct opuse

Observații și consecințe. 1° Dacă se notează cu $\bar{F}_{ij}$ acțiunea punctului M_j asupra lui M_i și cu $\bar{F}_{ji}$ acțiunea punctului M_i asupra lui M_j (fig. 6), una din relațiile vectoriale deduse din principiul III este:

$$\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0. \qquad (1.15)$$

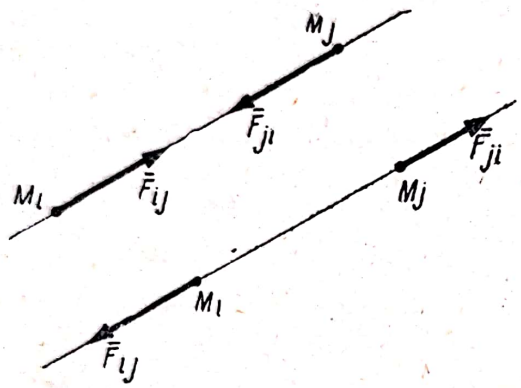


Fig. 6

2° Dacă se studiază mișcarea punctului material M_i, $\bar{F}_{ij}$ reprezintă *acțiunea dinafară* asupra lui, iar $\bar{F}_{ji}$ reprezintă *reacțiunea* punctului considerat M_i asupra *agentului* (cel care acționează). În aceste condiții, aici agent este punctul material M_j.

3° Reacțiunea punctului material M_i față de acțiunea celuilalt punct M_j, care tinde să-i modifice mișcarea sau repausul, adică tinde să-l scoată din „inerția" lui, se mai numește și *forță de inerție* și este aplicată punctului M_j, adică asupra agentului.

§ 9. Principiul paralelogramului forțelor (IV)

Dacă două forțe acționează simultan asupra unui punct material, efectul lor comun este același cu efectul unei a treia forțe care ar acționa asupra punctului material în direcția, sensul și cu mărimea diagonalei paralelogramului avînd ca laturi cele două forțe aplicate punctului material.

---

[1] La § 122 se arată că Pămîntul nefiind un reper inerțial, din cauza mișcării sale de rotație în jurul axei polilor, la forța de *atracție newtoniană* $\bar{\Gamma}$ se adaugă și o forță $\bar{C}$, denumită *forță centrifugă*, dînd ceea ce se numește *greutatea* $\bar{G}$ la suprafața Pămîntului a unui punct material de masă m.

Accelerația pe care i-o imprimă $\bar{G}$ se numește *accelerația greutății* $\bar{g}$, diferită de $\bar{\gamma}$, iar ecuația fundamentală devine:

$$m\bar{g} - \bar{G} = 0.$$

Din cauza variației forței centrifuge, de la ecuator la poli, unde această forță se anulează, atît $\bar{G}$ cît și $\bar{g}$ variază, însă astfel încît raportul $\frac{G}{g} = m$ rămîne constant.

Prin măsurarea greutății G a unui corp (cu ajutorul dinamometrului) și prin determinarea accelerației g din locul măsurătorii, se poate calcula masa acelui corp.

Observații și consecințe. 1° Cu ajutorul caracteristicilor cunoscute ale forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$, care acționează simultan asupra punctului material M, folosind o scară convenabilă, se construiesc vectorii $\overline{MA}$ și $\overline{MB}$, care reprezintă aceste forțe (fig. 7).

Dacă se completează paralelogramul $MABC$, vectorul $\overline{MC}$ reprezintă, la aceeași scară, cea de-a treia forță $\bar{F}$, care, dacă ar acționa singură asupra lui M, ar produce același efect cu efectul comun al primelor două forțe.

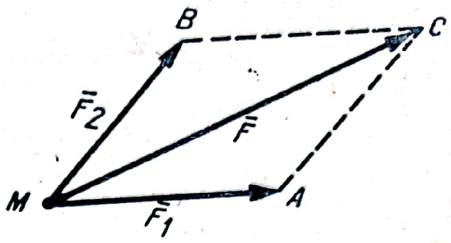


Fig. 7

2° Relația vectorială a principiului paralelogramului este:

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{F}.$$

3° Deseori, principiul paralelogramului forțelor este omis din enumerarea principiilor, fiind aplicat sub forma *regulii de însumare vectorială.* Încercările făcute de a demonstra pe cale matematică acest principiu nu au dat rezultate.

4° Atît din enunțul principiului II cît și din cel al principiului IV se observă că s-a admis implicit faptul că efectul unei forțe asupra punctului material nu depinde de viteza lui și nici de acțiunea altor forțe aplicate simultan punctului material.

5° Forța $\bar{F}$ al cărei efect este același cu efectul comun al forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ care acționează simultan asupra punctului material se numește *rezultanta* forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$, iar acestea se numesc *componentele* forței $\bar{F}$.

6° În cazul particular în care:

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0,$$

cînd forțele care acționează asupra punctului material sînt egale, dar direct opuse, ele au același efect asupra punctului material ca și forța:

$$\bar{F} = 0,$$

adică: forță nulă, *efect nul*, ca și cum punctul material ar fi izolat, foarte departe de acțiunea oricărui corp. În acest caz, punctul material se mișcă în virtutea inerției sau, dacă era în repaus, rămîne în această stare.

În natură și în practică se întîlnesc deseori mișcări uniforme (rectilinii cu viteză constantă), deși corpurile în mișcare nu sînt izolate. Asemenea mișcări sînt, de pildă: căderea unui fulg de zăpadă pe o vreme liniștită, sau mersul rectiliniu și uniform al unui vapor pe o mare și o vreme liniștită. În asemenea cazuri, corpurile sînt acționate de forțe, dar aceste forțe au un efect nul, adică *se echilibrează.*

Realizarea unor experiențe asemănătoare constituie *verificări indirecte* ale principiului inerției.

Scanned with OKEN Scanner

7° Două puncte materiale se interacţionează cu forţele $\bar{F}$ şi $\bar{F}'$ care, în virtutea principiului III, satisfac ecuaţia (1.15) şi sînt direct opuse. Cu toate acestea, *forţele nu se echilibrează, deoarece ele nu sînt aplicate aceluiaşi punct material.*

D. ÎMPĂRŢIREA ŞI PROBLEMELE MECANICII

§ 10. Împărţirea mecanicii. Istoric

a. Din consideraţii istorice şi pedagogice se obişnuieşte să se împartă studiul mecanicii în trei părţi:

1° *Statica*, în care se studiază *repausul corpurilor*, bineînţeles în raport cu un reper. Repausul, ca şi cazul mişcării în virtutea inerţiei, se caracterizează prin absenţa forţelor sau prin echilibrul lor. Deseori se mai folosesc în statică, în loc de repausul corpului sau de poziţia de repaus, expresiile: *echilibrul corpului* sau *poziţia de echilibru a corpului.*

2° *Cinematica*, în care se studiază *mişcările corpurilor fără a se ţine seama de forţe*, cu alte cuvinte, cinematica este o geometrie a deplasărilor, în care intervine şi timpul.

3° *Dinamica*, în care se studiază *mişcarea mecanică* a corpurilor, asimilate cu puncte materiale sau cu sisteme de puncte materiale şi acţionate de sisteme de forţe.

De fapt, dinamica este chiar mecanica, iar celelalte două părţi reprezintă doar aspecte particulare ale ei.

Totuşi, aceste aspecte au importanţa lor atît din punctul de vedere al unor aplicaţii cît şi din cel al simplificării şi uşurării studiului.

Astfel, deşi cinematica poate fi uşor înglobată în dinamică, totuşi, pentru rezolvarea unor probleme care au aplicaţii în tehnică, de pildă, la mecanisme, cinematica este deseori prezentată ca o parte a mecanicii.

b. Studiul mecanicii necesită o temeinică pregătire de geometrie analitică şi de analiză matematică.

Mecanica aplică în continuare, pentru rezolvarea problemelor ei, metodele folosite în matematică. Un instrument matematic deosebit de util prezentării mecanicii este *calculul vectorial.*

În mecanică şi în alte ştiinţe ale naturii se întîlnesc mărimi scalare, sau scalari, adică mărimi care pot fi perfect determinate dacă se cunoaşte numai *măsura* lor, exprimată, în unităţi corespunzătoare, *printr-un singur număr real, pozitiv sau negativ*, de pildă: masa, lungimea, timpul, temperatura, cantitatea de căldură etc.

Alte mărimi, pentru a căror determinare nu este suficientă doar *măsura* şi care mai necesită şi cunoaşterea *direcţiei* şi *sensului de propagare a fenomenelor*[1] pe care aceste mărimi le reprezintă, se numesc *mărimi orientate* sau *mărimi vectoriale*, reprezentate la rîndul lor *prin vectori.*

[1] E vorba de fenomene cărora li se pot asocia *vectori polari*, cum sînt: forţa, viteza liniară şi acceleraţia liniară.

Scanned with OKEN Scanner

În mecanică se întîlnesc, în afară de viteză, accelerație, forță, și alte mărimi vectoriale sau chiar mărimi nevectoriale, exprimate cu ajutorul unor operații vectoriale. De aceea, studiul mecanicii cere și o pregătire de *calcul vectorial* (algebră și analiză vectorială).

În acest manual se folosește de preferință prezentarea vectorială, însă fără a se neglija corespondența scalară cu expresiile analitice, deosebit de utile în aplicații, la rezolvarea problemelor și exercițiilor.

În acest scop, în prima parte a manualului, denumită *Bazele teoretice ale mecanicii corpului solid*, sînt cuprinse *algebra vectorilor liberi*, elemente de *analiză vectorială* și *teoria vectorilor alunecători.*

c. Istoric[1]. Mersul înainte al omenirii, pe linia ridicării nivelului ei material și cultural, a obligat pe oameni să-și dezvolte *mijloacele de muncă* și în primul rînd *uneltele de producție*. Măsura în care societatea stăpînește natura este dată de nivelul de dezvoltare a uneltelor de producție. În acest proces, de-a lungul multor milenii, oamenii au învățat, la început pe dibuite, apoi treptat, prin acumularea experienței, să-și alcătuiască și să-și perfecționeze uneltele de producție. De pildă, în ceea ce privește evoluția *uneltelor mecanice*, este sigur că a trecut vreme îndelungată de la folosirea *pîrghiei* pînă la descoperirea *roții* și apoi pînă la folosirea *scripeților.*

Mai tîrziu, pe baza acumulărilor de observații, oamenii au putut înjgheba *teorii* pe care le-au experimentat, urmînd *calea dialectică a cunoașterii.*

Alte acumulări de observații au fost urmate de noi teorii și tot astfel procesul se continuă mai departe.

Aspectul actual al mecanicii este datorit acumulărilor de observații și teoriilor emise de oamenii de seamă în decursul timpurilor.

Astfel, Arhimede (secolul al III-lea î.e.n.), demonstrînd *legea pîrghiilor* și stabilind *teoria centrului de greutate*, a pus bazele *staticii.*

Mai tîrziu, Pappus din Alexandria (secolul al IV-lea) a enunțat teoremele privind centrele de greutate ale corpurilor geometrice de rotație, cunoscute astăzi sub denumirea de teoremele lui Guldin-Pappus.

Leonardo da Vinci (1452—1529) a descoperit *legile frecării uscate*, care, sub forma enunțată de Coulomb (1736—1806), se folosesc și astăzi în mecanică, a studiat *mișcarea corpurilor pe planul înclinat*, a introdus noțiunea de *moment* prin brațul de pîrghie, a studiat probleme de *balistică*, zborul păsărilor, experimentînd chiar aparate de zbor.

Nicolae Copernic a răsturnat *geocentrismul lui Ptolemeu* (secolul al II-lea) prin concepția *heliocentrică* asupra lumii, față de care, ca și față de toate ideile progresiste, inchiziția a dus o luptă înverșunată. Astfel, Giordano Bruno (1548—1600), care a dezvoltat ideile lui Copernic asupra *pluralității lumilor* și *materialității lumii*, a fost ars pe rug.

Johann Kepler (1571—1630) a enunțat cele trei legi privind *mișcarea planetelor.*

Galileo Galilei (1564—1642), prin lucrările sale privind : *legile căderii corpurilor*, *mișcarea pe planul înclinat*, *principiul inerției*, *legile pendulului simplu* etc., a pus bazele *dinamicii.* Adept al lui Copernic, Galileo Galilei a fost chemat și el înaintea închiziției. Celebrul lui răspuns — *E pur si muove* — a rămas ca o dovadă a dîrzeniei cu care și-a susținut convingerile.

De aceeași epocă se leagă numele lui Simon Stevin (1548—1620), care a enunțat *principiul compunerii forțelor*, Toricelli (1608—1644), care a lăsat lucrări în domeniul *mișcării corpurilor grele*, Christian Huygens (1629—1695), care a descoperit *legile pendulului fizic*, a introdus noțiunile de *moment de inerție*, *accelerație centrifugă și centripetă*, *centru de oscilație*, René Descartes (1596—1650), care, în afară de epocalele sale lucrări matematice, printre care se numără și metoda analitică de rezolvare

[1] v. Ștefan Bălan și E. Beiu-Paladi. *Curs de mecanică teoretică, Statica.* Litografia și Tipografia Învățămîntului, 1957, din care au fost extrase un număr important de date folosite în acest istoric.

Scanned with OKEN Scanner

a problemelor de geometrie (geometria analitică), a introdus noţiunea de *cantitate de mişcare* şi a studiat *mişcarea corpurilor.*

Isaac Newton (1643—1727), unul din geniile omenirii, prin sinteza rezultatelor stabilite de înaintaşii lui a pus bazele mecanicii teoretice. În opera sa : *Philosophiae naturalis principia mathematica* el a enunţat *principiile fundamentale* ale mecanicii newtoniene într-o formă care în 300 de ani nu a suferit nici o modificare esenţială. El a extins studiul mecanicii la mişcările corpurilor cereşti şi a demonstrat *legea atracţiei universale.* În acelaşi timp cu Leibniz, a descoperit *calculul diferenţial şi integral.*

Contemporan cu Newton a fost fizicianul Robert Hooke (1635—1703), care, fără să cunoască lucrările lui Newton, a ajuns la rezultate similare cu cele stabilite de Newton. Lucrarea principală a lui Hooke se referă la relaţiile dintre eforturi şi deformaţii. Legea lui Hooke stă la baza *teoriei elasticităţii* şi *a rezistenţei materialelor.*

Continuatori ai operei lui Newton sînt: Leonhard Euler (1707—1783), care a studiat pe baza metodelor analitice, moderne atunci, *dinamica solidului rigid cu un punct fix*; P. S. Laplace (1748—1827), celebru prin lucrarea sa: *Tratat despre mecanica cerească*; Jeanle Rond d'Alembert (1717—1783), care a publicat *Tratat de dinamică* şi a enunţat principiul său, care sub forma *metodei cinetostatice* simplifică rezolvarea problemelor de dinamică; J. L. Lagrange (1736—1812) este cel care a creat *mecanica analitică.*

M. L. Lomonosov (1711—1765) este primul care a enunţat *principiul conservării energiei şi materiei.*

M. V. Ostrogradski (1801—1861) a enunţat, o dată cu Hamilton (1805—1865), *principiul variaţional* care le poartă numele.

P. L. Cebîşev (1821—1894) a lăsat importante lucrări în *teoria mecanismelor.*

N. E. Jukovski (1847—1921), „părintele aviaţiei ruse", a realizat importante lucrări din domeniul mecanicii şi mai ales din cel al *aerodinamicii.*

A. M. Leapunov (1857—1918) a studiat problema *stabilităţii mişcării.* De aceeaşi problemă s-a ocupat şi Henri Poincaré (1854—1912).

De mare răsunet sînt lucrările lui I. V. Meşcerski (1859—1935), care a elaborat *dinamica corpurilor cu masă variabilă*, şi K. E. Ţiolkovski (1857—1935), care, continuînd lucrările lui Meşcerski, a pus bazele teoriei *navigaţiei cu reacţie şi a mişcării rachetelor.* Lansarea primelor rachete cosmice s-a realizat în patria lui Ţiolkovski.

Primul satelit artificial al Pămîntului s-a stabilit pe orbita sa la 4 oct. 1957, cînd s-a deschis *era navigaţiei cosmice.* De la această dată, o serie impresionantă de corpuri (rachete, nave cosmice, sateliţi, planete artificiale) cu mase din ce în ce mai mari, unele avînd şi cosmonauţi la bord, au fost lansate în U.R.S.S. şi în S.U.A.

La începutul secolului nostru s-a constatat că sînt fenomene naturale din domeniul macrocosmosului şi al microcosmosului care nu au putut fi explicate de mecanica newtoniană. S-a ajuns la concluzia că pentru aceste domenii nu se poate aplica mecanica newtoniană şi aşa au apărut mecanici noi, ca : *mecanica relativistă, mecanica cuantică, mecanica ondulatorie* etc., de care se leagă numele lui A. Einstein, Max Planck, Louis de Broglie, acad. V. A. Fock, acad. S. L. Vavilov ş.a.

La noi, lucrări importante de mecanică teoretică au publicat: Spiru Haret, Dimitrie Pompeiu, Andrei Ioachimescu, V. Vâlcovici ş.a., iar în domeniul mecanicii aplicate, Anghel Saligny, Ion Ionescu, Gh. Em. Filipescu, E. Carafoli ş.a.

Astăzi în ţara noastră, în institute de cercetări sau de învăţămînt, în întreprinderi, se desfăşoară o intensă activitate ştiinţifică şi tehnică pe planuri multiple, cu realizări importante în toate domeniile.

§ 11. Probleme generale. Unităţi de măsură

a. Legătura dintre mişcarea mecanică a materiei, reprezentată în raport cu un reper fix prin acceleraţie ($\bar{a}$), şi interacţiunea părţilor de materie, reprezentată prin forţă ($\bar{F}$), exprimată pentru cazul unui punct material de masă constantă (m) prin ecuaţia fundamentală (1.12), scoate în evidenţă trei tipuri de probleme care pot fi enunţate astfel :

1° Problema directă: *Cunoscîndu-se mişcarea unui punct material, să se determine forţa care acţionează punctul.*

2° Problema inversă: *Cunoscîndu-se forţele care acţionează un punct material, să se determine mişcarea punctului.*

3° Problema mixtă: *Cunoscîndu-se unele din caracteristicile mişcării unui punct material şi ale forţelor care îl acţionează, să se determine caracteristicile necunoscute.*

De asemenea, enunţurile corespunzătoare pentru problemele de statică se obţin dacă se înlocuieşte peste tot *mişcarea* prin *poziţia de repaus*.

Conţinutul acestor enunţuri schematice poate fi regăsit în toate problemele de mecanică.

b. *Unităţile de măsură* pentru mărimile întîlnite în mecanică sînt prezentate în partea de dinamică. Pînă atunci, se presupun cunoscute definiţiile următoarelor unităţi:

pentru masă : kilogram (kg), tonă (t), gram (g),
pentru lungimi : metru (m), kilometru (km), centimetru (cm),
pentru timp : secundă (s), minut (min), oră (h),
pentru viteze : metru pe secundă $\left(\frac{m}{s}\right)$, kilometru pe oră $\left(\frac{km}{h}\right)$,
pentru acceleraţie : metru pe secundă la pătrat $\left(\frac{m}{s^2}\right)$,
pentru forţe : newton (N), dină (dyn), kilogram-forţă (kgf), tonă-forţă (tf), gram-forţă (gf).

CAPITOLUL II

ALGEBRA VECTORILOR LIBERI

A. GENERALITĂŢI

§ 12. Definiţii, notaţii. Tipuri de vectori

1° *O mărime care se poate măsura cu o unitate de măsură şi care nu variază dacă se schimbă sistemul de referinţă al spaţiului se numeşte* ***mărime scalară*** *sau* ***scalar***.

Rezultatul comparării mărimii scalare cu unitatea corespunzătoare este un număr pozitiv sau negativ, de exemplu: masa de 5 kg, temperatura de —5°C.

Scalarilor li se pot aplica operaţiile algebrice cu condiţia ca ei să reprezinte mărimi de acelaşi fel.

Cel mai simplu exemplu de scalar îl constituie numărul abstract.

2° *O mărime care, în afară de valoare numerică, are şi o orientare în spaţiu se numeşte* ***mărime vectorială*** *sau* ***vector***.

Mărimi vectoriale sînt: viteza, acceleraţia, forţa etc.

Cel mai simplu exemplu de vector este un segment de dreaptă OA (fig. 8), ale cărui extremităţi au semnificaţii diferite. Caracteristicile acestui vector sînt:

— O este *originea* vectorului, iar A este vîrful lui;

— *direcţia* este determinată de dreapta care trece prin extremităţile O şi A;

— *sensul* este de la origine spre vîrf şi este indicat prin săgeată;

— *modulul* este determinat prin lungimea segmentului OA.

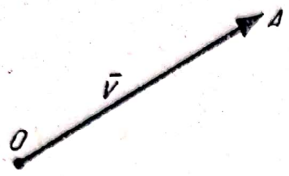


Fig. 8

3° Vectorii se notează prin litere barate, de exemplu:

$$\bar{v},\ \bar{F},\ \overline{OA}$$

sau prin litere cu săgeată:

$$\vec{v},\ \vec{F},\ \overrightarrow{OA}$$

sau prin litere îngroşate (aldine):

$$\mathbf{v},\ \mathbf{F},\ \mathbf{OA}.$$

Prima notaţie este cea mai folosită, fiind mai simplă.

4° *Tipuri de vectori.* α) *Vector legat sau localizat* se numeşte vectorul care are originea într-un punct *determinat.*

Exemple: viteza şi *acceleraţia* unui punct material, *forţa* aplicată unui punct material sînt reprezentate prin vectori legaţi de punct.

β) *Vector alunecător* se numeşte vectorul a cărui origine poate fi orice punct al unei drepte date, numită *suportul* vectorului alunecător.

Exemplu: forţa[1] aplicată unui solid rigid este reprezentată printr-un vector alunecător.

γ) *Vector liber* se numeşte vectorul a cărui origine poate fi orice punct din spaţiu.

Exemplu: Translaţia rectilinie a unei figuri este o operaţie care poate fi reprezentată printr-un vector liber $\bar{v}$, deoarece, dacă se asociază oricărui punct A_i, segmentul orientat cu direcţia, sensul şi lungimea vectorului liber $\bar{v}$, reprezentînd translaţia, se obţin poziţiile A_i' ($i = 1,2, \ldots$) ale punctelor figurii după translaţie (fig. 9).

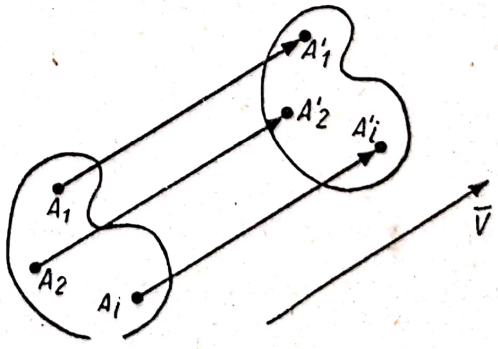


Fig. 9

[1] La § 37 se precizează tipul vectorial al forţei aplicate unui solid rigid.

§ 13. Compararea vectorilor liberi. Definiții

1° *Vectori egali.* Doi vectori liberi sînt egali dacă, reprezentînd fenomene de aceeași natură, au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime (fig. 10).

Egalitatea a doi vectori se notează astfel:

$$\bar{a} = \bar{b}.$$

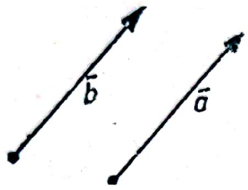


Fig. 10

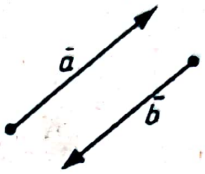


Fig. 11

Observație. Doi vectori liberi egali se mai numesc și *echipolenți.*

Vectorii fiind liberi, ei pot fi aduși cu originile în orice punct al spațiului. Această operație, aplicată de obicei vectorilor liberi, se numește *echipolență.*

Doi vectori liberi egali, aduși — prin echipolență — cu originile în același punct al spațiului, coincid.

2° *Vectori opuși.* Doi vectori liberi $\bar{a}$ și $\bar{b}$, care se deosebesc numai prin sens (fig. 11), se numesc *vectori opuși*, iar relația matematică dintre ei este:

$$\bar{a} = -\bar{b}$$

sau

$$\bar{a} + \bar{b} = 0.$$

3° *Vectori coliniari.* Vectorii liberi se numesc *coliniari* dacă au direcția comună.

4° *Vectori coplanari.* Vectorii liberi se numesc *coplanari* dacă direcțiile lor sînt paralele cu un același plan.

5° *Versor.* Se numește *versor* al unui vector $\bar{v}$ vectorul $\bar{v}^\circ$ care are aceeași direcție și același sens cu vectorul $\bar{v}$, iar modulul egal cu unitatea. Raportînd vectorul $\bar{v}$ la versorul său se obține *modulul* vectorului $\bar{v}$ și se notează:

$$\bar{v} = |\bar{v}|\,\bar{v}^\circ.$$

Modulul vectorului este *valoarea absolută* (totdeauna pozitivă) a măsurii sale.

6°. *Observații.* α) Versorul unui vector $\bar{v}$ se obține scriind:

$$\bar{v}^\circ = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}.$$

Evident, modulul versorului este:

$$|\bar{v}^\circ| = \frac{|\bar{v}|}{|\bar{v}|} = +1.$$

β) În cazul unor vectori coliniari, notînd cu $\bar{u}$ versorul direcției lor comune, oricare dintre vectori, de exemplu $\bar{v}$, se poate scrie sub forma:

$$\bar{v} = v\,\bar{u},$$

unde v este *valoarea algebrică* a vectorului $\bar{v}$ în raport cu versorul direcției comune. În acest fel, valoarea algebrică conține atît modulul cît și sensul vectorului.

γ) În consecință, vectorii pot fi determinați și cu ajutorul următoarelor caracteristici:
— originea;
— direcția;
— valoarea algebrică în raport cu versorul direcției.

δ) Pentru simplificare, de aici înainte, prin *valoarea* unui vector se va înțelege *numai valoarea sa algebrică (pozitivă sau negativă) în raport cu versorul direcției*, iar prin *modul*, *valoarea absolută (pozitivă) a vectorului.*

B. OPERAȚII CU VECTORII LIBERI[1]

§ 14. Amplificarea vectorilor

Prin această operație se înțelege înmulțirea unui vector $\bar{a}$ cu un scalar m. Rezultatul este un vector *coliniar cu* $\bar{a}$, de același sens dacă scalarul este pozitiv, sau de sens contrar dacă scalarul este negativ. Un exemplu este dat în figura 12.

Observații și consecințe. 1° Operația se exprimă prin relația:

$$\bar{b} = m\bar{a},$$

care, scrisă sub forma:

$$\frac{\bar{b}}{\bar{a}} = m \quad \text{sau} \quad \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{1}{m},$$

arată că există o strînsă legătură între operația de amplificare a unui vector și compararea a doi vectori coliniari, respectiv măsurarea unor vectori coliniari cu ajutorul versorului direcției lor comune.

2° Împărțirea a doi vectori nu are sens în algebra vectorială decît în cazul vectorilor coliniari.

3° Prin amplificarea unui vector $\bar{a}$ cu -1 rezultă un vector $\bar{b}$ opus vectorului $\bar{a}$.

4° Prin operația de amplificare cu un număr real fără dimensiuni, vectorul își menține natura și reprezintă același fenomen fizic.

5° *Proprietăți*[2]. Amplificarea este o operație *comutativă*, adică:

$$m\bar{a} = \bar{a}m,$$

Fig. 12

asociativă, adică:

$$m\,(n\bar{a}) = n\,(m\bar{a}) = (mn)\,\bar{a}$$

și *distributivă* în raport cu adunarea scalarilor, adică:

$$(m + n)\,\bar{a} = m\bar{a} + n\bar{a}.$$

[1] Operațiile cu vectorii liberi se pot aplica atît la vectorii alunecători cît și la cei legați, însă numai în măsura în care se poate face abstracție de caracteristicile care deosebesc acești vectori de vectorii liberi.

[2] Pentru demonstrarea proprietăților, vezi bibliografia: *N.E. Kocin, N. Teodorescu, F. Ladon.*

Scanned with OKEN Scanner

§ 15. Însumarea vectorilor

Prin definiție, suma[1] *a doi vectori liberi* $\overline{V}_1$ *și* $\overline{V}_2$ *este vectorul* $\overline{V}$ *avînd ca origine un punct oarecare O, direcția, sensul și modulul determinate prin diagonala paralelogramului construit cu vectorii* $\overline{V}_1$ *și* $\overline{V}_2$ *aduși echipolent cu originile în O*, așa cum se arată în figura 13.

Observații și consecințe. 1° Definiția însumării vectoriale se exprimă prin relația matematică:

$$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2.$$

2° Însumarea vectorială este denumită și *adunare geometrică;* ea este mai generală decît adunarea aritmetică și adunarea algebrică, fiindcă se ia în considerație și poziția reciprocă.

3° Însumarea se mai numește și *compunere*, iar $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$ se numesc *componentele* vectorului *sumă* $\overline{V}$.

4° Este evident că

$$|\overline{V}| \leqslant |\overline{V}_1| + |\overline{V}_2|,$$

egalitatea existînd numai dacă $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$ sînt coliniari și au același sens.

5° Definiția însumării, denumită și *regula paralelogramului vectorilor*, se poate reduce la *regula triunghiului:*

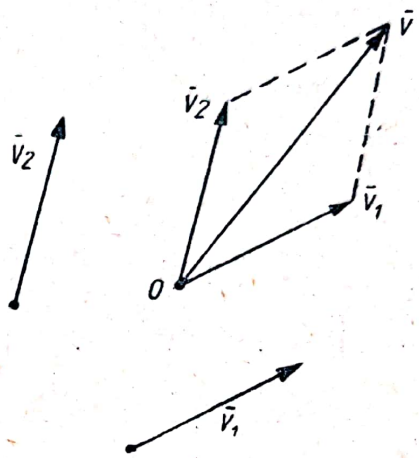


Fig. 13

Vectorul sumă $\overline{V}$ *are ca origine un punct oarecare O în care este adus echipolent cu originea unul din vectori, de exemplu* $\overline{V}_1$, *iar ca vîrf, vîrful celuilalt vector,* $\overline{V}_2$, *adus echipolent cu originea în vîrful primului vector* $\overline{V}_1$ (fig. 14).

În acest fel, operația se reduce la așezarea cap la cap a vectorilor de însumat.

6° În cazul a trei vectori liberi necoplanari $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$, se poate aplica regula paralelogramului de două ori, o dată pentru suma:

$$\overline{V}_1 + \overline{V}_2 = \overline{V}',$$

și apoi pentru:

$$\overline{V}' + \overline{V}_3 = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 = \overline{V}.$$

În legătură cu acest caz, construcția se poate completa pînă ce se obține un paralelipiped avînd ca muchii concurente în O cei trei vectori de însumat, aduși — prin echipolență — cu originile în O. Vectorul sumă are ca origine punctul O și este determinat prin diagonala din O a paralelipipedului construit cu ajutorul celor trei vectori (fig. 15).

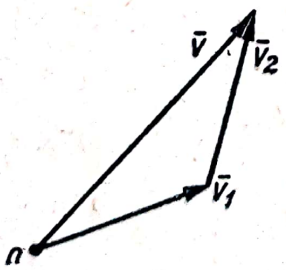


Fig. 14

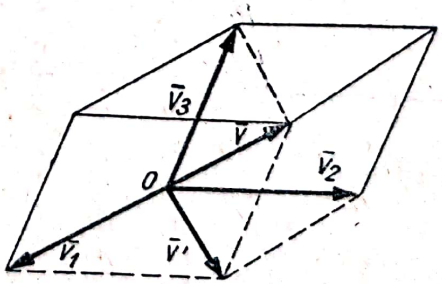


Fig. 15

[1] Operația nu are sens fizic *decît dacă vectorii reprezintă același fel de mărimi orientate*, de exemplu *viteze liniare.*

Operaţia aşezării cap la cap a vectorilor simplifică mult construcţia (fig. 16) şi se aplică uşor şi în cazul însumării unui număr mare de vectori (fig. 17).

Notaţia adoptată în cazul a n (finit) vectori este:

$$\overline{V} = \sum_{i=1}^{n} \overline{V}_i, \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Poligonul construit cu ocazia însumării prin aşezarea cap la cap se numeşte *poligonul vectorilor* (fig. 16 şi 17).

7° *Proprietăţi:*

— Însumarea vectorială este *comutativă*, adică:

$$\overline{V}_1 + \overline{V}_2 = \overline{V}_2 + \overline{V}_1.$$

— Însumarea vectorială este *asociativă*, ceea ce se exprimă, pentru cazul însumării a trei vectori, prin relaţiile:

$$(\overline{V}_1 + \overline{V}_2) + \overline{V}_3 = (\overline{V}_1 + \overline{V}_3) + \overline{V}_2 = \overline{V}_1 + (\overline{V}_2 + \overline{V}_3) = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 = \overline{V}.$$

Proprietatea permite suprimarea parantezelor şi scrierea relaţiilor ca în algebra mărimilor scalare:

$$\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 = \overline{V}_1 + \overline{V}_3 + \overline{V}_2 = \overline{V}_3 + \overline{V}_2 + \overline{V}_1 \text{ etc.},$$

cu toate că de fiecare dată poligonul vectorilor are alt aspect.

— Însumarea vectorială este *distributivă* faţă de amplificarea cu un scalar, adică:

$$m(\overline{V}_1 + \overline{V}_2) = m\overline{V}_1 + m\overline{V}_2.$$

8° *Cazuri particulare.* Dacă vîrful ultimului vector însumat coincide cu originea primului vector, poligonul vectorilor *se închide de la sine*, iar suma este un *vector nul* (fig. 18):

$$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 + \overline{V}_4 = 0.$$

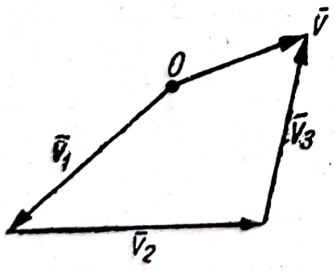


Fig. 16

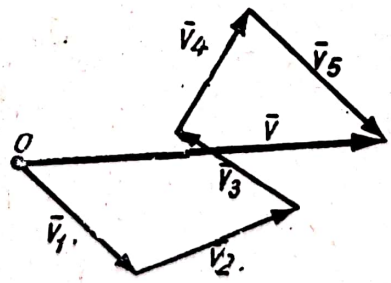


Fig. 17

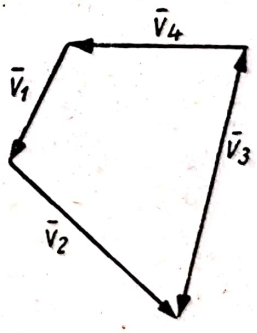


Fig. 18

— Însumarea unui număr oarecare finit de vectori c o l i n i a r i se face ca şi în celelalte cazuri, prin aşezarea cap la cap. Vectorii fiind coliniari, ei pot fi raportaţi la versorul $\overline{u}$ al direcţiei lor comune, iar fiecare poate fi scris sub forma:

$$\overline{V}_i = m_i \overline{u}, \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

unde m_i este valoarea vectorului $\overline{V}_i$ în raport cu versorul $\overline{u}$.

Scanned with OKEN Scanner

În acest fel, însumarea vectorială:

$$\overline{V} = \sum_{i=1}^{n} \overline{V}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{u} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) \bar{u} = m\bar{u}$$

se reduce, aplicînd proprietatea de distributivitate, la o însumare algebrică:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i .$$

§ 16. Descompunerea vectorilor liberi

Această operație este deseori socotită ca operația inversă însumării (compunerii) vectorilor. Suma unui număr finit de vectori liberi este un vector liber *unic* și *bine determinat.*

Un vector $\overline{V}$ poate fi descompus în componente *într-o infinitate de moduri:*

$$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4 = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D} \text{ etc.}$$

Pentru aceasta este suficient ca poligonul vectorilor să aibă, ca origine a primei componente, originea vectorului, iar ca vîrf al ultimei componente, vîrful vectorului de descompus (fig. 19).

În general, operația descompunerii fiind nedeterminată nu interesează decît cazurile în care această operație duce la componente unice și bine determinate.

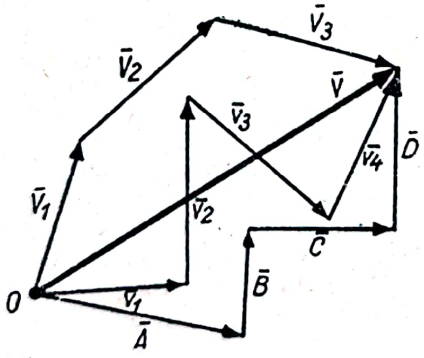


Fig. 19

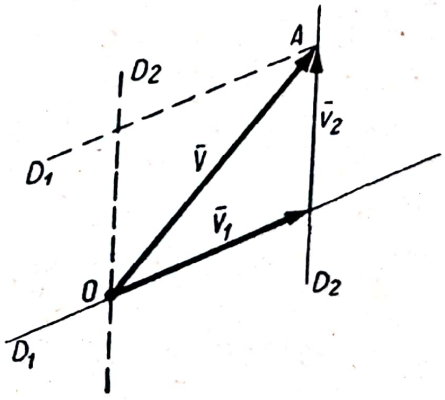


Fig 20

Observații și consecințe. 1° *În plan,* descompunerea în mod unic a unui vector liber în două componente este asociată cu cele patru cazuri de rezolvare a unui triunghi rectiliniu. În mecanică se întîlnesc mai des următoarele două cazuri:

α) sînt date direcțiile celor două componente;

β) sînt date direcția, sensul și modulul uneia din componente.

Rezolvare: α) Prin extremitățile vectorului dat $\overline{V}$ se construiesc dreptele paralele cu cele două direcții D_1 și D_2. Laturile paralelogramului rezultat determină în mod unic componentele $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$ (vectori liberi).

Evident, construcția se simplifică dacă se duce prin fiecare extremitate numai cîte o singură paralelă, de exemplu prin O la D_1 și prin A la D_2 (fig. 20).

Rezolvarea este posibilă numai dacă direcţiile date D_1, D_2 şi direcţia vectorului dat sînt paralele cu un acelaşi plan. De asemenea, pentru o soluţie unică şi bine determinată, trebuie ca nici una din direcţiile D_1 şi D_2 să nu coincidă cu direcţia vectorului dat.

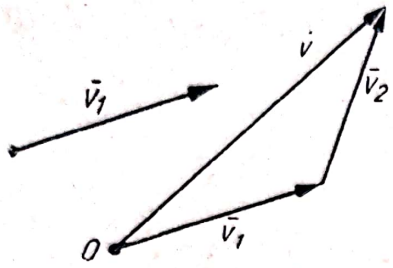


Fig. 21

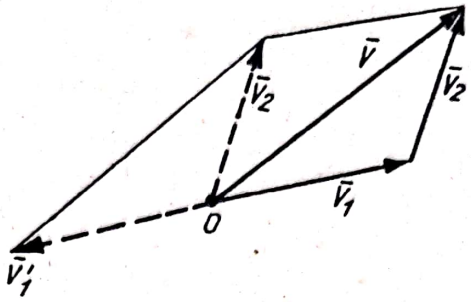


Fig. 22

β) Se aduce, prin echipolenţă, componenta cunoscută $\bar{V}_1$, cu originea în originea vectorului $\bar{V}$ (fig. 21). Componenta necunoscută (vector liber) are ca origine vîrful vectorului $\bar{V}_1$, iar ca vîrf, pe cel al vectorului $\bar{V}$. Rezolvarea este totdeauna posibilă.

2° *Scăderea* vectorilor liberi coincide cu cazul β) al descompunerii. Dacă $\bar{V}$ este vectorul din care se scade vectorul $\bar{V}_1$, necunoscuta operaţiei este:

$$\bar{V}_2 = \bar{V} - \bar{V}_1.$$

Scriind relaţia sub forma:

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$$

se observă că $\bar{V}_2$ este componenta necunoscută a vectorului $\bar{V}$, iar $\bar{V}_1$ este componenta cunoscută (fig. 22).

Sau altfel, scriind:

$$\bar{V}_2 = \bar{V} - \bar{V}_1 = \bar{V} + (-\bar{V}_1) = \\ = \bar{V} + \bar{V}_1',$$

unde $\bar{V}_1'$ este un vector opus lui $\bar{V}_1$, operaţia de scădere devine o însumare complementară (fig. 22).

Scăderea este o operaţie *anticomutativă*.

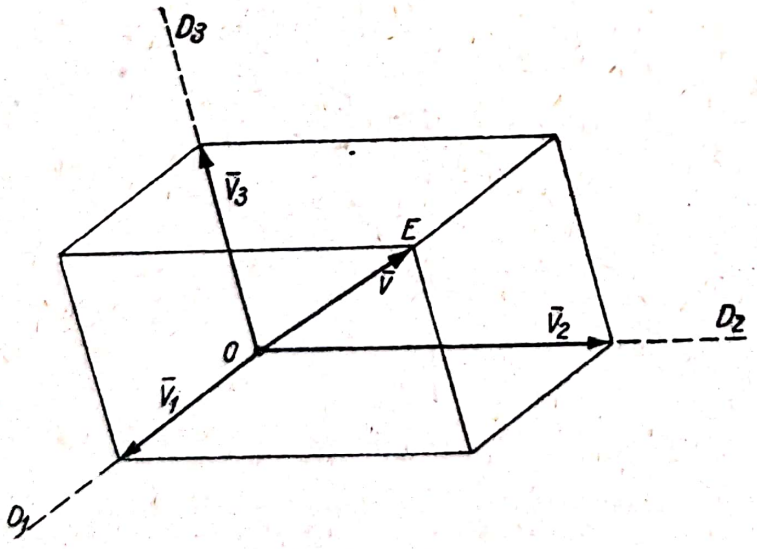


Fig. 23

3° *În spaţiu*, problema descompunerii unui vector liber în trei componente, după trei direcţii date D_1, D_2, D_3, găseşte multe aplicaţii. Rezolvarea ei geometrică este simplă:

Prin originea vectorului sumă $\bar{V}$, se duc dreptele OD_1, OD_2, OD_3 paralele cu direcţiile date (fig. 23). Prin vîrful vectorului $\bar{V}$ se duc planele paralele cu OD_1D_2, OD_2D_3 OD_3D_1.

Aceste plane întîlnesc dreptele OD_1, OD_2, OD_3 în vîrfurile celor trei componente necunoscute $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$, $\bar{V}_3$, deci:

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3.$$

Construcţia se poate simplifica:
După ce s-au dus dreptele OD_1, OD_2, OD_3, prin vîrful E se duce o paralelă la direcţia D_3 pînă întîlneşte planul OD_1D_2 în A. Prin A se duce paralela la D_1, care întîlneşte dreapta OD_2 în B (fig. 24).
Componentele necunoscute sînt:

$$\bar{V}_1 = \overline{BA};\ \bar{V}_2 = \overline{OB};\ \bar{V}_3 = \overline{AE}.$$

Descompunerea unui vector dat în trei componente după trei direcţii date se poate face în mod unic şi bine determinat numai dacă cele trei direcţii nu sînt paralele cu un acelaşi plan şi nici una din ele nu are aceeaşi direcţie cu vectorul dat.

Aceasta înseamnă că triedrul $OD_1D_2D_3$ trebuie să fie veritabil, iar $\bar{V}$ să nu fie situat în nici unul din planele triedrului.

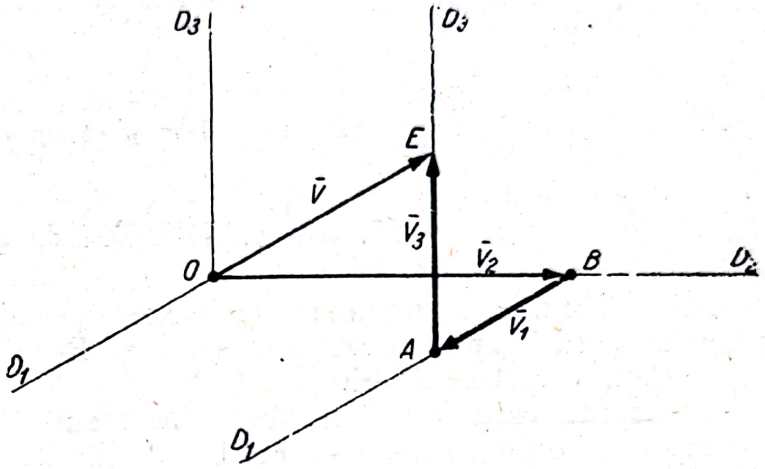


Fig. 24

4° În consecinţă:
— Orice vector liber $\bar{c}$ poate fi descompus după direcţiile a doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ coplanari cu $\bar{c}$ şi ca atare poate fi scris sub forma:

$$\bar{c} = m\bar{a} + n\bar{b}.$$

— Condiţia necesară şi suficientă ca trei vectori liberi $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ să fie coplanari este:

$$\lambda\bar{a} + \mu\bar{b} + \nu\bar{c} = 0.$$

— Condiţia necesară şi suficientă ca trei vectori liberi $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ să formeze un triedru veritabil este:

$$\lambda\bar{a} + \mu\bar{b} + \nu\bar{c} \neq 0.$$

— Orice vector liber $\bar{d}$ poate fi descompus după direcţiile a trei vectori liberi $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ necoplanari şi se poate deci exprima prin relaţia:

$$\bar{d} = m\bar{a} + n\bar{b} + p\bar{c}.$$

În expresiile de la punctul 4°, λ, μ, ν, m, n şi p sînt scalari convenabili aleşi şi astfel ca în nici una din expresii să nu fie toţi scalarii nuli.

Aplicaţii. 1° Să se demonstreze că:

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$$

este condiţia necesară şi suficientă ca vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ să poată forma un triunghi.

2° Să se demonstreze că se poate construi un triunghi ale cărui laturi să fie egale şi paralele cu medianele unui triunghi dat.

3° $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ şi $\bar{r}_3$ sînt vectorii de poziţie, în raport cu reperul din O, ai punctelor A_1, A_2, A_3; să se arate că dacă:

$$\bar{r}_1 - (1 + \lambda)\bar{r}_2 + \lambda\bar{r}_3 = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

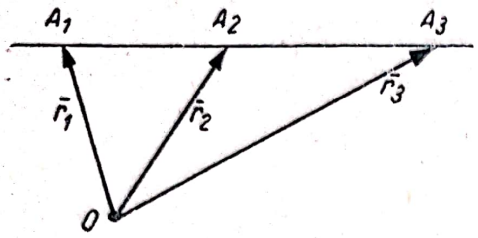


Fig. 25

punctele A_1, A_2 și A_3 sînt pe aceeași dreaptă (fig. 25).

4° Dacă:

$$\bar{r}_1,\ \bar{r}_2,\ \bar{r}_3 \text{ și}$$

$$\bar{r}_4 = m\bar{r}_1 + n\bar{r}_2 + p\bar{r}_3$$

sînt vectorii de poziție a patru puncte M_1, M_2, M_3 și M situate în același plan, între scalarii m, n și p există relația:

$$m + n + p = 1.$$

C. METODE SIMPLE DE CALCUL CU VECTORII

§ 17. Generalități. Metoda grafică

a. Amplificarea, însumarea (compunerea), scăderea și descompunerea sînt primele operații aplicate vectorilor liberi. Rezultatele acestor operații sînt de asemenea vectori liberi.

În general, caracteristicile vectorilor rezultați sînt necunoscute.

Pentru determinarea lor se pot folosi diferite metode de calcul: grafică, trigonometrică, analitică, pe baza sistemelor de referință carteziene, vectorială, bazată pe alte operații vectoriale. Cele mai simple sînt primele două.

b. *Metoda grafică* se impune ori de cîte ori se folosește reprezentarea mărimilor orientate prin *segmente de dreaptă orientate*, prin *vectori*.

Astfel, cunoscînd doi vectori liberi $\bar{V}_1$ și $\bar{V}_2$ prin direcție, sens și modul, determinarea vectorului sumă:

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$$

se face construind grafic triunghiul vectorilor (fig. 26). Într-un punct oarecare O, al unui plan paralel cu direcțiile vectorilor cunoscuți, se reprezintă vectorul $\bar{V}_1$ prin segmentul de dreaptă $\overline{OA}$, la scara aleasă, ținînd seama de orientarea vectorului. Cu originea în A, prin segmentul orientat $\overline{AB}$, la aceeași scară, se reprezintă vectorul $\bar{V}_2$. θ este unghiul format de vectorii $\bar{V}_1$ și $\bar{V}_2$.

Caracteristicile vectorului sumă $\overline{OB}$ se pot determina prin măsurări de lungimi:

$$|\bar{V}| = |\overline{OB}|$$

și de unghiuri θ_1 sau θ_2.

Observații. Metoda grafică are față de alte metode următoarele avantaje și dezavantaje:

1° Operațiile sînt simple, rapide și pot fi ușor verificate.

2° Rezultatele nu pot fi exacte, iar gradul de aproximație depinde de îngrijirea executării desenului. În cazul unui desen bine executat se pot obține rezultate cu primele două cifre semnificative exacte, ceea ce pentru majoritatea problemelor puse de tehnică este o aproximație satisfăcătoare.

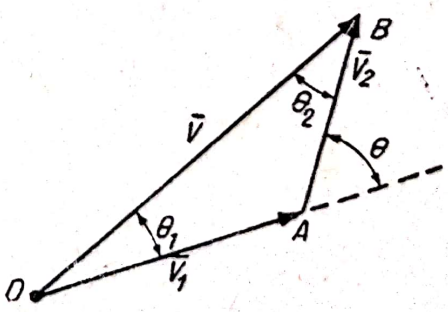


Fig. 26

3° În cazul vectorilor necoplanari este necesar să se facă apel şi la metodele geometriei descriptive.

4° În general, calculul grafic nu este folosit pentru stabilirea unor rezultate teoretice; în schimb, are o largă aplicaţie în problemele practice.

În cadrul manualului se vor da unele indicaţii asupra folosirii metodei grafice în probleme unde această metodă dă rezultate satisfăcătoare.

§ 18. Metoda trigonometrică

a. Metoda grafică foloseşte construcţii de triunghiuri, măsurători de laturi şi de unghiuri, iar metoda trigonometrică rezolvă aceste triunghiuri prin calcul trigonometric.

b. Pentru exemplificare se va trata prin metoda trigonometrică problema de la § 17:

Se cunosc direcţia şi sensul vectorului $\overline{V}_1$, direcţia şi sensul vectorul $\overline{V}_2$ prin $\sphericalangle\,\theta$, format de semidreptele Ax şi Ay (fig. 27), şi modulele vectorilor: $|\overline{V}_1|$ şi $|\overline{V}_2|$.

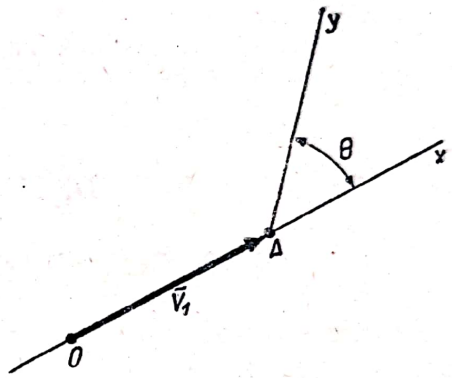


Fig. 27

Necunoscutele problemei sînt direcţia vectorului $\overline{V}$, reprezentată prin unghiul θ_1, dintre semidreapta Ox şi vectorul $\overline{V}$, precum şi modulul $|\overline{V}|$.

Relaţiile trigonometrice, corespunzătoare cazului II de rezolvare a triunghiurilor rectilinii, cînd se cunosc două laturi şi unghiul cuprins între ele, sînt:

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2\,|\overline{V}_1|\,|\overline{V}_2|\cos(\pi - \theta)$$

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2\,|\overline{V}_1|\,|\overline{V}_2|\cos\theta$$

şi:

$$\frac{|\overline{V}|}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{|\overline{V}|}{\sin\theta} = \frac{|\overline{V}_1|}{\sin\theta_2} = \frac{|\overline{V}_2|}{\sin\theta_1}.$$

Soluţiile sistemului de ecuaţii sînt:

$$|\overline{V}| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2\,|\overline{V}_1|\,|\overline{V}_2|\cos\theta} \tag{2.1}$$

şi:

$$\sin\theta_1 = \frac{|\overline{V}_2|\sin\theta}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2\,|\overline{V}_1|\,|\overline{V}_2|\cos\theta}}. \tag{2.2}$$

Observaţii şi consecinţe. 1° Se precizează că unghiul a doi vectori este unghiul cel mai mic format de cei doi vectori aduşi prin echipolenţă cu originile în acelaşi punct arbitrar ales.

2° Stabilirea sensului vectorului necunoscut se face cu ajutorul unei figuri. Astfel, în exemplul studiat se alege valoarea corespunzătoare a unghiului θ_1 rezultat din (2.2) cu ajutorul figurii 26.

3° Metoda se poate aplica la un număr oarecare de vectori liberi, chiar şi necoplanari.

Scanned with OKEN Scanner

4° Calculul trigonometric are, față de calculul grafic, avantajul preciziei, însă și dezavantajul că este greoi și cu atît mai mult cu cît sînt mai mulți vectori în problemă. Din această cauză, metoda trigonometrică este mai rar folosită în Mecanică.

5° În unele cazuri particulare, relațiile (2.1) și (2.2) se simplifică, astfel, dacă *vectorii dați sînt coliniari*, rezultatele sînt:

$$\theta = 0 \qquad |\overline{V}| = |\overline{V}_1| + |\overline{V}_2| \qquad \theta_1 = 0$$

sau:

$$\theta = \pi \qquad |\overline{V}| = |\overline{V}_1| - |\overline{V}_2| \qquad \theta_1 = 0 \text{ sau } \pi,$$

iar dacă *vectorii dați sînt ortogonali:*

$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad |\overline{V}| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \quad \sin\theta_1 = \frac{|\overline{V}_2|}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}.$$

De prima parte a observației 5° se leagă faptul că în cazul vectorilor coliniari operația de însumare vectorială se reduce la o însumare algebrică.

Partea a doua scoate în evidență avantajul folosirii direcțiilor ortogonale atunci cînd acest lucru este posibil.

Aceste simplificări justifică larga aplicare, în calculul vectorial, a *metodei carteziene pe baza proiecțiilor pe sisteme de axe perpendiculare între ele* (§§ 19—24).

D. METODA CARTEZIANĂ

§ 19. Generalități. Sistem de referință pe o dreaptă

Se știe că mai mulți vectori liberi pot fi coliniari sau coplanari sau orientați oricum în spațiu. Aplicarea metodei carteziene se va începe cu cel mai simplu caz, cu un sistem de vectori liberi coliniari.

Pentru acest caz, sistemul de referință se reduce la o dreaptă orientată, paralelă cu direcția comună a vectorilor, numită *axă*.

Axa este o dreaptă pe care s-a ales un punct O oarecare ca *origine*, o *unitate de măsură* și un *sens direct*, unul din cele două sensuri de deplasare posibile. De obicei, direcția, unitatea de măsură și sensul axei sînt determinate printr-un versor legat de punctul O. Astfel, axa Ox este determinată prin versorul $\vec{i}$ legat de originea O (fig. 28).

În geometria analitică, pe o dreaptă, figurile sînt puncte și segmente de dreaptă orientate.

Poziția unui punct oarecare M este determinată pe axă prin vectorul legat $\overline{OM}$, numit *vector de poziție*. Deoarece $\overline{OM}$ este coliniar cu $\vec{i}$, din compararea lor rezultă:

$$\overline{OM} = x\vec{i},$$

unde x, valoarea algebrică a vectorului $\overline{OM}$ în raport cu axa Ox, determină, prin mărime și semn, poziția punctului M pe axă și se numește coordonata punctului (abscisa, în cazul unei singure axe).

Fig. 28

Există o corespondență biunivocă între poziția unui punct pe o axă și coordonata sa:

Oricărui punct de pe o axă îi corespunde o singură coordonată reală (abscisa) şi, reciproc, oricărei abscise reale îi corespunde un singur punct pe axă.

De asemenea, oricărui vector liber, care reprezintă un segment de dreaptă orientat, coliniar cu axa Ox, îi corespunde o valoare algebrică X, coordonata vectorului. Astfel, un vector liber $\overline{V}$ coliniar cu axa poate fi adus într-o poziţie oarecare $\overline{MM'}$ pe axă. În funcţie de extremităţile M şi M' (fig. 29) se poate scrie:

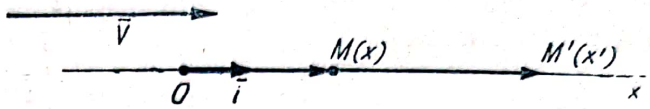


Fig. 29

$$\overline{OM'} = \overline{OM} + \overline{MM'}$$

sau:

$$\overline{MM'} = \overline{V} = \overline{OM'} - \overline{OM} =$$
$$= x'\vec{i} - x\vec{i} = (x' - x)\vec{i} = X\vec{i},$$

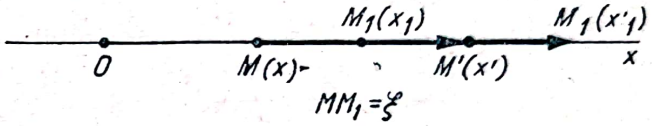


Fig. 30

unde x şi x' sînt coordonatele extremităţilor, iar X este valoarea algebrică sau coordonata în raport cu axa Ox a vectorului liber $\overline{V}$.

Se observă că X *nu depinde* de poziţiile extremităţilor vectorului, deoarece, dacă vectorul este adus în altă poziţie $\overline{M_1M_1'}$ (fig. 30), calculînd valoarea vectorului pentru această poziţie, se găseşte:

$$X_1 = x_1' - x_1 = (x' + \xi) - (x + \xi) = x' - x = X.$$

Reciproc, oricărei valori X îi corespunde, în raport cu axa Ox, un vector liber coliniar cu axa.

Observaţii. 1° Se precizează că prin aplicarea operaţiei de însumare s-a presupus implicit că vectorii reprezintă numai mărimi de aceeaşi natură.

2° Presupunînd că M este un punct mobil pe axa Ox, determinată prin originea O şi versorul $\vec{i}$ al axei, iar $\overline{V}$ este viteza punctului M (fig. 31), se poate scrie:

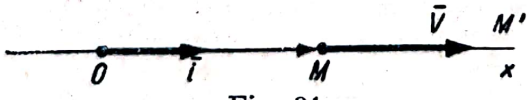


Fig. 31

$$\overline{OM} = x\vec{i}, \quad \overline{V} = X\vec{i}.$$

Aici x este coordonata sau valoarea vectorului de poziţie $\overline{OM}$ în raport cu axa Ox şi are dimensiunea unei lungimi, măsurîndu-se de exemplu în metri, iar X este coordonata sau valoarea vectorului viteză $\overline{V}$ în raport cu axa şi are dimensiunea unei viteze măsurîndu-se de exemplu în metri pe secundă.

În consecinţă, aici X nu poate fi exprimat prin diferenţa valorilor extremităţilor M' şi M.

3° În cele ce urmează $\vec{i}$ se va numi *versorul fundamental* al axei Ox.

4° Semnul valorii unui vector precizează *sensul* vectorului în raport cu sensul versorului fundamental: dacă semnul este pozitiv, vectorul are acelaşi sens cu versorul şi. invers, dacă semnul este negativ orientarea vectorului este contrară orientării versorului,

§ 20. Sisteme de referinţă în plan şi în spaţiu

Pentru a folosi metoda carteziană în cazul unui sistem de vectori liberi coplanari, se poate alege în acest plan un sistem de referinţă cartezian Oxy, cu originea într-un punct O al planului şi cu axele Ox şi Oy determinate cu ajutorul versorilor fundamentali $\bar{i}$ şi $\bar{j}$ situaţi în plan, dar *necoliniari* (fig. 32), adică satisfăcînd condiţiile:

$$\lambda\bar{i} + \mu\bar{j} \neq 0; \qquad |\bar{i}| = |\bar{j}| = +1$$

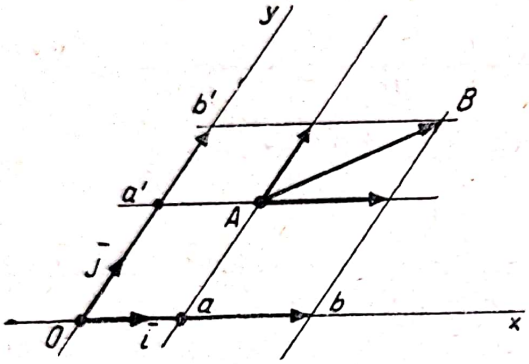


Fig. 32

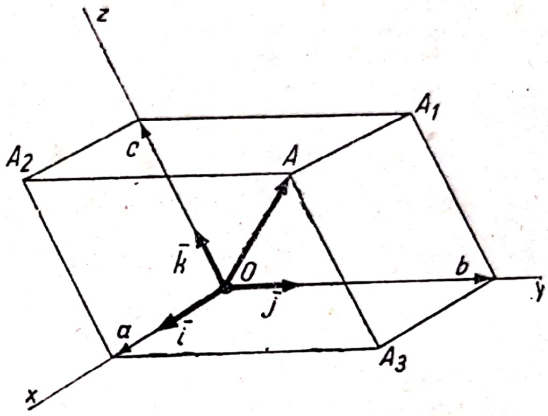


Fig. 33

pentru orice λ şi μ, din care cel puţin unul nu este nul.

De asemenea, în cazul unui sistem de vectori liberi dispuşi oricum în spaţiu, se poate alege, într-un punct oarecare O al spaţiului, *un triedru fundamental* $Oxyz$ cu axele Ox, Oy, Oz, determinate cu ajutorul versorilor fundamentali $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, nu toţi trei coplanari (fig. 33), adică satisfăcînd condiţiile:

$$\lambda\bar{i} + \mu\bar{j} + \nu\bar{k} \neq 0, \qquad |\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = +1,$$

pentru orice λ, μ şi ν, din care cel puţin unul nu este nul.

Revenind la sistemul din plan, pentru a stabili o corespondenţă biunivocă între vectorul din planul Oxy şi axele sistemului de referinţă, se descompune vectorul $\overline{AB}$ (fig. 32) în două componente paralele cu aceste axe. Se duc paralelele Aa' şi Bb' la axa Ox, pînă la intersecţia lor cu axa Oy în a' şi b', apoi paralelele Aa şi Bb la axa Oy, pînă ce acestea intersectează axa Ox în punctele a şi b.

Astfel, $\overline{ab}$ şi $\overline{a'b'}$ sînt componentele vectorului $\overline{AB}$ după direcţiile axelor Ox şi Oy:

$$\overline{AB} = \overline{ab} + \overline{a'b'}.$$

Se poate asocia operaţia de descompunere cu operaţia de proiectare a punctelor A şi B pe axa Ox, paralel cu direcţia Oy, şi la fel, pe axa Oy, paralel cu direcţia Ox.

La fel şi în spaţiu, se descompune un vector oarecare $\overline{OA}$ (fig. 33) în trei componente paralele cu axele Ox, Oy şi Oz cu ajutorul planelor duse prin

extremităţile vectorului, paralel cu planele yOz, zOx şi xOy. Planele întîlnesc axele Ox, Oy, Oz respectiv în vîrfurile componentelor.

Astfel, în cazul considerat[1] (fig. 33), $\overline{Oa}$, $\overline{Ob}$ şi $\overline{Oc}$ sînt componentele vectorului $\overline{OA}$ după axele triedrului fundamental.

De asemenea se poate asocia operaţia de descompunere cu operaţia de proiectare a extremităţilor vectorului pe cele trei axe ale triedrului, paralel cu planele triedrului.

Convenţie. *Proiecţia, paralelă*[2] *cu o direcţie sau cu un plan, a unui vector pe o axă este un vector.*

Consecinţe: 1°. Componentele unui vector situat în planul axelor Oxy, după direcţiile acestor axe, sînt în acelaşi timp şi proiecţiile vectorului pe axe, proiecţia pe una din axe făcîndu-se paralel cu cealaltă axă.

2°. Componentele unui vector oarecare, în raport cu axele triedrului $Oxyz$, sînt în acelaşi timp şi proiecţiile vectorului pe axe, proiecţia pe una din axe făcîndu-se paralel cu planul triedrului determinat de celelalte două axe.

Observaţie: După cum s-a arătat la § 18, calculele se simplifică dacă axele sînt rectangulare două cîte două. De aceea se folosesc, de preferinţă, axe rectangulare în plan şi triedre tridreptunghice în spaţiu. În acest caz, *proiecţiile oblice* devin *proiecţii ortogonale.* Atît timp cît nu se precizează felul proiecţiei se înţelege că proiecţia este ortogonală. *De asemenea, versorii fundamentali $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ vor fi atribuiţi exclusiv axelor şi triedrelor ortogonale.*

§ 21. Teoremele proiecţiei ortogonale

a. **Teorema I.** *Valoarea proiecţiei unui vector pe o axă este egală cu produsul dintre modulul vectorului prin cosinusul unghiului format între versorul axei cu vectorul considerat.*

Se construiesc planele proiectante (P) şi (Q) ale extremităţilor unui vector oarecare $\overline{AB}$ (fig. 34). Aceste plane intersectează axa Ox în punctele a şi b:

$$pr_{Ox}\ \overline{AB} = \overline{ab} = X\vec{i}.$$

Paralela dusă prin A la axă intersectează planul (Q) în B'. Aducerea

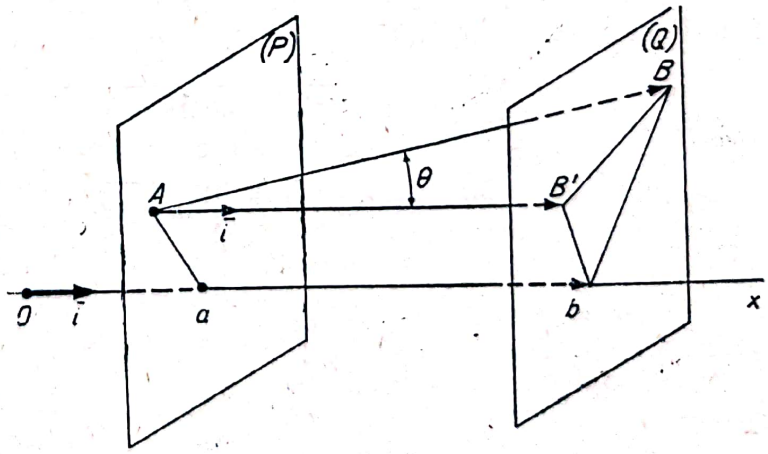


Fig. 34

[1] Numai pentru a nu complica figura 33, originea vectorului a fost aleasă în originea axelor şi nu într-un punct oarecare.

[2] Proiecţia în aceste condiţii se mai numeşte şi *oblică*.

unui vector egal cu $\bar{i}$, dar cu originea în A, face din AB' o axă paralelă cu Ox situată în acelaşi plan cu vectorul $\overline{AB}$, iar $\overline{AB'}$ este proiecţia vectorului $\overline{AB}$ pe noua axă. Se observă că:

$$\overline{AB'} = \overline{ab}.$$

Din triunghiul dreptunghic $AB'B$ rezultă:

$$X = |\overline{AB}| \cos \theta, \tag{2.3}$$

unde X este valoarea comună a vectorilor $\overline{AB'}$ şi $\overline{ab}$ în raport cu versorul $\bar{i}$.

c.c.t.d.

Dacă unghiul θ este mai mare ca $\frac{\pi}{2}$, pentru simplificare se poate folosi unghiul cel mai mic θ' format de *direcţiile* celor doi vectori; în acest caz se va ţine seamă de sensul proiecţiei pentru a se stabili semnul corect al valorii proiecţiei (fig. 35).

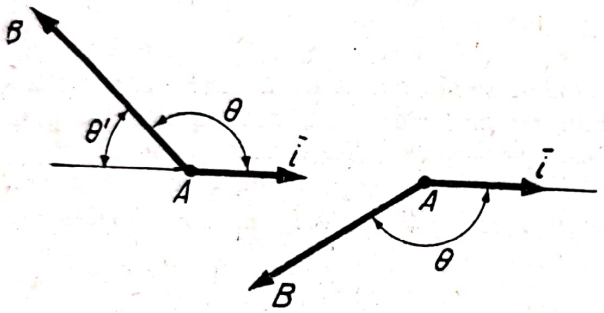


Fig. 35

b. **Teorema II.** *Proiecţia unei sume de vectori pe o axă este egală cu suma proiecţiilor vectorilor pe axa considerată.*

Demonstraţia care urmează se poate generaliza pentru un număr oarecare, finit, de vectori. Pentru simplificare se consideră vectorul $\overline{AD}$ care închide poligonul vectorilor $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ şi $\overline{CD}$, adică:

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}.$$

Se proiectează pe o axă oarecare Ox (fig. 36) şi se scrie relaţia evidentă în cazul însumării unor vectori coliniari:

$$\overline{ad} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd},$$

însă:

$$\overline{ad} = pr_{Ox}\overline{AD} = pr_{Ox}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}),$$

iar:

$$\overline{ab} = pr_{Ox}\overline{AB};$$

$$\overline{bc} = pr_{Ox}\overline{BC};\ \overline{cd} = pr_{Ox}\overline{CD},$$

deci:

$$pr_{Ox}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}) =$$

$$= pr_{Ox}\overline{AB} + pr_{Ox}\overline{BC} + pr_{Ox}\overline{CD}.$$

c.c.t.d.

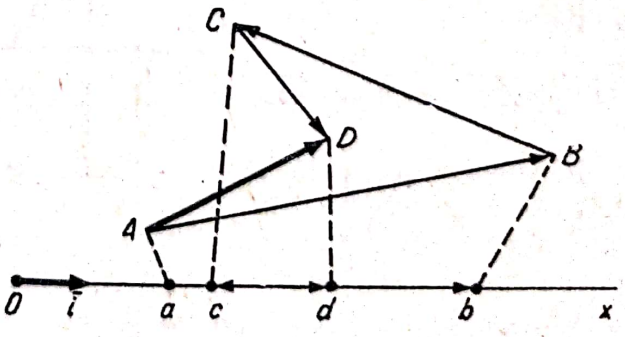


Fig. 36

Observaţii. 1° Dacă se notează cu X_1, X_2, X_3 valorile proiecţiilor vectorilor pe axa Ox şi cu X valoarea proiecţiei pe Ox a sumei lor, teorema II se traduce prin relaţia :

$$X\vec{i} = X_1\vec{i} + X_2\vec{i} + X_3\vec{i}$$

sau :

$$X = X_1 + X_2 + X_3, \tag{2.4}$$

valorile X_1, X_2, X_3 fiind calculate prin aplicarea teoremei I.

În acest fel, relaţia (2.4) determină valoarea X a proiecţiei vectorului sumă în funcţie de valorile cunoscute X_1, X_2 şi X_3.

2° Pentru determinarea vectorului sumă cunoaşterea valorii X este necesară, dar nu este suficientă, deoarece proiecţia unui vector dat pe o axă este unică şi bine determinată, însă cunoaşterea proiecţiei unui vector pe o singură axă nu este suficientă pentru determinarea vectorului necoliniar cu axa. Astfel, proiecţia vectorului $\overline{AD}$ pe axa Ox este $\overline{ad}$ (fig. 37). Dar $\overline{ad}$ este, în acelaşi timp, proiecţia oricărui vector din spaţiu care are originea în planul (P), iar vîrful în planul (Q).

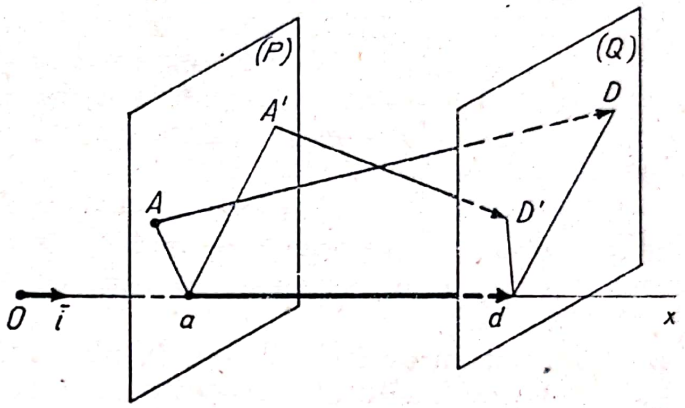


Fig. 37

De aceea, *pentru a determina în mod univoc un vector din planul a două axe rectangulare sînt necesare şi suficiente proiecţiile vectorului pe cele două axe, iar pentru un vector oarecare din spaţiu, proiecţiile lui pe cele trei axe ale triedrului tridreptunghic de referinţă.*

§ 22. Orientarea şi sensul mărimilor geometrice

a. *Orientarea dreptei.* S-a arătat că un segment de dreaptă AB (fig. 38) poate avea două orientări de la A spre B sau de la B spre A. Cei doi vectori $\overline{AB}$ şi $\overline{BA}$ nu sînt egali, deoarece nu pot fi aduşi să coincidă, oricum ar fi deplasaţi pe dreaptă, avînd sensuri opuse. Dacă pe o dreaptă se alege unul din cele două sensuri ca sens direct, de obicei sensul scrisului, cu ajutorul unui versor, dreapta devine *orientată* şi se numeşte *axă.*

Există o corespondenţă biunivocă între vectorii situaţi pe axa şi valorile lor algebrice. Această corespondenţă se extinde la toţi vectorii paraleli cu axa.

b. *Orientarea planului.* O altă mărime geometrică este *unghiul plan.* În geometrie, noţiunea de unghi este statică, cele două laturi OA şi OB (fig. 39) avînd acelaşi rol. În trigonometrie, geometrie analitică, mecanică, unghiul este privit ca generat prin rotirea unei laturi, de exemplu OB, în jurul vîrfului O al unghiului. Astfel, unghiul din

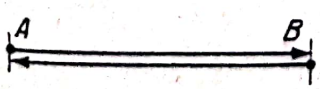


Fig. 38

figura 39 poate fi generat prin rotirea laturii OB care se desprinde de latura OA, în sensul trigonometric (anti-orar), sau prin rotirea laturii OA, care se desprinde de latura OB, în sensul orar. Primul unghi este notat și citit $\sphericalangle AOB$, iar cel de-al doilea, $\sphericalangle BOA$.

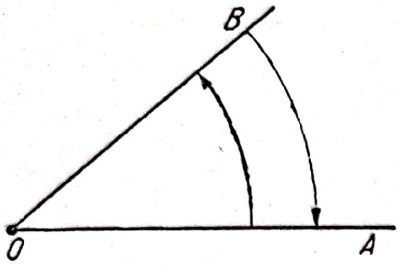


Fig. 39

Cu toate că cele două unghiuri sînt egale în mărime, ele diferă prin *orientare*. Prin convenție, unul din cele două sensuri de generare posibile, de exemplu cel *trigonometric*, este considerat *sens direct*. În acest caz, sensul orar este *sensul invers*. Unghiurilor de orientare directă le corespund *valori pozitive*, iar celor cu orientare inversă le corespund *valori negative*.

Un plan în care s-a ales un sens pentru citirea unghiurilor este un *plan orientat*.

De obicei, orientarea planului se face cu ajutorul *unghiului drept*, adică cu ajutorul unui sistem de axe rectangulare Ox, Oy. Într-un plan se pot construi numai două asemenea sisteme cu orientări diferite : Oxy și $O'x'y'$ (fig. 40).

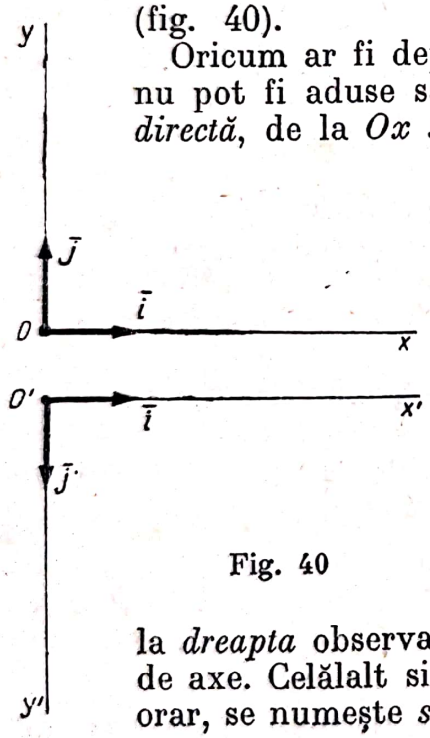


Fig. 40

Oricum ar fi deplasate, *în planul lor*, cele două sisteme de axe nu pot fi aduse să coincidă. Primul sistem Oxy, în care *rotirea directă*, de la Ox *spre* Oy, se face în sensul trigonometric, adică de la *dreapta* observatorului spre *stînga* lui, se numește un *sistem drept* de axe. Celălalt sistem $O'x'y'$, în care *rotirea directă* se face în sensul orar, se numește *sistem stîng* de axe (fig. 40).

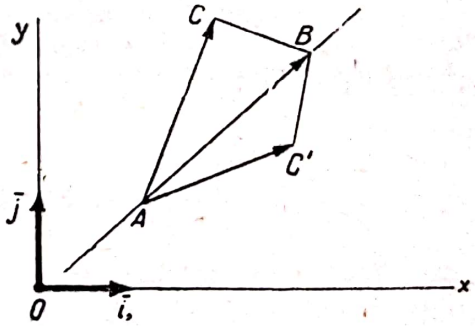


Fig. 41

În mecanică se folosește sistemul drept, în rezistența materialelor sistemul stîng.

O dată planul orientat, se stabilește o corespondență biunivocă între un unghi și valoarea sa algebrică. O arie plană poate fi și ea pusă în corespondență cu o asemenea valoare. Astfel, în triunghiul ABC, latura AB împarte planul în două regiuni (fig. 41).

Dacă se orientează latura AB prin vectorul $\overline{AB}$, toate punctele dintr-o regiune, de exemplu C, permit construcția unor unghiuri BAC, de aceeași orientare cu $\sphericalangle xOy$, iar punctele din cealaltă regiune, de exemplu punctul C',

dau cu AB unghiuri BAC', avînd orientarea inversă faţă de $\sphericalangle xOy$. În aceste condiţii, triunghiul ABC este orientat direct, iar aria lui este reprezentată printr-o valoare pozitivă, pe cînd triunghiului ABC', de orientare inversă, îi corespunde o arie negativă. Convenţia poate fi prezentată şi astfel :

Dacă un observator, care circulă în sensul citirii triunghiului (ABC) *pe laturile acestui triunghi situat într-un plan orientat, are aria triunghiului în stînga sa, această arie este pozitivă şi, invers, în cazul cînd aria s-ar afla în dreapta sa, aria triunghiului este negativă* (ABC').

Convenţia se extinde pentru orice curbă plană închisă. Astfel, semnele ariilor închise de curba în formă de opt depind de sensul în care observatorul circulă pe periferia curbei şi sînt specificate pe figura 42.

c. *Orientarea spaţiului. Unghiul diedru* (*diedrul*) este figura formată de două semiplane care se intersectează. Astfel, semiplanele I şi II (fig. 43), avînd o dreaptă comună OC, formează un unghi diedru.

Atît în geometria analitică cît şi în mecanică, cele două semiplane au roluri diferite. Semiplanul I poate fi considerat *iniţial* şi semiplanul II *final*, iar unghiul diedru poate fi privit ca generat prin rotirea, în jurul dreptei co-

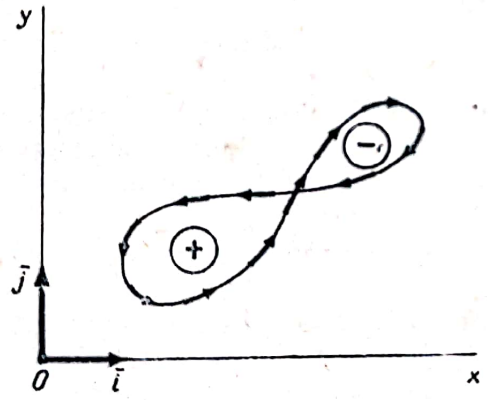


Fig. 42

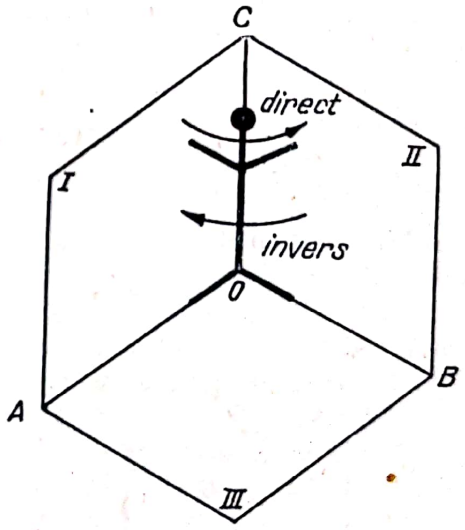


Fig. 43

mune OC, a semiplanului II care se desprinde de semiplanul I. Invers, se poate considera semiplanul II ca iniţial şi semiplanul I ca final. Se admite că cele două unghiuri diedre au orientări contrare.

Se ştie că măsura unghiului diedru este egală cu măsura unghiului plan obţinut prin intersecţia diedrului cu un plan perpendicular pe muchia diedrului.

Planul III, perpendicular pe muchia diedrului, intersectează semiplanele I şi II, respectiv după semidreptele OA şi OB.

Pentru un observator aşezat pe muchia orientată OC, astfel încît sensul direct pe OC coincide cu sensul de la picioarele spre capul observatorului (fig. 43), sensul direct al unghiului diedru (I, II) coincide cu sensul direct convenit pentru unghiul plan AOB , adică de la OA spre OB, de la *dreapta spre stînga observatorului.*

Prin introducerea semiplanului *III* se formează triedrul (*I*, *II*, *III*). Pentru fiecare din celelalte două unghiuri diedre ale triedrului se adoptă aceeași orientare ca și pentru unghiul diedru (*I*, *II*).

Astfel orientat, triedrul (*I*, *II*, *III*) se numește triedru drept.

Orientarea spațiului este determinată de orientarea unui triedru.

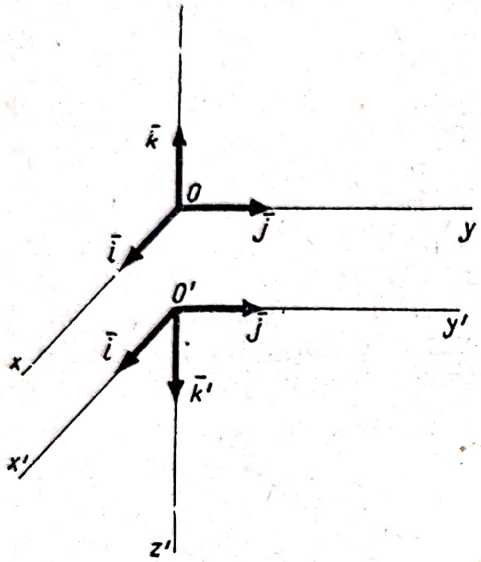


Fig. 44

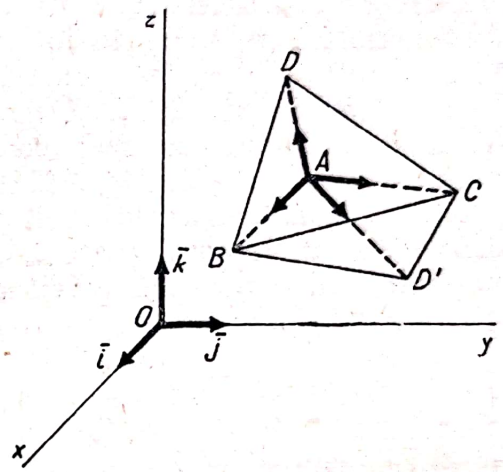


Fig. 45

Pentru simplificare se alege triedrul tridreptunghic *Oxyz* format din planele *xOy*, *yOz* și *zOx*, perpendiculare între ele două cîte două. Prin asocierea versorilor fundamentali $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$ cu semidreptele *Ox*, *Oy* și *Oz*, acestea devin axele triedrului.

În spațiu se pot construi numai două triedre tridreptunghice cu orientări diferite: *Oxyz* și *O'x'y'z'* (fig. 44).

Oricum ar fi deplasate cele două triedre, ele nu pot fi aduse să coincidă. Primul triedru, *Oxyz*, în care rotirea directă pentru un observator așezat pe oricare din axe se face de la dreapta spre stînga sa, se numește triedru drept[1]. Celălalt triedru, *O'x'y'z'*, este un triedru stîng[2].

O dată spațiul orientat, mărimile sînt susceptibile de a fi orientate, iar măsurile corespunzătoare de a avea semne.

Astfel, volumul tetraedrului *ABCD* (fig. 45) are o valoare pozitivă sau negativă, după cum orientarea tetraedrului este aceeași sau nu cu orientarea triedrului *Oxyz*, adică cu orientarea spațiului.

În primul caz, volumului tetraedrului îi corespunde o valoare pozitivă, iar în celălalt caz o valoare negativă.

De exemplu, volumul tetraedrului *ABCD* este pozitiv, iar al tetraedrului *ABCD'* (fig. 45) este negativ.

De asemenea, dacă în locul triedrului drept se alege un triedru stîng, volumul tetraedrului *ABCD* este negativ, iar al tetraedrului *ABCD'*, pozitiv.

---

[1] Folosit în geometria analitică, mecanică, electricitate, astronomie etc.

[2] Mai este încă folosit în rezistența materialelor.

În rezumat, *semnul volumului unui tetraedru este o consecință a orientării tetraedrului în raport cu orientarea triedrului fundamental.*

Observație. Mărimile determinate printr-o singură valoare algebrică având semnul independent de orientarea sistemului de referință, sînt denumite *mărimi scalare.* Mărimile determinate tot printr-o valoare algebrică, dar care își schimbă semnul o dată cu orientarea sistemului de referință, se numesc *mărimi pseudoscalare.* Exemple: aria unui triunghi *în plan*, volumul unui tetraedru etc.

§ 23. Expresia complexă a unui vector în plan

a. *Vector de poziție.* În raport cu sistemul de referință Oxy (fig. 46), poziția unui punct oarecare M este determinată prin vectorul de poziție:

$$\bar{r} = \overline{OM}.$$

Potrivit convenției de la § 20, proiecțiile vectorului pe axele Ox și Oy sînt și componentele lui, adică:

$$\bar{r} = \overline{Oa} + \overline{Ob}.$$

Dar:

$$\overline{Oa} = x\bar{i};\ \overline{Ob} = y\bar{j}$$

și deci

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} \qquad (2.5)$$

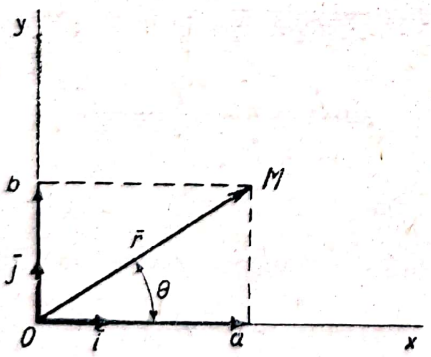


Fig. 46

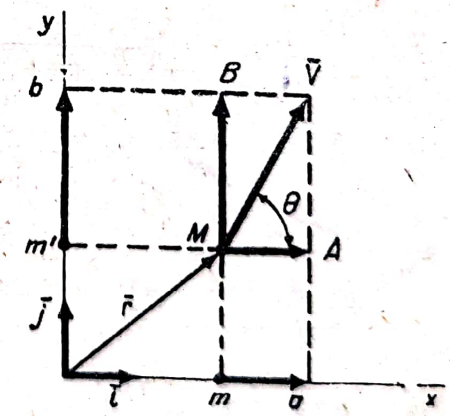


Fig. 47

este *expresia complexă* a vectorului de poziție al punctului M în raport cu axele sistemului de referință Oxy, iar x și y sînt valorile proiecțiilor vectorului pe axe și în același timp coordonatele punctului M.

b. *Vector liber.* Fiind liber, vectorul $\bar{V}$ poate fi adus cu originea în orice punct al planului, de exemplu în $M(x, y)$ (fig. 47).

Se descompune $\overline{V}$ în componente paralele cu axele Ox și Oy:

$$\overline{V} = \overline{MA} + \overline{MB}.$$

Cum $\overline{MA}$ este coliniar cu $\vec{i}$, iar $\overline{MB}$ cu $\vec{j}$:

$$\overline{MA} = X\vec{i}; \quad \overline{MB} = Y\vec{j},$$

deci:

$$\overline{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}, \tag{2.6}$$

unde X și Y sînt valorile proiecțiilor vectorului pe axele sistemului de referință sau *coordonatele vectorului liber.*

c. *Observații.* 1° Dacă vectorul $\overline{V}$ este l e g a t de punctul M, el este determinat prin patru coordonate (X, Y, x și y)

2° Dacă se cunosc caracteristicile vectorului liber (modulul $|\overline{V}|$, direcția și sensul prin valoarea unghiului θ în raport cu axa Ox), se pot calcula:

$$X = |\overline{V}| \cos\theta \text{ și } Y = |\overline{V}| \sin\theta \tag{2.7}$$

Reciproc, dacă sînt date valorile X și Y ale proiecțiilor unui vector liber pe axele Ox și Oy, se pot determina, fără ambiguitate, caracteristicile vectorului.

Din (2.7) se deduc relațiile:

$$|\overline{V}| = +\sqrt{X^2 + Y^2}\ ; \quad \cos\theta = \frac{X}{+\sqrt{X^2+Y^2}};$$

$$\sin\theta = \frac{Y}{+\sqrt{X^2+Y^2}}. \tag{2.8}$$

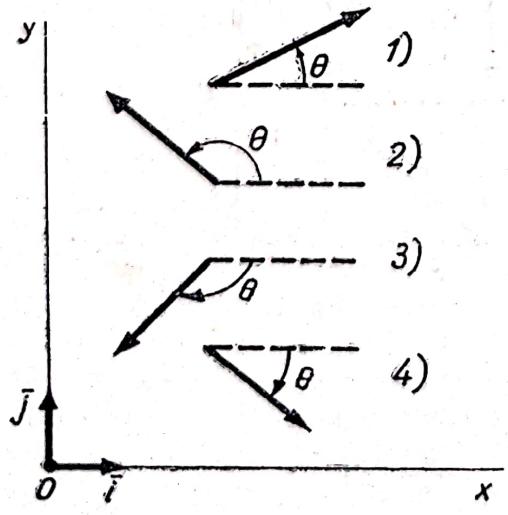


Fig. 48

3° În funcție de semnele valorilor X și Y ale proiecțiilor pe axe, sînt patru cazuri distincte pentru orientarea vectorului (fig. 48):

1)	$X > 0$	$Y > 0$
2)	$X < 0$	$Y > 0$
3)	$X < 0$	$Y < 0$
4)	$X > 0$	$Y < 0$.

4° Ca o exemplificare se poate rezolva, prin metoda analitică, aceeași problemă tratată grafic și trigonometric în § 17 și § 18.

Se alege direcţia axei Ox paralelă cu direcţia vectorului $\overline{V}_1$ (fig. 49), fără ca prin aceasta să fie particularizată problema. Teorema I a proiecţiilor permite să se scrie:

$$X_1 = |\overline{V}_1| \cos 0 = |\overline{V}_1|;$$

$$Y_1 = |\overline{V}_1| \cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$X_2 = |\overline{V}_2| \cos \theta;$$

$$Y_2 = |\overline{V}_2| \sin \theta.$$

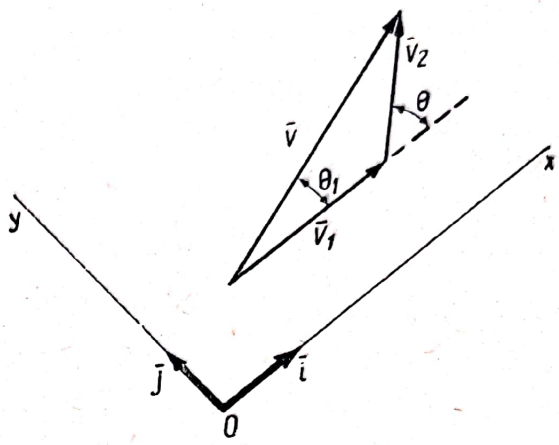


Fig. 49

Potrivit teoremei II a proiecţiilor:

$$\text{pr } \overline{V} = \text{pr } \overline{V}_1 + \text{pr } \overline{V}_2, \text{ adică:}$$

$$X = X_1 + X_2 = |\overline{V}_1| + |\overline{V}_2| \cos \theta$$

$$Y = Y_1 + Y_2 = 0 + |\overline{V}_2| \sin \theta$$

unde X şi Y sînt valorile proiecţiilor pe Ox şi Oy ale vectorului necunoscut $\overline{V}$.

Deci, caracteristicile acestui vector sînt date de:

$$|\overline{V}| = +\sqrt{X^2 + Y^2} = +\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2|\overline{V}_1||\overline{V}_2| \cos \theta};$$

$$\cos \theta_1 = \frac{X}{|\overline{V}|} = \frac{|\overline{V}_1| + |\overline{V}_2| \cos \theta}{+\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2|\overline{V}_1||\overline{V}_2| \cos \theta}};$$

$$\sin \theta_1 = \frac{Y}{|\overline{V}|} = \frac{|\overline{V}_2| \sin \theta}{+\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2|\overline{V}_1||\overline{V}_2| \cos \theta}}.$$

§ 24. Expresia complexă a unui vector liber în spaţiu

a. Se descompune vectorul $\overline{V}$ în trei componente paralele cu axele triedrului tridreptunghic drept $Oxyz$ (fig. 50):

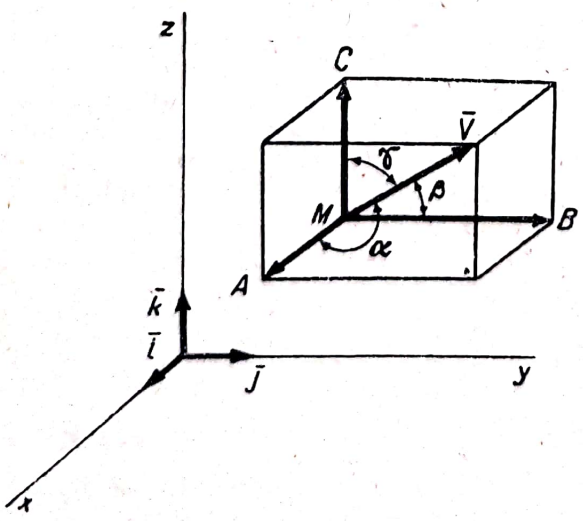


Fig. 50

$$\overline{V} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}.$$

Cum $\overline{MA}$ ste coliniar cu $\overline{i}$:

$$\overline{MA} = X\overline{i}$$

şi la fel:

$$\overline{MB} = Y\overline{j}; \quad \overline{MC} = Z\overline{k},$$

unde X, Y, Z sînt valorile proiecţiilor vectorului pe cele trei axe sau coordonatele vectorului liber. Deci:

$$\overline{V} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k} \qquad (2.9)$$

este expresia complexă a vectorului.

b. *Observații.* 1° Vectorul de poziție al punctului $M(x, y, z,)$ este:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \tag{2.10}$$

2° Un vector $\bar{V}$ l e g a t de punctul M este determinat prin șase coordonate: trei ale punctului: x, y, z și trei ale vectorului: X, Y, Z.

3° Dacă un vector liber este determinat prin modulul $|\bar{V}|$ și prin unghiurile α, β și γ cu axele Ox, Oy și Oz, se pot calcula valorile proiecțiilor vectorilor pe axe:

$$X = |\bar{V}| \cos\alpha;\ Y = |\bar{V}| \cos\beta;\ Z = |\bar{V}| \cos\gamma, \tag{2.11}$$

între α, β și γ existînd relația:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{2.12}$$

Reciproc, fiind cunoscute valorile proiecțiilor unui vector liber pe axele triedrului tridreptunghic $Oxyz$, se pot calcula în mod univoc caracteristicile vectorului.

Din (2.11) și (2.12) se obțin relațiile:

$$|\bar{V}| = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{+\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}};\qquad \cos\beta = \frac{Y}{+\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}};\qquad \cos\gamma = \frac{Z}{+\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}. \tag{2.13}$$

4° În funcție de semnele valorilor proiecțiilor pe axe X, Y și Z sînt opt cazuri distincte de orientare pentru vectorul $\bar{V}$.

c. *Aplicație.* Să se calculeze caracteristicile sumei vectorilor $\overline{SA}$, $\overline{SB}$ și $\overline{SC}$ determinați prin muchiile piramidei $SOABC$, cu baza un pătrat, cu latura a și cu înălțimea $SO = \frac{a}{3}$.

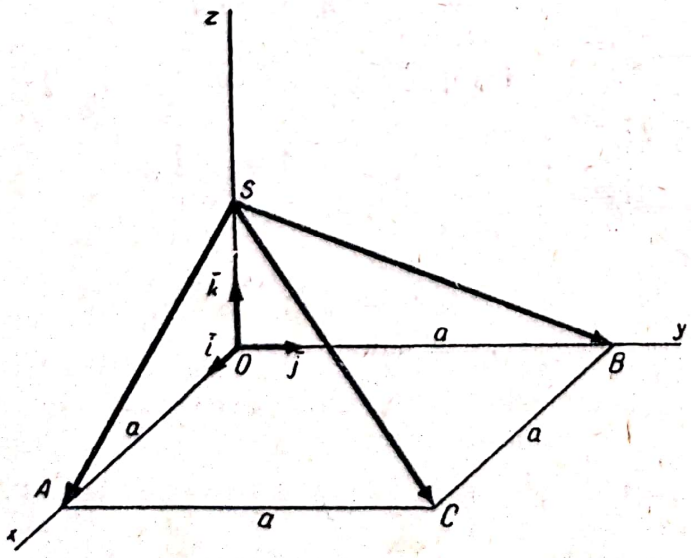


Fig. 51

Rezolvare. Prin alegerea unui triedru tridreptunghic de referință, ca în figura 51, se pot scrie expresiile complexe ale vectorilor:

$$\overline{SA} = a\bar{i} + 0\bar{j} - \frac{a}{3}\bar{k}$$

$$\overline{SB} = 0\bar{i} + a\bar{j} - \frac{a}{3}\bar{k}$$

$$\overline{SC} = a\bar{i} + a\bar{j} - \frac{a}{3}\bar{k}.$$

Prin însumare se obține expresia complexă:

$$\bar{V} = 2a\bar{i} + 2a\bar{j} - a\bar{k}.$$

Deci :

$$|\bar{V}| = +\sqrt{(2a)^2 + (2a)^2 + a^2} = +3a$$

şi :

$$\cos\alpha = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}; \quad \cos\beta = \frac{2}{3}; \quad \cos\gamma = -\frac{1}{3}$$

sînt caracteristicile vectorului sumă.

C.3.

E. METODA VECTORIALĂ ŞI RELAŢIILE CU METODA CARTEZIANĂ

§ 25. Produsul scalar (intern) a doi vectori

a. *Definiţie.* Produsul scalar sau intern a doi vectori liberi este un *scalar*, egal cu produsul modulelor celor doi vectori prin cosinusul unghiului dintre ei (fig. 52) :

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\theta. \qquad (2.14)$$

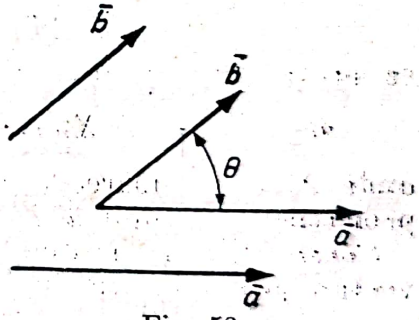


Fig. 52

Observaţie. Semnul produsului scalar este dat de $\cos\theta$. Dacă unghiul θ este ascuţit $\left(\theta \text{ cuprins între } 0 \text{ şi } \frac{\pi}{2}\right)$, produsul scalar este pozitiv, iar dacă unghiul este obtuz $\left(\text{cuprins între } \frac{\pi}{2} \text{ şi } \pi\right)$, produsul scalar este negativ.

b. *Proprietăţile produsului scalar*[1].

1° Produsul scalar este nul dacă :
— oricare din vectori este nul;
— vectorii sînt ortogonali între ei $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$.

2° Produsul scalar a doi vectori e g a l i este egal cu pătratul modulului lor :

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|\,|\bar{a}|\cos 0 = a^2.$$

[1] Alte notaţii pentru produsul scalar sînt : $\bar{a} \times \bar{b}$; $(\bar{a}\ \bar{b})$; $\bar{a}\ \bar{b}$. În acest manual se foloseşte notaţia $\bar{a} \cdot \bar{b}$ sau $\bar{a}\bar{b}$.

3° Produsul scalar este *comutativ* (fig. 53), adică:

$$\bar{b}\,\bar{a} = |\bar{b}|\,|\bar{a}|\cos\theta = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\theta = \bar{a}\bar{b}.$$

4° Produsul scalar este *asociativ* în raport cu operaţia de amplificare cu un scalar, adică:

$$m(\bar{a}\bar{b}) = (m\bar{a})\bar{b} = \bar{a}(m\bar{b}).\ ^{1}$$

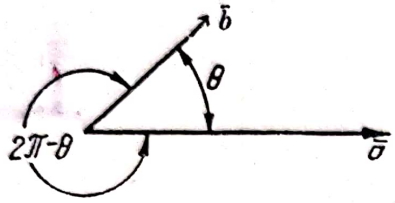


Fig. 53

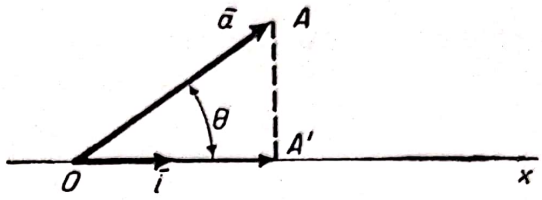


Fig. 54

5° Produsul scalar al unui vector prin versorul unei axe este egal cu valoarea proiecţiei vectorului pe axa respectivă (fig. 54), adică:

$$\bar{a}\bar{i} = \bar{i}\bar{a} = |\bar{i}|\,|\bar{a}|\cos\theta = |\bar{a}|\cos\theta = X.$$

6° Produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul dintre valoarea poiecţiei unui vector pe axa celuilalt vector prin valoarea acestuia. În adevăr, dacă $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sînt cei doi vectori de pe axele Ox şi Ou (fig. 55), iar X, respectiv Y, valorile lor în raport cu propriile lor axe, adică:

$$\overline{OA} = \bar{a} = X\bar{i};\ \overline{OB} = \bar{b} = Y\bar{u},$$

se poate exprima produsul scalar $\bar{a}\bar{b}$ în două feluri:

$$\bar{a}\bar{b} = (X\bar{i})\bar{b} = X(\bar{b}\bar{i}) = XX' \quad \text{sau} \quad \bar{a}\bar{b} = \bar{a}(Y\bar{u}) = (\bar{a}\bar{u})Y = Y'Y,$$

unde X' este valoarea proiecţiei vectorului $\bar{b}$ pe axa Ox iar Y' este valoarea proiecţiei vectorului $\bar{a}$ pe axa Ou. Deci: $\bar{a}\bar{b} = XX' = YY'$.

Consecinţă. În produsul scalar a doi vectori se poate înlocui unul din vectori prin proiecţia lui pe direcţia celuilalt (fig. 55), adică:

$$\bar{a}\cdot pr_{Ox}\,\bar{b} = \bar{a}\,\overline{OB'} = (X\bar{i})\ (X'\bar{i}) = XX'$$

$$\bar{b}\cdot pr_{Ou}\,\bar{a} = \bar{b}\,\overline{OA'} = (Y\bar{u})\ (Y'\bar{u}) = YY'. \qquad \text{c.c.t.d.}$$

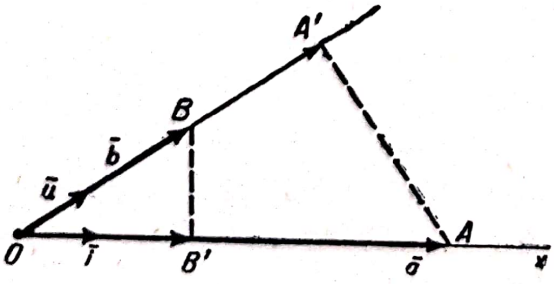


Fig. 55

7° Produsul scalar este *distributiv* în raport cu operaţia însumării vectoriale:

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{a}(\bar{b}_1 + \bar{b}_2) = \bar{a}\bar{b}_1 + \bar{a}\bar{b}_2, \quad (2.15)$$

adică operaţia de desfacere a parantezei se poate face ca în algebră[2].

[1] Demonstraţiile se găsesc în lucrările citate la bibliografie.
[2] Demonstraţia se găseşte în lucrările citate la bibliografie.

Proprietatea se poate extinde. Fiecare factor al produsului scalar poate fi compus dintr-un număr oarecare (finit) de termeni, de exemplu:

$$(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3)(\bar{b}_1 + \bar{b}_2) = \bar{a}_1(\bar{b}_1 + \bar{b}_2) + \bar{a}_2(\bar{b}_1 + \bar{b}_2) + \bar{a}_3(\bar{b}_1 + \bar{b}_2) =$$
$$= \bar{a}_1\bar{b}_1 + \bar{a}_1\bar{b}_2 + \bar{a}_2\bar{b}_1 + \bar{a}_2\bar{b}_2 + \bar{a}_3\bar{b}_1 + \bar{a}_3\bar{b}_2.$$

c. *Aplicații.* Se vor folosi proprietățile produsului scalar pentru rezolvarea problemei tratate prin alte metode în §§ 17, 18 și 23.

Necunoscute sînt caracteristicile vectorului sumă (fig. 56):

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2,$$

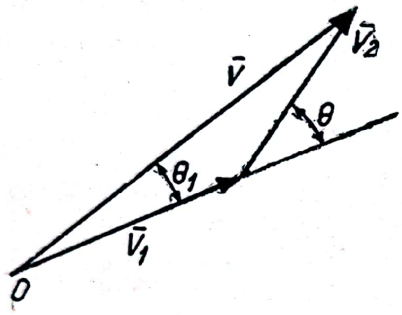


Fig. 56

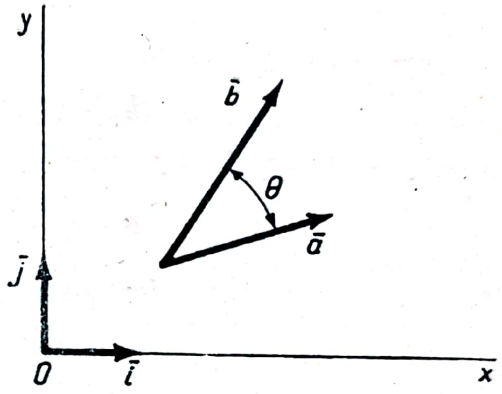


Fig. 57

Folosind proprietățile produsului scalar:

$$\bar{V}\bar{V} = V^2 = (\bar{V}_1 + \bar{V}_2)(\bar{V}_1 + \bar{V}_2) = \bar{V}_1^2 + 2\bar{V}_1\bar{V}_2 + \bar{V}_2^2$$
$$V^2 = V_1^2 + 2|\bar{V}_1||\bar{V}_2|\cos\theta + V_2^2,$$

apoi:

$$\bar{V}_1 \cdot \bar{V} = \bar{V}_1 \cdot (\bar{V}_1 + \bar{V}_2)$$
$$|\bar{V}_1||\bar{V}|\cos\theta_1 = V_1^2 + \bar{V}_1\bar{V}_2 = V_1^2 + |\bar{V}_1||\bar{V}_2|\cos\theta,$$

se găsesc:

$$V = +\sqrt{V_1^2 + 2|\bar{V}_1||\bar{V}_2|\cos\theta + V_2^2}$$

și

$$\cos\theta_1 = \frac{|\bar{V}_1| + |\bar{V}_2|\cos\theta}{+\sqrt{V_1^2 + 2|\bar{V}_1||\bar{V}_2|\cos\theta + V_2^2}},$$

caracteristicile necunoscute.

d. *Expresii analitice.* În mecanică, pe lîngă expresiile vectoriale, se folosesc și expresiile analitice în raport cu sisteme de referință carteziene ortogonale. În cele ce urmează se calculează asemenea expresii în legătură cu produsul scalar.

1° *În plan.* Se consideră vectorii liberi $\bar{a}$ și $\bar{b}$ (fig. 57), determinați în raport cu sistemul de axe Ox, Oy prin coordonatele lor X, Y, respectiv X', Y'.

Se scriu expresiile complexe:

$$\bar{a} = X\bar{i} + Yj$$
$$\bar{b} = X'\bar{i} + Y'j.$$

Produsul scalar al lor, aplicînd relaţia (2.15), devine:

$$\bar{a}\bar{b} = (X\bar{i} + Yj)(X'\bar{i} + Y'j) = XX'\bar{i}^2 + XY'\bar{i}j + YX'j\bar{i} + YY'j^2;$$

deoarece:

$$\bar{i}^2 = +1 \qquad \bar{i}j = 0 \qquad j\bar{i} = 0 \qquad j^2 = +1$$

rezultă:

$$\bar{a}\bar{b} = XX' + YY'. \tag{2.16}$$

Consecinţe. α) Dacă $\bar{b} = \bar{a}$,

$$a^2 = X^2 + Y^2. \tag{2.17}$$

β) Dacă direcţiile vectorilor sînt ortogonale între ele:

$$\bar{a}\bar{b} = 0,$$

adică:

$$XX' + YY' = 0 \tag{2.18}$$

reprezintă condiţia analitică de ortogonalitate a doi vectori.

2° *În spaţiu.* Se notează cu X, Y, Z, respectiv X', Y', Z', coordonatele vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ în raport cu triedrul tridreptunghic $Oxyz$. Folosind proprietăţile produsului scalar:

$$\bar{a}\bar{b} = (X\bar{i} + Yj + Z\bar{k})(X'\bar{i} + Y'j + Z'\bar{k}) = XX'\bar{i}^2 + XY'\bar{i}j + XZ'\bar{i}\bar{k} + YX'j\bar{i} + YY'j^2 + YZ'j\bar{k} + ZX'\bar{k}\bar{i} + ZY'\bar{k}j + ZZ'\bar{k}^2,$$

deoarece:

$$\bar{i}^2 = 1; \quad j^2 = 1; \quad \bar{k}^2 = 1; \quad \bar{i}j = j\bar{i} = 0; \quad j\bar{k} = \bar{k}j = 0; \quad \bar{k}\bar{i} = \bar{i}\bar{k} = 0,$$

se găseşte:

$$\bar{a}\bar{b} = XX' + YY' + ZZ'. \tag{2.19}$$

Observaţii şi consecinţe. α) Dacă $\bar{b} = \bar{a}$

$$a^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \tag{2.20}$$

β) Condiţia de ortogonalitate este:

$$XX' + YY' + ZZ' = 0. \tag{2.21}$$

γ) Dacă se schimbă sistemul de referinţă păstrînd condiţia ca noul triedru să fie obţinut din cel vechi prin rotaţie şi translaţie, se obţin alte proiecţii şi, se înţelege, alte coordonate pentru vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$. Dacă sînt notate

Scanned with OKEN Scanner

cu X_1, Y_1, Z_1 și X'_1, Y'_1, Z'_1 și se calculează expresiile: $\bar{a}^2$, $\bar{b}^2$ și $\bar{a}\bar{b}$, în raport cu ambele sisteme de referință, se găsește:

$$a^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2;$$
$$b^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = X'^2_1 + Y'^2_1 + Z'^2_1$$

și

$$\bar{a}\bar{b} = XX' + YY' + ZZ' = X_1X'_1 + Y_1Y'_1 + Z_1Z'_1,$$

ceea ce arată că expresiile $X^2 + Y^2 + Z^2$ și $XX' + YY' + ZZ'$ sînt *invarianți* în raport cu schimbarea triedrelor prin translații și rotații.

δ) De asemenea, se dovedește că aceste expresii nu se modifică dacă se schimbă orientarea triedrelor.

e. *Aplicații.* 1° Dacă unghiul dintre versorii $\bar{u}$ și $\bar{v}$ este $\frac{\pi}{3}$, să se calculeze unghiul format între vectorii:

$$\bar{a} = \bar{u} - (2 - \sqrt{3})\,\bar{v}, \quad \bar{b} = (\sqrt{3} - 2)\,\bar{u} + \bar{v}.$$

Răspuns: $\frac{\pi}{2}$.

2° Unghiul dintre versorii $\bar{u}$ și $\bar{v}$ este θ; să se calculeze unghiul dintre vectorii:

$$\bar{a} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{v}, \quad \bar{b} = \beta\bar{u} + \alpha\bar{v};$$

α și β sînt scalari arbitrari.

$$\textit{Răspuns:}\ \cos\varphi = \frac{2\alpha\beta + (\alpha^2 + \beta^2)\cos\theta}{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta}.$$

3° Să se arate că într-un paralelogram suma pătratelor diagonalelor este egală cu suma pătratelor laturilor (fig. 58).

Rezolvare. Se observă că:

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} \quad \text{și} \quad \bar{d} = \bar{b} - \bar{a}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{b} \qquad d^2 = b^2 + a^2 - 2\bar{a}\cdot\bar{b},$$

deci:

$$c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2).\ \text{c.c.t.d.}$$

4° Să se demonstreze că înălțimile unui triunghi oarecare sînt concurente.

Rezolvare. Se consideră înălțimile AA' și BB' care se întîlnesc în H (fig. 59), cărora li se asociază vectorii $\overline{HA}$ și $\overline{HB}$. Evident:

$$\bar{a}\,\overline{HA} = 0 \quad \text{și} \quad \bar{b}\overline{HB} = 0$$

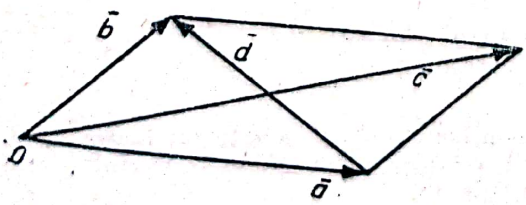


Fig. 58

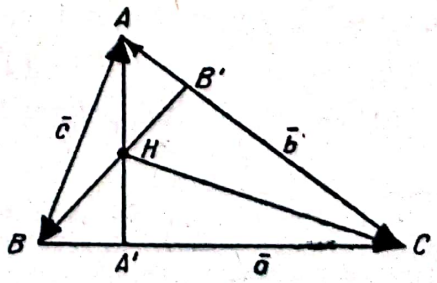


Fig. 59

și trebuie dovedit că și

$$\bar{c}\overline{HC} = 0,$$

unde $\bar{a}$, $\bar{b}$ și $\bar{c}$ sînt vectorii determinați de laturile triunghiului ABC.

Se observă că:

$$\overline{HA} + \bar{c} = \overline{HB}; \quad \overline{HB} + \bar{a} = \overline{HC}; \quad \overline{HC} + \bar{b} = \overline{HA}.$$

Înmulțind scalar relația a II-a cu $\overline{HA}$ și relația a III-a cu $\overline{HB}$ și ținînd seamă de condițiile de ortogonalitate dintre AA' și BC, respectiv dintre BB' și CA, rezultă:

$$\overline{HA} \cdot \overline{HB} = \overline{HA} \cdot \overline{HC} \qquad \overline{HB} \cdot \overline{HC} = \overline{HA} \cdot \overline{HB},$$

de unde:

$$\overline{HA} \cdot \overline{HC} = \overline{HB} \cdot \overline{HC}$$

sau

$$\overline{HC}\,(\overline{HB} - \overline{HA}) = 0$$

și în fine:

$$\overline{HC}\,\bar{c} = 0. \quad \text{c.c.t.d.}$$

§ 26. Produsul vectorial (extern) a doi vectori

a. *Definiție.* Produsul vectorial sau extern a doi vectori liberi $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este un *vector liber*[1] $\bar{p}$, cu următoarele caracteristici:

— *direcția*, perpendiculară pe fiecare din vectori, deci pe un plan determinat de doi vectori echipolenți $\bar{a}$ și $\bar{b}$ cu originea într-un punct O (fig. 60);

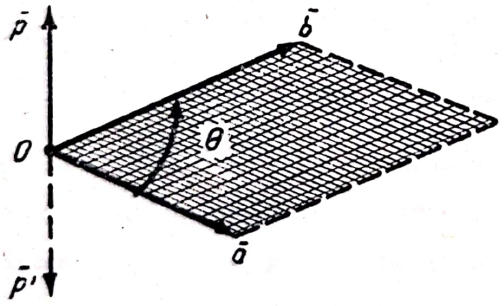


Fig. 60

— *sensul*, astfel încît rotația, corespunzătoare unghiului dintre cei doi vectori, care ar aduce primul vector $\bar{a}$ al produsului peste cel de-al doilea vector $\bar{b}$, trebuie să apară ca o *rotație directă* pentru un observator așezat astfel pe vectorul produs $\bar{p}$, încît sensul acestuia să coincidă cu sensul de la picioarele spre capul observatorului, sau, mai simplu, astfel încît vectorii, $\bar{a}$, $\bar{b}$, și $\bar{p}$ să formeze un triedru cu aceeași orientare cu triedrul fundamental;

— *modulul*, egal cu produsul dintre modulele celor doi vectori și sinusul unghiului dintre cei doi vectori:

$$|\bar{p}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \sin\theta. \tag{2.22}$$

Notația[2] folosită pentru produsul vectorial este:

$$\bar{p} = \bar{a} \times \bar{b}.$$

[1] Dacă vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt vectori *polari*, produsul lor vectorial $\bar{p}$ este un *vector axial*. Vectorii axiali reprezintă alte mărimi fizice decît vectorii polari și, în consecință, egalarea sau adunarea lor cu vectorii polari este lipsită de sens.

[2] Alte notații: $\bar{p} = \bar{a} \wedge \bar{b}$ sau $\bar{p} = [\bar{a}\ \bar{b}]$.

b. *Proprietăţile produsului vectorial.* 1° Produsul vectorial este nul dacă:
— oricare din vectori este nul sau
— vectorii sînt coliniari ($\theta = 0$ sau $\theta = \pi$).
2° Produsul vectorial a doi vectori e g a l i este nul:

$$\bar{a} \times \bar{a} = 0.$$

3° Produsul vectorial este *anticomutativ*, adică:

$$\bar{p}' = \bar{b} \times \bar{a} = -\bar{a} \times \bar{b},$$

deoarece, pentru ca vectorii $\bar{b}$, $\bar{a}$ şi $\bar{p}'$ să formeze un triedru la fel orientat cu triedrul fundamental, trebuie ca $\bar{p}'$ să fie opus lui $\bar{p}$ (fig. 60).
4° Produsul vectorial este *asociativ* în raport cu operaţia de amplificare cu un scalar:

$$m(\bar{a} \times \bar{b}) = (m\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (m\bar{b}).^1$$

5° În produsul vectorial, oricare din cei doi vectori poate fi înlocuit prin proiecţia lui pe un plan perpendicular pe celălalt vector.
Se consideră vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, planul (H) pe care-l determină şi planul (V) perpendicular în O pe $\bar{a}$. Dacă Ox este intersecţia celor două plane şi $\bar{b}_1$ este proiecţia lui $\bar{b}$ pe planul (V) (fig. 61), iar:

$$\bar{p} = \bar{a} \times \bar{b}, \quad \bar{p}_1 = \bar{a} \times \bar{b}_1,$$

trebuie demonstrat că:

$$\bar{p} = \bar{p}_1.$$

Se observă că direcţia lui $\bar{p}_1$, fiind perpendiculară pe planul $\bar{a}$, $\bar{b}_1$, adică pe planul (H), coincide cu direcţia lui $\bar{p}$; apoi sensul lui $\bar{p}_1$, coincide cu cel al lui $\bar{p}$, deoarece triedrul $\bar{a}$, $\bar{b}_1$, $\bar{p}_1$ are aceeaşi orientare cu triedrul $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{p}$ şi în fine:

$$|\bar{p}_1| = |\bar{a}|\,|\bar{b}_1| \sin\frac{\pi}{2} =$$

$$= |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$$

$$= |\bar{a}|\,|b| \sin\theta = |\bar{p}|. \qquad \text{c.c.t.d.}$$

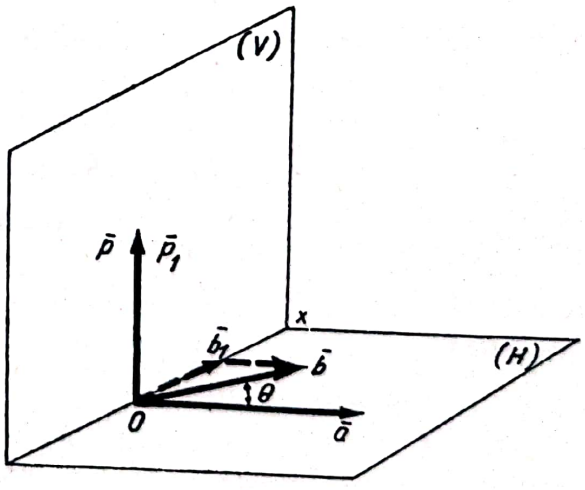


Fig. 61

6° Produsul vectorial a doi vectori este *distributiv* în raport cu operaţia însumării vectoriale:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times (\bar{b}_1 + \bar{b}_2) =$$
$$= \bar{a} \times \bar{b}_1 + \bar{a} \times \bar{b}_2, \quad (2.23)$$

adică operaţia de desfacere a parantezei se poate face ca în algebră,

[1] Pentru demonstraţie vezi bibliografia.

avînd însă grija ca să nu se interverteasca ordinea factorilor din produsele vectoriale parţiale, deoarece aceste produse sînt anticomutative.

Demonstraţie. Se construieşte planul $(\bar{a}, \bar{b}_1)$, apoi în O planul (V), perpendicular pe $\bar{a}$ (fig. 62). Se notează cu $\bar{b}'_1$ proiecţia lui $\bar{b}_1$, cu $\bar{b}'_2$ proiecţia lui $\bar{b}_2$ şi cu $\bar{b}'$ proiecţia lui $\bar{b}$, pe planul (V).

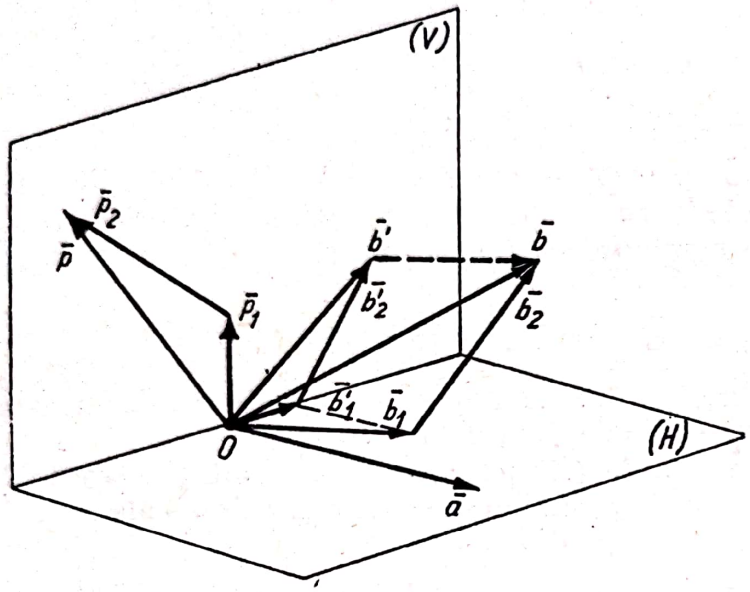


Fig. 62

Proiecţia triunghiului format cu vectorii:

$$\bar{b}_1 + \bar{b}_2 = \bar{b}$$

este un triunghi format cu proiecţiile, adică cu vectorii:

$$\bar{b}'_1 + \bar{b}'_2 = \bar{b}'.$$

Dar:

$$\bar{p}_1 = \bar{a} \times \bar{b}_1 = \bar{a} \times \bar{b}'_1$$

$$\bar{p}_2 = \bar{a} \times \bar{b}_2 = \bar{a} \times \bar{b}'_2$$

$$\bar{p} = \bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times \bar{b}'$$

deoarece, potrivit proprietăţii 5°, se pot înlocui, în produsele vectoriale, $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ şi $\bar{b}$ prin proiecţiile lor $\bar{b}'_1$, $\bar{b}'_2$ şi $\bar{b}'$ pe planul (V)

Cum $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ şi $\bar{p}$ sînt trei vectori situaţi în planul (V), iar $\bar{p}_1$ este perpendicular pe $\bar{b}'_1$ şi are modulul:

$$|\bar{p}_1| = |\bar{a}|\,|\bar{b}'_1|,$$

de asemenea, $\bar{p}_2$ este perpendicular pe $\bar{b}'_2$ şi are modulul:

$$|\bar{p}_2| = |\bar{a}|\,|\bar{b}'_2|,$$

iar $\bar{p}$ este perpendicular pe $\bar{b}'$ şi are modulul:

$$|\bar{p}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}'|,$$

rezultă că vectorii $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ şi $\bar{p}$ formează un triunghi. În adevăr, dacă se amplifică vectorii $\bar{b}'_1$, $\bar{b}'_2$ şi $\bar{b}'$ cu $|\bar{a}|$ şi se roteşte triunghiul lor de $\sphericalangle\frac{\pi}{2}$ în planul (V) în jurul punctului O, în sens trigonometric, se obţine un triunghi format cu vectorii $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ şi $\bar{p}$. În consecinţă:

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p},$$

deci:

$$\bar{a} \times \bar{b}_1 + \bar{a} \times \bar{b}_2 = \bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times (\bar{b}_1 + \bar{b}_2). \quad \text{c.c.t.d.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Proprietatea se poate extinde la un număr oarecare finit de factori și la un număr oarecare finit de termeni pentru fiecare factor.

c. *Observații.* 1° Dacă toți vectorii sînt coplanari, de exemplu în suma:

$$\bar{b} = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3,$$

$\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$ sînt paraleli cu planul (H) (fig. 63) și se consideră produsul:

$\bar{p} = \bar{a} \times \bar{b}$, unde $\bar{a}$ este și el un vector paralel cu planul (H), adică:

$$\bar{p} = \bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times (\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3) = \bar{a} \times \bar{b}_1 + \bar{a} \times \bar{b}_2 + \bar{a} \times \bar{b}_3 = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3,$$

se constată că $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{p}_3$, deci și $\bar{p}$, sînt vectori coliniari, astfel că, în cazul unor vectori coplanari, produsul vectorial duce la relații cu vectori coliniari și, ca urmare, aceste relații se pot transforma ușor în relații scalare.

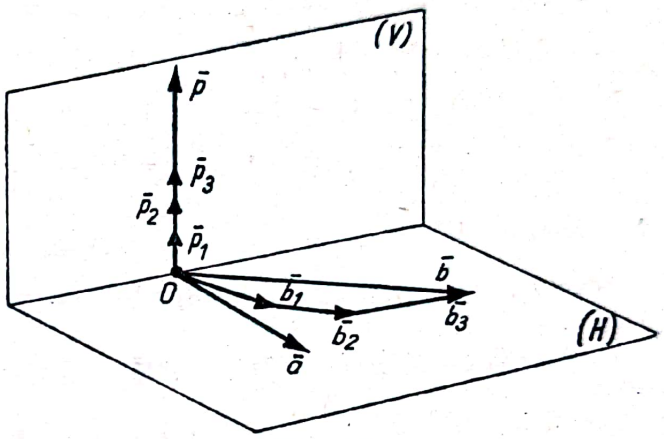


Fig. 63

2° Dacă vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ (fig. 60) reprezintă segmente de dreaptă orientate, modulul produsului vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$ reprezintă aria paralelogramului construit cu cei doi vectori.

d. *Aplicație.* Problema care a fost rezolvată prin metoda grafică (§ 17), prin calcul trigonometric (§ 18), prin metoda analitică (§ 23) sau aplicînd produsul scalar (§ 25) se poate rezolva folosind observația 1° de la proprietățile produsului vectorial.

Se cunosc $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$, necunoscute sînt caracteristicile sumei:

$$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2.$$

Vectorii liberi $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$ sînt aduși într-un plan (fig. 64). Înmulțind relația precedentă, vectorial, cu $\overline{V}_1$, rezultă:

$$\overline{V}_1 \times \overline{V} = \overline{V}_1 \times (\overline{V}_1 + \overline{V}_2)$$

$$\overline{V}_1 \times \overline{V} = \overline{V}_1 \times \overline{V}_2.$$

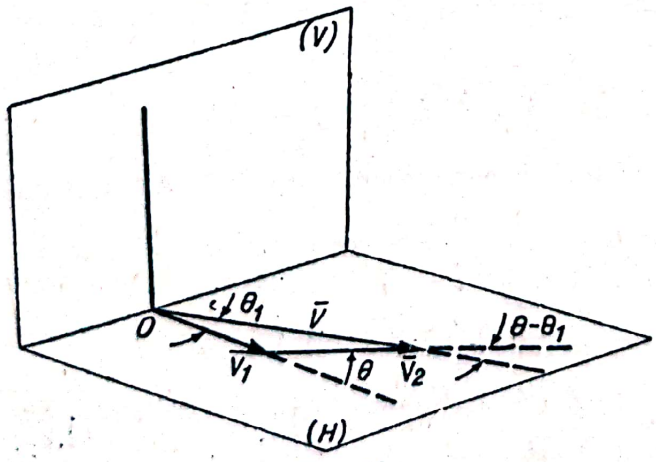


Fig. 64

Vectorii rezultați sînt coliniari, avînd direcția perpendiculară pe plan, deci:

$$|\overline{V}_1|\,|\overline{V}|\sin\theta_1 = |\overline{V}_1|\,|\overline{V}_2|\sin\theta$$

$$|\overline{V}| = \frac{|\overline{V}_2|\sin\theta}{\sin\theta_1}.$$

Înmulțind aceeași relație, vectorial, cu $\overline{V}_2$, rezultă:

$$\overline{V} \times \overline{V}_2 = (\overline{V}_1 + \overline{V}_2) \times \overline{V}_2$$

sau :

$$\overline{V} \times \overline{V}_2 = \overline{V}_1 \times \overline{V}_2.$$

Exprimînd egalitatea modulelor, adică :

$$|\overline{V}|\,|\overline{V}_2| \sin(\theta - \theta_1) = |\overline{V}_1|\,|\overline{V}_2| \sin\theta,$$

se obţine :

$$|\overline{V}| = \frac{|\overline{V}_1| \sin\theta}{\sin(\theta - \theta_1)}.$$

Cele două rezultate găsite permit calcularea caracteristicilor necunoscute.

e. *Expresii analitice.*

1° *În plan.* Fie :

$$\bar{a} = X\bar{i} + Y\bar{j} \quad \text{şi} \quad \bar{b} = X'\bar{i} + Y'\bar{j}$$

doi vectori liberi raportaţi la sistemul de axe Oxy (fig. 57).

Potrivit proprietăţilor produsului vectorial se poate scrie succesiv :

$$\bar{a} \times \bar{b} = (X\bar{i} + Y\bar{j}) \times (X'\bar{i} + Y'\bar{j}) = XX'\bar{i} \times \bar{i} + XY'\bar{i} \times \bar{j} + YX'\bar{j} \times \bar{i} + YY'\bar{j} \times \bar{j};$$

cum :

$$\bar{i} \times \bar{i} = 0, \quad \bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{j} = 0,$$

rezultă :

$$\bar{a} \times \bar{b} = (XY' - YX')\bar{k} = \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix} \bar{k}, \tag{2.24}$$

unde $\bar{k}$ este versorul direcţiei perpendiculare pe planul Oxy.

2°. *În spaţiu*. Dacă :

$$\bar{a} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k} \quad \text{şi} \quad \bar{b} = X'\bar{i} + Y'\bar{j} + Z'\bar{k}$$

sînt expresiile complexe ale celor doi vectori liberi raportaţi la triedrul $Oxyz$, se scrie :

$$\bar{a} \times \bar{b} = (X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}) \times (X'\bar{i} + Y'\bar{j} \times Z'\bar{k}) =$$
$$(YZ' - ZY')\bar{i} + (ZX' - XZ')\bar{j} + (XY' - YX')\bar{k} =$$
$$= \begin{vmatrix} Y & Z \\ Y' & Z' \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} Z & X \\ Z' & X' \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix} \bar{k}, \tag{2.25}$$

deoarece :

$$\bar{i} \times \bar{i} = 0,\ \bar{j} \times \bar{j} = 0,\ \bar{k} \times \bar{k} = 0,\ \bar{i} \times \bar{j} = -\bar{j} \times \bar{i} = \bar{k},$$

$$\bar{j} \times \bar{k} = -\bar{k} \times \bar{j} = \bar{i};\ \bar{k} \times \bar{i} = -\bar{i} \times \bar{k} = \bar{j}.$$

Expresia complexă a produsului vectorial se poate prezenta sub forma unui determinant simbolic :

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix}, \tag{2.26}$$

unde determinanţii minori corespunzători termenilor primei linii sînt valorile proiecţiilor produsului $\bar{a} \times \bar{b}$ pe axele respective ale triedrului.

De asemenea :

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = +\sqrt{(YZ' - ZY')^2 + (ZX' - XZ')^2 + (XY' - YX')^2}. \tag{2.27}$$

Observaţie. Se regăsesc condiţiile de paralelism, cunoscute din geometria analitică, scriind că :

$$\bar{a} \times \bar{b} = 0,$$

adică :

$$\begin{vmatrix} Y & Z \\ Y' & Z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z & X \\ Z' & X' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix} = 0$$

sau :

$$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'}. \tag{2.28}$$

Aceste relaţii se pot obţine mai simplu scriind condiţia de coliniaritate a vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$:

$$\bar{a} + \lambda\bar{b} = 0$$

sau :

$$X + \lambda X' = 0 \quad Y + \lambda Y' + 0 \quad Z + \lambda Z' = 0 \text{ etc.}$$

1. ***Aplicaţii.*** **1° Să se demonstreze că unghiul a doi vectori liberi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ este dat şi de relaţia :**

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{\bar{a} \cdot \bar{b}}. \tag{2.29}$$

2° Să se deducă vectorial formula cunoscută :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Rezolvare. Se consideră în planul axelor rectangulare Oxy doi versori $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ formînd cu axa Ox unghiurile $-\alpha$ şi β (fig. 65), adică :

$$\bar{u} = \bar{i}\cos\alpha - \bar{j}\sin\alpha$$

$$\bar{v} = \bar{i}\cos\beta + \bar{j}\sin\beta.$$

Deoarece :

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = 1 \cdot 1 \cdot \sin(\alpha + \beta),$$

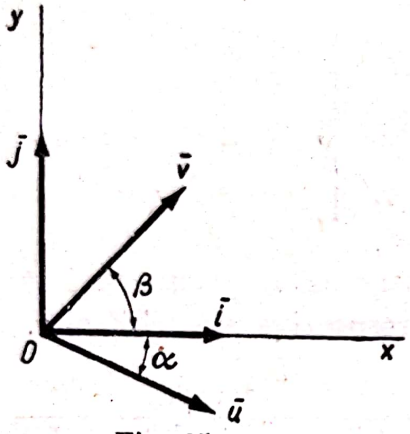


Fig. 65

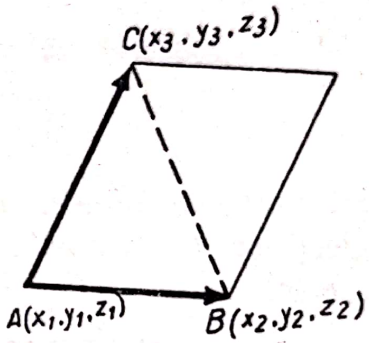


Fig. 66

iar :

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \end{vmatrix} = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\,\bar{k},$$

din comparaţia modulelor rezultă formula.

3° După demonstrarea identităţii :

$$(\bar{a} \times \bar{b})^2 + (\bar{a}\,\bar{b})^2 \equiv a^2 b^2.$$

să se stabilească identitatea lui Lagrange :

$$(XY' - YX')^2 + (YZ' - ZY')^2 + (ZX' - XZ')^2 + (XX' + YY' + ZZ')^2 \equiv (X^2 + Y^2 + Z^2)(X'^2 + Y'^2 + Z'^2).$$

Rezolvare. Se observă că :

$$(\bar{a} \times \bar{b})^2 = a^2 b^2 \sin^2\theta \text{ şi } (\bar{a}\,\bar{b})^2 = a^2 b^2 \cos^2\theta,$$

apoi se folosesc expresiile complexe :

$$\bar{a} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$$

$$\bar{b} = X'\bar{i} + Y'\bar{j} + Z'\bar{k}.$$

4° Să se calculeze, folosind expresiile complexe ale vectorilor, aria triunghiului ABC ale cărui vîrfuri au, faţă de triedrul $Oxyz$, coordonatele : $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ şi $C(x_3, y_3, z_3)$ (fig. 66).

Rezolvare. Se notează:

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1,$$

$$X' = x_3 - x_1, \quad Y' = y_3 - y_1, \quad Z' = z_3 - z_1,$$

iar:

$$\text{aria } ABC = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(YZ' - ZY')^2 + (ZX' - XZ')^2 + (XY' - YX')^2}.$$

§ 27. Produsul mixt a trei vectori

Produsele în care intră un număr mai mare de vectori se studiază ca operații combinate ale celor două produse (scalar și vectorial) definite la §§ 25 și 26. Astfel, în cazul a trei vectori liberi $\bar{a}$, $\bar{b}$ și $\bar{c}$ se vor calcula ca simple aplicații:

— produsul mixt de forma $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$;

— dublul produs vectorial de forma $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$.

a. *Proprietățile produsului mixt.* 1° Produsul mixt a trei vectori liberi $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ se obține multiplicînd scalar produsul vectorial a doi vectori, cu cel de-al treilea vector:

$$(\bar{a} \times \bar{b})\,\bar{c} = \bar{p}\,\bar{c}.$$

Produsul mixt se anulează dacă:

— oricare din vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ este nul sau

— doi din vectori sînt coliniari sau

— toți vectorii sînt coplanari ($\bar{p} \perp \bar{c}$).

Se observă că ultimul caz cuprinde și pe celelalte.

2° Dacă cei trei vectori reprezintă segmente de dreaptă orientate, produsul mixt al lor este chiar volumul paralelipipedului construit cu ajutorul celor trei vectori (fig. 67).

Astfel, aducînd vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ cu originile în același punct O al spațiului, se observă că:

$$\bar{p} = \bar{a} \times \bar{b}$$

are ca modul aria paralelogramului construit pe $\bar{a}$ și $\bar{b}$. În produsul scalar:

$$\bar{p}\,\bar{c} = \bar{p}\,\bar{c}'$$

s-a înlocuit $\bar{c}$ prin $\bar{c}'$ proiecția lui pe direcția celuilalt vector ($\bar{p}$). Dar modulul lui $\bar{c}'$ este chiar înălțimea corespunzătoare paralelogramului de bază construit pe $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

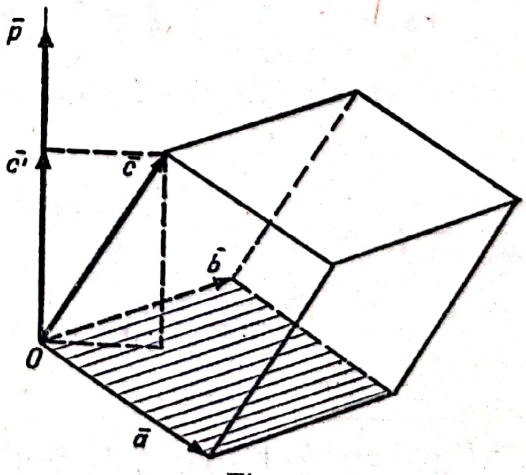


Fig. 67

3° Produsul mixt este un *pseudoscalar*, deoarece semnul lui depinde de orientarea spaţiului. Astfel, dacă triedrul *Oabc* are aceeaşi orientare cu triedrul fundamental, produsul mixt este pozitiv, şi invers, dacă orientarea triedrului *Oabc* este contrarie, semnul produsului mixt este negativ.

4° În produsul mixt $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}$ se pot face permutări între factorii produsului:

$$(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = (\bar{c} \times \bar{a})\bar{b} = (\bar{b} \times \bar{c})\bar{a}. \tag{2.30}$$

În adevăr, presupunînd că vectorii reprezintă segmente de dreaptă orientate, volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori nu depinde de faţa care se consideră ca bază, ci numai de orientarea triedrului, astfel triedrele *Oabc*, *Ocab*, *Obca* au aceeaşi orientare, iar triedrele *Obac*, *Ocba*, *Oacb* au orientarea contrarie triedrului fundamental, deci:

$$(\bar{b} \times \bar{a})\bar{c} = (\bar{c} \times \bar{b})\bar{a} = (\bar{a} \times \bar{c})\,\bar{b} = -(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}.^1$$

Adică, în produsul mixt se pot face *permutări circulare*, aşa cum se arată în figura 68: $\bar{a}$ trece în locul lui $\bar{b}$ care înlocuieşte pe $\bar{c}$ şi acesta pe $\bar{a}$, sau invers, $\bar{a}$ înlocuieşte pe $\bar{c}$, acesta pe $\bar{b}$ şi $\bar{b}$ pe $\bar{a}$.

Observaţie. În baza proprietăţii 2° este evident că, dacă vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sînt coplanari, volumul paralelipipedului construit cu ajutorul lor este nul, şi deci produsul mixt $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}$ este nul.

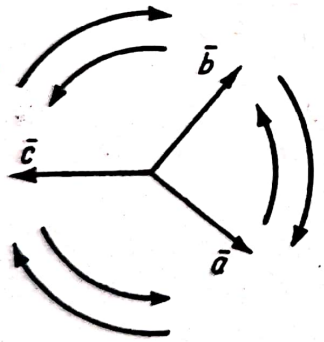


Fig. 68

b. *Expresia analitică a produsului mixt.* Fie:

$$\bar{a} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$$

$$\bar{b} = X'\bar{i} + Y'\bar{j} + Z'\bar{k}$$

$$\bar{c} = X''\bar{i} + Y''\bar{j} + Z''\bar{k}.$$

Se ştie că:

$$\bar{p} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} Y & Z \\ Y' & Z' \end{vmatrix}\bar{i} + \begin{vmatrix} Z & X \\ Z' & X' \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix}\bar{k}.$$

Produsul mixt $\bar{p}\,\bar{c}$ are deci ca expresie:

$$(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \begin{vmatrix} Y & Z \\ Y' & Z' \end{vmatrix}X'' + \begin{vmatrix} Z & X \\ Z' & X' \end{vmatrix}Y'' + \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix}Z''$$

sau, în fine

$$(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix}. \tag{2.31}$$

[1] Uneori se foloseşte pentru produsul mixt următoarea notaţie simplificată:
$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b})$.

Scanned with OKEN Scanner

c. *Aplicații.* 1° Să se calculeze:

$$\bar{a}\,[(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})]+\frac{1}{3}(\bar{a}+2\bar{b}-\bar{c})\,[(\bar{a}-\bar{b}-\bar{c})\times(\bar{a}-\bar{b})].$$

Răspuns: 0.

2° Să se scrie condiția ca patru puncte determinate prin vectorii lor de poziție în raport cu originea O a reperului: $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ și $\bar{r}_4$, să se găsească în același plan:

Răspuns: $[(\bar{r}_2-\bar{r}_1)\times(\bar{r}_3-\bar{r}_1)]\,(\bar{r}_4-\bar{r}_1)=0$.

3° Să se verifice că vectorii $\lambda\bar{a}-\mu\bar{b}$, $\nu\bar{b}-\lambda\bar{c}$, $\mu\bar{c}-\nu\bar{a}$ sînt coplanari, oricare ar fi valorile parametrilor λ, μ și ν.

4° Se consideră punctele A_1, A_2 și A_3 determinate în raport cu originea O a reperului prin vectorii de poziție $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ și $\bar{r}_3$; să se demonstreze că: $\bar{r}=\bar{r}_1\times\bar{r}_2+\bar{r}_2\times\bar{r}_3+\bar{r}_3\times\bar{r}_1$ este un vector perpendicular pe planul $A_1A_2A_3$.

Răspuns: Se calculează $\overline{A_2A_1}$ și $\overline{A_3A_1}$ doi vectori din planul $A_1A_2A_3$, apoi se constată că:

$$\bar{r}\cdot\overline{A_2A_1}=0 \quad \text{și} \quad \bar{r}\cdot\overline{A_3A_1}=0.$$

§ 28. Dublul produs vectorial a trei vectori

a. Dacă $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sînt trei vectori liberi, dublul produs vectorial se obține prin produsul vectorial a doi vectori, multiplicat tot vectorial cu cel de-al treilea vector. De exemplu:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} \text{ sau } (\bar{b}\times\bar{c})\times\bar{a} \text{ sau } (\bar{c}\times\bar{a})\times\bar{b} \text{ etc.},$$

pentru fiecare combinație obținîndu-se, ca rezultat final, cîte *un alt vector*, deși toate combinațiile sînt făcute cu aceiași vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$ și $\bar{c}$.

Formula de dezvoltare a dublului produs vectorial este:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}=-(\bar{b}\,\bar{c})\,\bar{a}+(\bar{a}\bar{c})\bar{b}. \tag{2.32}$$

Pentru demonstrația ei se poate nota (fig. 69):

$$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{p}$$

și:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}=\bar{p}\times\bar{c}=\bar{q}.$$

Deoarece $\bar{p}$ este perpendicular pe planul vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$, iar $\bar{q}$ perpendicular pe planul vectorilor $\bar{p}$ și $\bar{c}$, $\bar{q}$ este coplanar cu $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

Se știe că, în acest caz, $\bar{q}$ poate fi exprimat în funcție de $\bar{a}$ și $\bar{b}$:

$$\bar{q}=\overline{OA}+\overline{OB}=$$
$$=\lambda\bar{a}+\mu\bar{b},$$

unde λ și μ sînt parametri scalari pentru a căror determinare se vor folosi proprietăți ale produsului scalar și mixt.

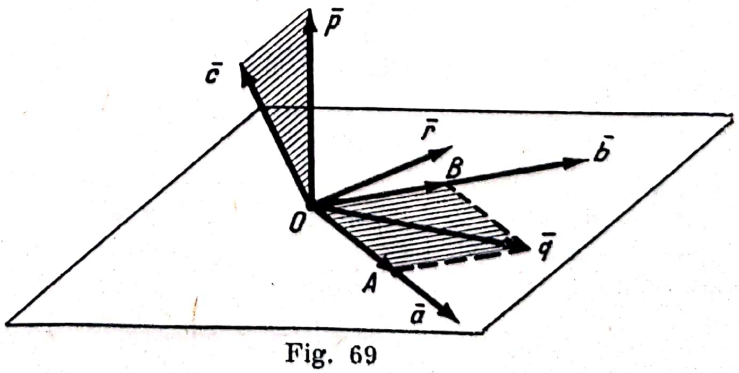


Fig. 69

Se observă că unghiul dintre vectorii $\bar{c}$ și $\bar{q}$ este drept, deci :

$$\bar{q}\,\bar{c} = \lambda\,\bar{a}\,\bar{c} + \mu\,\bar{b}\,\bar{c} = 0. \tag{2.33}$$

Ecuația (2.33) dă prima relație dintre λ și μ.

Produsul vectorial $\bar{p} \times \bar{a}$ este reprezentat de vectorul $\bar{r}$ coplanar cu $\bar{a}$ și $\bar{b}$ și perpendicular pe $\bar{a}$.

Calculînd în două moduri, *întîi* :

$$\bar{q}\,\bar{r} = (\lambda\bar{a} \times \mu\bar{b})\,(\bar{p} \times \bar{a}) = \lambda\bar{a}\,(\bar{p} \times \bar{a}) + \mu\bar{b}\,(\bar{p} \times \bar{a}) = \mu\bar{b}\,(\bar{p} \times \bar{a}) =$$

$$= \mu\,\bar{p}\,(\bar{a} \times \bar{b}) = \mu\,\bar{p}\,\bar{p} = \mu p^2,$$

apoi :

$$\bar{q}\,\bar{r} = (\bar{p} \times \bar{c})\,\bar{r} = (\bar{r} \times \bar{p})\,\bar{c} = (p^2\bar{a})\,\bar{c},$$

deoarece $\bar{r} \times \bar{p}$ este un vector coliniar cu $\bar{a}$ de modul :

$$|\bar{r}|\,|\bar{p}| = |\bar{p}|\,|\bar{a}|\,|\bar{p}| = p^2\,|\bar{a}|,$$

se găsește :

$$\mu = \bar{a}\,\bar{c},$$

și, în consecință, din (2.33) :

$$\lambda = -\,\bar{b}\,\bar{c}.$$

Astfel că :

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = -\,(\bar{b}\,\bar{c})\,\bar{a} + (\bar{a}\,\bar{c})\,\bar{b}. \qquad \text{c.c.t.d.}$$

Observație. Prin permutări se obțin alte rezultate :

$$(\bar{b} \times \bar{c}) \times \bar{a} = -\,(\bar{c}\,\bar{a})\,\bar{b} + (\bar{b}\,\bar{a})\bar{c}$$

$$(\bar{c} \times \bar{a}) \times \bar{b} = -\,(\bar{a}\,\bar{b})\,\bar{c} + (\bar{c}\,\bar{b})\,\bar{a}$$

sau forma întîlnită curent :

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a}\,\bar{c})\,\bar{b} - (\bar{a}\,\bar{b})\,\bar{c}. \tag{2.34}$$

b. *Aplicații.* 1° Să se verifice identitatea :

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) + \bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{a}) + \bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b}) \equiv 0.$$

2° Să se calculeze :

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}),$$

știind că $\bar{\omega}$ și $\bar{\rho}$ sînt ortogonali între ei.

Răspuns: $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) = (\bar{\omega}\,\bar{\rho})\,\bar{\omega} - \omega^2\bar{\rho} = -\,\omega^2\bar{\rho}.$

Scanned with OKEN Scanner

3° Să se verifice că :

$$(\bar{a} \times \bar{b})\,(\bar{c} \times \bar{d}) = -\,(\bar{a}\,\bar{d})\,(\bar{b}\,\bar{c}) + (\bar{a}\,\bar{c})\,(\bar{b}\,\bar{d}).$$

4° Să se arate că orice vector $\overline{M}$ se poate descompune în două componente, una coliniară cu un vector dat $\overline{V}$ şi cealaltă după direcţia perpendiculară pe $\overline{V}$ (fig. 70), potrivit relaţiei :

$$\overline{M} = \bar{m} + \bar{\mu} = \frac{\overline{V}\overline{M}}{V^2}\,\overline{V} + \frac{1}{V^2}\,\overline{V} \times (\overline{M} \times \overline{V}).$$

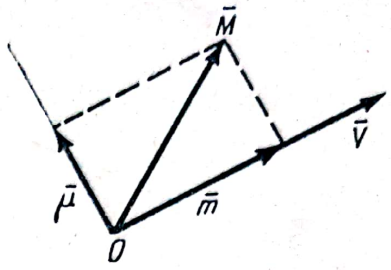


Fig. 70

CAPITOLUL III

METODA VECTORIALĂ ÎN ANALIZA ŞI ÎN GEOMETRIA DIFERENŢIALĂ

A. NOŢIUNI DE ANALIZĂ VECTORIALĂ

§ 29. Vectori variabili. Hodograful unei funcţii vectoriale

a. În algebra vectorială, mărimile vectoriale şi scalare considerate au fost presupuse constante. Or, fenomenele observate în natură sînt variabile în spaţiu şi în timp şi pot fi reprezentate prin mărimi scalare sau vectoriale variabile.

Exemplu : Un punct material M se mişcă trecînd în fiecare moment prin diferite poziţii, descriind *traiectoria punctului.* Poziţia punctului poate fi determinată, în orice moment, prin vectorul său de poziţie în raport cu un sistem de referinţă cu originea în O (fig. 71).

Aici $\bar{r}$ este un vector legat de O, dar are *atît direcţia cît şi modulul* variabile cu timpul. Timpul este reprezentat printr-o *variabilă scalară independentă t.* În acest caz, vectorul de poziţie este o funcţie vectorială de scalarul t şi se notează de obicei :

$$\bar{r} = \bar{r}(t).$$

Ecuaţia reprezintă traiectoria descrisă de punctul M şi legea mişcării.

În general, prin vector variabil se înţelege un vector liber $\overline{V}$, care nu este numaidecît vector de poziţie, iar t o variabilă scalară independentă oarecare, şi nu neapărat timpul.

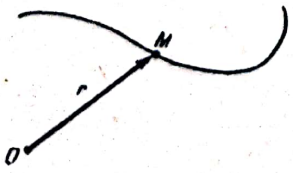


Fig. 71

Dacă se construieşte, cu originea într-un punct fix O, un vector egal cu vectorul variabil $\overline{V}(t)$, vîrful vectorului construit va descrie, cînd t variază, o curbă care, se numeşte *hodograful funcţiei vectoriale* sau simplu *hodograful vectorului* $\overline{V}$.

Scanned with OKEN Scanner

În consecință, oricărui vector liber $\bar{V}(t)$ i se poate asocia un vector de poziție:

$$\overline{OM} = \bar{V}(t),$$

iar ecuația reprezintă hodograful vectorului liber în raport cu un sistem de referință cu originea în O.

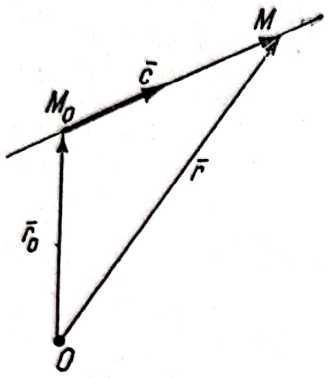


Fig. 72

Un vector poate depinde și de o variabilă vectorială, de exemplu:

$$\bar{V} = \bar{f}(\bar{r}),\ ^1$$

sau un scalar poate fi o funcție de o variabilă vectorială, astfel:

$$L = \varphi(\bar{r}).^2$$

b. Câteva exemple simple de funcții vectoriale de variabile scalare se găsesc în ecuațiile vectoriale ale unor curbe și suprafețe.

1° *Ecuația unei drepte determinate printr-un punct și direcție.* Se notează cu $\bar{r}_0$ vectorul de poziție, în raport cu un reper, al punctului dat M_0, și cu $\bar{c}$ vectorul direcției cunoscute a dreptei (fig. 72).

Deoarece:

$$\overline{M_0M} = \lambda\bar{c}$$

(M fiind un punct curent al dreptei, iar λ un scalar care poate primi orice valoare reală), ecuația dreptei este:

$$\bar{r}_0 + \overline{M_0M} = \bar{r}$$

sau

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda\bar{c}. \tag{3.1}$$

Dacă dreapta este determinată prin două puncte $M_0(\bar{r}_0)$ și $M_1(\bar{r}_1)$, ecuația vectorială a ei, în raport cu reperul reprezentat prin originea O (fig. 73), este:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda(\bar{r}_1 - \bar{r}_0).$$

2° *Ecuația unui plan determinat prin trei puncte*: $M_0(\bar{r}_0)$ *și* $M_1(\bar{r}_1)$ *și* $M_2(\bar{r}_2)$, *nesituate pe aceeași dreaptă.*

Se consideră un punct curent M al planului (P). Se descompune vectorul $\overline{M_0M}$ în componente după direcțiile $\overline{M_0M_1}$ și $\overline{M_0M_2}$ (fig. 74):

$$\overline{M_0M} = \lambda\overline{M_0M_1} + \mu\overline{M_0M_2},$$

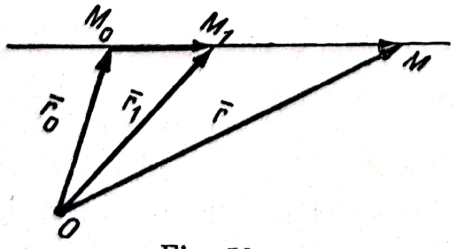


Fig. 73

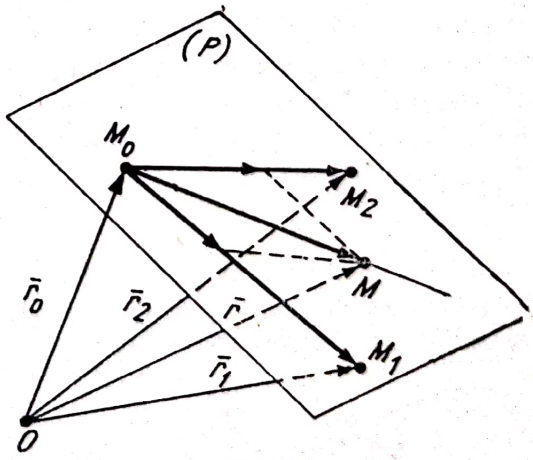


Fig. 74

[1] Astfel, expresia forței elastice este: $\bar{F} = -k\bar{r}$.
[2] De pildă, lucrul mecanic elementar are expresia: $\Delta L = \bar{F}d\bar{r}$.

unde λ și μ sînt parametri scalari care pot primi orice valori cuprinse între $-\infty$ și $+\infty$.

Notînd cu $\bar{r}$ vectorul de poziție, în raport cu reperul O:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M} = \bar{r}_0 + \lambda\overline{M_0M_1} + \mu\overline{M_0M_2},$$

se găsește ecuația vectorială a planului:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda(\bar{r}_1 - \bar{r}_0) + \mu(\bar{r}_2 - \bar{r}_0),$$

cu condiția ca:

$$\bar{r}_1 - \bar{r}_0 \text{ și } \bar{r}_2 - \bar{r}_0$$

să nu fie coliniari, adică:

$$\lambda_1(\bar{r}_1 - \bar{r}_0) + \mu_1(\bar{r}_2 - \bar{r}_0) \neq 0$$

pentru orice pereche de valori date scalarilor λ_1 și μ_1, afară de $\lambda_1 = \mu_1 = 0$.

Se observă că $\bar{r}$ este un vector funcție de doi parametri scalari independenți între ei.

3° Dacă o curbă plană este reprezentată în raport cu sistemul de referință Oxy prin ecuațiile parametrice:

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

ea poate fi reprezentată vectorial prin ecuația:

$$\bar{r} = \bar{r}(t).$$

Astfel, ecuațiile:

$$x = C_1t; \quad y = C_1't + C_2t^2$$

reprezintă o *parabolă*.

Exprimînd vectorul de poziție al unui punct curent:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$$

$$\bar{r} = C_1\bar{i}t + C_1'\bar{j}t + C_2\bar{j}t^2 = (C_1\bar{i} + C_1'\bar{j})t + C_2\bar{j}t^2,$$

se obține:

$$\bar{r} = \bar{A}t + \bar{B}t^2, \tag{3.2}$$

care este ecuația vectorială a unei parabole, unde t este scalarul variabil, iar $\bar{A}$ și $\bar{B}$ vectori constanți.

De asemenea, ecuațiile:

$$x = C_1 \cos\theta + C_2 \sin\theta; \quad y = C_1' \cos\theta + C_2' \sin\theta$$

reprezintă, în raport cu un sistem de axe rectangulare Oxy, o conică *de gen elipsă*, avînd centrul în O.

Procedînd ca mai sus, se ajunge la:

$$\bar{r} = \bar{A} \cos\theta + \bar{B} \sin\theta, \tag{3.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

care este ecuaţia vectorială a unei elipse cu centrul în O, vectorul de poziţie $\bar{r}$ fiind funcţie de scalarul θ.

4° De asemenea, dacă o curbă strîmbă este reprezentată parametric prin ecuaţiile :

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t),$$

ea poate fi reprezentată vectorial printr-o ecuaţie de forma :

$$\bar{r} = \bar{r}(t).$$

Astfel, ecuaţiile parametrice ale unei elice circulare, în raport cu triedrul tridreptunghic $Oxyz$, axa Oz fiind axa cilindrului circular drept pe care este trasată elicea cu pasul p, sînt :

$$x = R\cos\theta \quad y = R\sin\theta \quad z = \frac{p}{2\pi}\theta.$$

Ecuaţia vectorială a elicei se obţine scriind :

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

$$\bar{r} = R\bar{i}\cos\theta + R\bar{j}\sin\theta + \frac{p}{2\pi}\bar{k}\theta = \bar{A}\cos\theta + \bar{B}\sin\theta + \bar{C}\theta, \quad (3.4)$$

unde θ este variabila scalară de care depinde $\bar{r}$.

Studiul care urmează se rezumă numai la vectori funcţii de o *singură* variabilă scalară.

§ 30. Limite vectoriale. Continuitatea funcţiilor vectoriale

a. Se va defini limita unei funcţii vectoriale de o variabilă scalară $\bar{V}(t)$, la fel cum se defineşte şi limita unei funcţii scalare :

Dacă $X(t)$ este o funcţie scalară de variabilă t, X_0 *este limita funcţiei* $X(t)$ *cînd* t *tinde către* t_0, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ dat, şi arbitrar de mic, există un $\tau > 0$, astfel ca :

$$|X(t) - X_0| < \varepsilon \text{ dacă } |t - t_0| < \tau \text{ şi } t \neq t_0.$$

În acest caz se poate scrie :

$$\lim_{t \to t_0} X(t) = X_0.$$

Tot astfel, dacă $\bar{V}(t)$ este o funcţie vectorială de scalarul t, $\bar{V}_0$ *este limita funcţiei* $\bar{V}(t)$ *cînd* t *tinde către* t_0, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ dat şi arbitrar de mic există un $\tau > 0$, astfel ca :

$$|\bar{V}(t) - \bar{V}_0| < \varepsilon \text{ dacă } |t - t_0| < \tau \text{ şi } t \neq t_0,$$

ceea ce permite exprimarea :

$$\lim_{t \to t_0} \bar{V}(t) = \bar{V}_0.$$

Scanned with OKEN Scanner

b. Ca şi în cazul funcţiilor scalare, se va defini continuitatea funcţiilor vectoriale de o variabilă scalară, astfel :

$\bar{V}(t)$ este continuă pentru t_0 dacă $\bar{V}(t_0)$ este limita valorilor funcţiei $\bar{V}(t)$ cînd t tinde către t_0.

De asemenea o funcţie vectorială continuă pentru fiecare t, cuprins în intervalul $(a < t < b)$, este denumită funcţie continuă în intervalul (a, b).

c. *În cazul funcţiei vectoriale continue, hodograful ei este în general o curbă continuă.*

Exemple particulare : 1° Dacă $\bar{V}(t)$ are direcţia constantă, hodograful este o linie dreaptă.

2° Dacă $\bar{V}(t)$ are modulul constant, hodograful este o curbă situată pe o sferă.

3° Dacă $\bar{V}(t) = \bar{c}$, evident, hodograful se reduce la un punct.

§ 31. Derivata şi diferenţiala unui vector variabil

Se consideră un vector liber $\bar{V}(t)$ funcţie continuă de scalarul t şi se construieşte hodograful vectorului în raport cu O, originea reperului (fig. 75). Dacă Δt este variaţia elementară (pozitivă) a variabilei t, funcţia devine :

$$\overline{OM'} = \bar{V}(t + \Delta t).$$

Variaţia vectorului $\bar{V}$ este reprezentată pe hodograf prin vectorul $\overline{MM'}$ dirijat după coardă :

$$\overline{MM'} = \bar{V}(t + \Delta t) - \bar{V}(t) = \Delta\bar{V}.$$

Amplificînd pe $\Delta\bar{V}$ prin $\frac{1}{\Delta t}$, se ajunge la un vector coliniar cu $\Delta\bar{V}$.

Dacă Δt tinde către zero, raportul $\frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t}$ poate tinde către o limită.

Această limită, dacă există, este un vector şi se numeşte d e r i v a t a vectorului pentru valoarea t *a scalarului, sau derivata vectorului în punctul corespunzător* M *de pe hodograf* :

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{V}(t + \Delta t) - \bar{V}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t}.$$

Deoarece vectorul derivată este limita vectorului $\frac{\overline{MM'}}{\Delta t}$ cînd M' tinde către M, $\frac{d\bar{V}}{dt}$ este un vector tangent în M la hodograful vectorului $\bar{V}(t)$ şi este orientat în sensul în care se deplasează vîrful vectorului cînd creşte scalarul t.

Evident $\Delta\bar{V}$ este un vector infinit mic, iar partea sa principală, notată cu $d\bar{V}$, este, prin definiţie, *diferenţiala* vectorului $\bar{V}$.

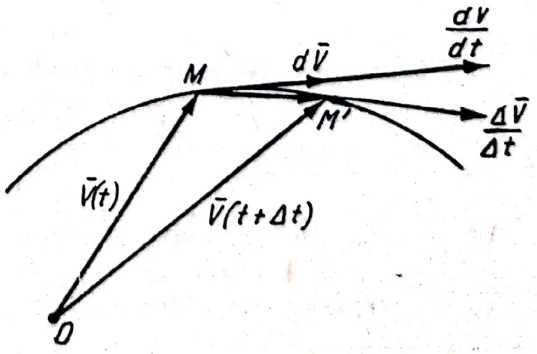


Fig. 75

După cum se vede, definiţiile derivatei şi diferenţialei unui vector funcţie de o variabilă scalară se aseamănă cu definiţiile corespunzătoare din analiza funcţiilor scalare, cu deosebirea că aici derivata şi diferenţiala sînt vectori.

De asemenea şi în calculul vectorial se poate trece de la derivată la diferenţială şi invers, prin amplificare cu scalarul dt, respectiv cu $\frac{1}{dt}$.

Diferenţiala $d\overline{V}$ este reprezentată pe hodograf printr-un vector coliniar şi de acelaşi sens cu derivata $\frac{d\overline{V}}{dt}$, dar avînd modulul infinit mic.

Observaţie. Derivatele şi diferenţialele de ordin superior se pot calcula din aprope în aproape, aşa după cum se procedează în analiza scalară.

§ 32. Proprietăţi şi reguli de derivare

a. În cele ce urmează se vor considera funcţii vectoriale şi scalare continue şi derivabile.

Se poate demonstra că proprietăţile fundamentale cunoscute de la derivarea funcţiilor scalare sînt valabile şi pentru funcţiile vectoriale. [1].

1° *Derivata şi diferenţiala sumei vectoriale* $\overline{V} = \bar{u} + \bar{v}$, unde $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ reprezintă două funcţii vectoriale de scalarul t, sînt :

$$\frac{d(\bar{u} + \bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{d\bar{v}}{dt} \quad \text{şi} \quad d(\bar{u} + \bar{v}) = d\bar{u} + d\bar{v},$$

adică : operaţiile de derivare şi de diferenţiere sînt distributive faţă de adunarea vectorială.

2° *Derivata şi diferenţiala funcţiei* $\overline{V} = \lambda\bar{u}$, unde $\overline{V}(t)$ şi $\bar{u}(t)$ sînt funcţii vectoriale, iar $\lambda(t)$ o funcţie scalară de t, se scriu :

$$\frac{d(\lambda\bar{u})}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}\bar{u} + \lambda\frac{d\bar{u}}{dt} \quad \text{şi} \quad d(\lambda\bar{u}) = \bar{u}d\lambda + \lambda d\bar{u}.$$

3° *Derivata şi diferenţiala funcţiei* $\overline{V} = \bar{u}\bar{v}$ sînt :

$$\frac{d(\bar{u}\bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{u}}{dt}\bar{v} + \bar{u}\frac{d\bar{v}}{dt} \quad \text{şi} \quad d(\bar{u}\bar{v}) = \bar{v}d\bar{u} + \bar{u}d\bar{v}.$$

4° *Derivata şi diferenţiala funcţiei* $\overline{V} = \bar{u} \times \bar{v}$ sînt :

$$\frac{d(\bar{u} \times \bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{u}}{dt} \times \bar{v} + \bar{u} \times \frac{d\bar{v}}{dt} \quad \text{şi} \quad d(\bar{u} \times \bar{v}) = (d\bar{u}) \times \bar{v} + \bar{u} \times d\bar{v}.$$

Observaţie. Nu se poate schimba ordinea factorilor, deoarece produsul vectorial *nu este comutativ.*

b. *Exemple particulare* :

[1] Pentru demonstraţii, vezi lucrările citate în bibliografie.

1° Derivata şi diferenţiala unui vector constant sînt :

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = 0 \text{ şi } d\bar{c} = 0.$$

2° Derivata şi diferenţiala unui vector variabil în modul, dar cu direcţia constantă : $\bar{V}(t) = \lambda(t)\bar{c}$ este :

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{c}\frac{\lambda d}{dt} \text{ respectiv } d\bar{V} = \bar{c}d\lambda.$$

3° Derivata şi diferenţiala unui vector variabil în direcţie, dar cu modul constant, adică :

$$\bar{V}\bar{V} = c^2,$$

se exprimă prin :

$$\frac{d\bar{V}}{dt}\bar{V} + \bar{V}\frac{d\bar{V}}{dt} = 0,$$

deci :

$$\bar{V}\frac{d\bar{V}}{dt} = 0 \text{ şi } \bar{V}d\bar{V} = 0,$$

adică : $\frac{d\bar{V}}{dt}$ şi $d\bar{V}$ sînt vectori perpendiculari pe $\bar{V}$ (fig. 76).

4° *Derivata modulului unui vector.* Din $|\bar{V}| = \sqrt{\bar{V}\bar{V}}$ rezultă :

$$\frac{d|\bar{V}|}{dt} = \frac{2\bar{V}\frac{d\bar{V}}{dt}}{2\sqrt{\bar{V}\bar{V}}} = \frac{\bar{V}\frac{d\bar{V}}{dt}}{|\bar{V}|} \tag{3.5}$$

5° *Componentele derivatei vectorului:* $\bar{V}(t) = V\bar{v}$.

S-a exprimat vectorul în funcţie de $\bar{v}$ (versorul direcţiei sale) şi de V (valoarea sa în raport cu versorul $\bar{v}$), ambii fiind funcţii de scalarul t. Aplicînd rezultatul de la a. 2° :

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\bar{v} + V\frac{d\bar{v}}{dt} \tag{3.6}$$

se constată că derivata unui vector variabil $\bar{V}(t)$ se poate descompune în două componente : una, $\frac{dV}{dt}\bar{v}$, coliniară cu el, şi cealaltă, $V\frac{d\bar{v}}{dt}$, perpendiculară pe direcţia versorului $\bar{v}$, deoarece, versorul avînd modulul constant, deri-

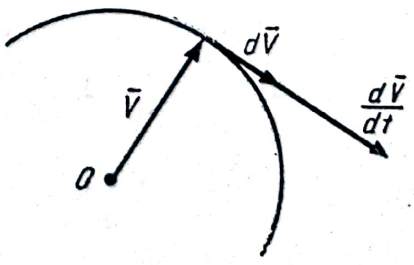


Fig. 76

vata $\frac{d\bar{v}}{dt}$ este un vector perpendicular pe $\bar{v}$ (cazul particular *c*). Prima componentă, $\frac{dV}{dt}\bar{v}$, se datorește variației modulului, iar cea de-a doua, $V\frac{d\bar{v}}{dt}$, variației direcției vectorului $\bar{V}$ (fig. 77).

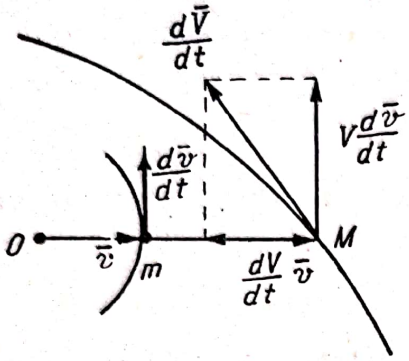


Fig. 77

Observație. Deoarece cele două componente formează între ele un unghi drept:

$$\left|\frac{d\bar{V}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + V^2\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)^2}, \qquad (3.7)$$

comparînd (3.5) cu (3.7) reiese că:

$$\frac{d\,|\,\bar{V}\,|}{dt} \neq \left|\frac{d\bar{V}}{dt}\right|,$$

adică: *derivata modulului unui vector nu este egală cu modulul derivatei vectorului.*

6° *Componentele derivatei* $\frac{d\bar{V}}{dt}$, *după axele unui triedru fix,* [1] *sînt egale cu derivatele componentelor vectorului* $\bar{V}(t)$ *după aceleași axe.*

Dacă *Oxyz* este triedrul fundamental:

$$\bar{V} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k},$$

unde $X\bar{i}$, $Y\bar{j}$, $Z\bar{k}$ sînt cele trei componente.

Prin derivare:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dX}{dt}\bar{i} + \frac{dY}{dt}\bar{j} + \frac{dZ}{dt}\bar{k} + X\frac{d\bar{i}}{dt} + Y\frac{d\bar{j}}{dt} + Z\frac{d\bar{k}}{dt},$$

dar:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = 0,$$

deoarece versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$ sînt constanți, deci:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dX}{dt}\bar{i} + \frac{dY}{dt}\bar{j} + \frac{dZ}{dt}\bar{k},$$

ceea ce arată că $\frac{dX}{dt}\bar{i}$, $\frac{dY}{dt}\bar{j}$ și $\frac{dZ}{dt}\bar{k}$ sînt cele trei componente ale derivatei și deoarece:

$$\frac{d(X\bar{i})}{dt} = \frac{dX}{dt}\bar{i}; \quad \frac{d(Y\bar{j})}{dt} = \frac{dY}{dt}\bar{j}; \quad \frac{d(Z\bar{k})}{dt} = \frac{dZ}{dt}\bar{k},$$

[1] sau avînd o translație.

este evident că : *derivata componentei după oricare axă este egală cu componenta derivatei după axa respectivă.*

Observaţie. Potrivit consecinţelor convenţiei de la § 20, componentele faţă de axele *Oxyz* coincid cu proiecţiile respective, deci :

Proiecţia derivatei unui vector pe o axă fixă este egală cu derivata proiecţiei vectorului pe aceeaşi axă.

7° Regula de derivare a funcţiilor de funcţii din analiza scalară se aplică şi în cazul cînd $\bar{V}$ este o funcţie de un scalar s, iar s este o funcţie sclară de t :

$$\bar{V} = \bar{f}(s) \text{ şi } s = \varphi(t).$$

Se demonstrează că :

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d\bar{V}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

§ 33. Integrale vectoriale

Dacă :

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{v}(t),$$

$\bar{V}(t)$ se numeşte funcţie primitivă sau integrala nedefinită a lui $\bar{v}$ şi se notează :

$$\bar{V}(t) = \int \bar{v}dt + \bar{c},$$

unde $\bar{c}$ este constanta de integrare.

Integrala definită :

$$\int_{t_0}^{t} \bar{v}dt = \bar{V}(t) - \bar{V}(t_0)$$

este egală cu diferenţa valorilor funcţiei primitive $\bar{V}(t)$ pentru cele două limite de integrare a variabilei t.

În general, este foarte utilă legătura care se poate face între funcţiile vectoriale şi cele scalare prin expresia complexă în raport cu triedrul *Oxyz* :

$$\bar{V}(t) = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}.$$

Se ajunge la :

$$\int_{t_0}^{t} \bar{V}dt = \bar{i}\int_{t_0}^{t} Xdt + \bar{j}\int_{t_0}^{t} Ydt + \bar{k}\int_{t_0}^{t} Zdt.$$

Observaţie. Această legătură mai permite şi rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale vectoriale care se întîlnesc în mecanică.

Scanned with OKEN Scanner

B. METODA VECTORIALĂ ÎN GEOMETRIA DIFERENȚIALĂ

§ 34. Reprezentarea analitică și vectorială a curbelor

Cele ce urmează se rezumă la aplicarea metodei vectoriale la studiul curbelor, strict pe măsura nevoilor manualului în legătură cu unele proprietăți ale curbelor.

Din geometria analitică se știe că o curbă poate fi reprezentată, în raport cu un sistem de referință cartezian, prin coordonatele punctului curent M de pe curbă, în funcție de un parametru scalar t:

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t),$$

Dacă funcțiile sînt continue într-un interval, atunci și curba este continuă în acel interval. Se presupune că aceste funcții sînt cel puțin de două ori derivabile în intervalul în care sînt continue.

În geometria analitică se obișnuiește să se aleagă arcul s:

$$s = \overset{\frown}{AM}$$

ca parametru scalar.

Punctul A este originea arcelor pe curbă, sensul $\overset{\frown}{AM}$ este sensul în care cresc arcele. Scalarul s se numește *abscisă curbilinie.*

Ecuațiile curbei (C) (fig. 78) se scriu:

$$x = m(s), \quad y = n(s), \quad z = p(s).$$

De asemenea și abscisa curbilinie poate fi o funcție de un alt parametru scalar, de exemplu t:

$$s = \varphi(t).$$

În acest fel, coordonatele punctului curent sînt funcții de funcție.

Această reprezentare este deseori întîlnită, mai ales în cinematică.

La reprezentarea vectorială a curbelor se poate ajunge și prin mijlocirea reprezentării analitice, înlocuind în expresia complexă a vectorului de poziție:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

coordonatele punctului $M(x, y, z)$ în funcție de parametrul ales, de exemplu s, obținînd ecuația:

$$\bar{r} = \bar{r}(s).$$

În cele ce urmează se presupune că $\bar{r}(s)$ este cel puțin de două ori derivabil și că derivatele sale sînt continue.

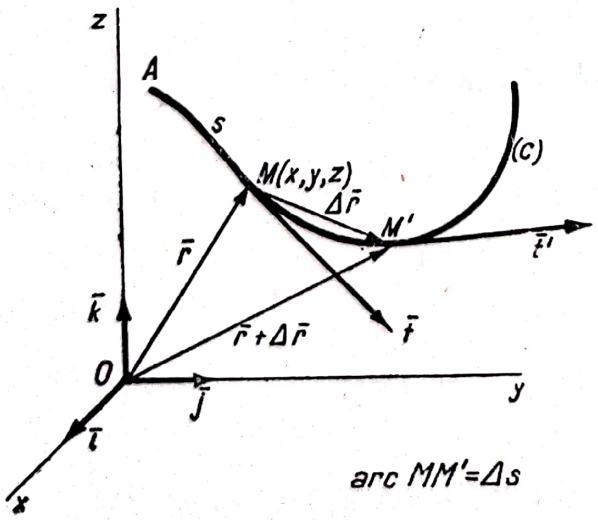


Fig. 78

§ 35. Primele două derivate ale vectorului de poziţie

a. În primul rînd, se va căuta semnificaţia geometrică a derivatei $\frac{d\bar{r}}{ds}$. Locul geometric al vîrfului M al vectorului de poziţie este hodogradul vectorului variabil $\bar{r}(s)$. Derivata $\frac{d\bar{r}}{ds}$ este un vector tangent în M la hodograf, deci la curba (C) (fig. 78), reprezentată prin ecuaţia:

$$\bar{r} = \bar{r}(s).$$

Sensul vectorului tangent este sensul în care se deplasează punctul M cînd creşte arcul s.

Modulul vectorului $\frac{d\bar{r}}{ds}$:

$$\left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s}\right| = 1, \tag{3.8}$$

deoarece la limită raportul dintre lungimile corzii MM' şi a arcului MM' este 1, cînd arcul tinde către zero.

Deci $\frac{d\bar{r}}{ds}$ este versorul tangentei în M la curbă, orientat totdeauna în sensul în care creşte arcul s, şi se notează cu $\bar{t}$, adică [1]:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{t}. \tag{3.9}$$

b. Pentru calculul derivatei secunde:

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d\bar{t}}{ds}$$

se consideră hodograful versorului $\bar{t}$. Hodograful este o curbă oarecare, trasată pe o sferă de rază unitate şi cu centrul într-un punct oarecare Ω (fig. 79).

Această curbă se numeşte *indicatoarea sferică* a tangentelor la curba (C).

Se notează cu m şi m' punctele de pe indicatoarea (Γ) corespunzătoare punctelor M şi M' de pe curba (C), iar cu σ arcul descris de m pe (Γ). Abscisa curbilinie $\sigma = \sigma(s)$ este o funcţie continuă de s, iar orientînd convenabil indicatoarea, σ creşte o dată cu s. Dar:

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\bar{t}' - \bar{t}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \bar{t}}{\Delta s} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta\sigma \to 0 \\ \Delta s \to 0}} \frac{\Delta \bar{t}}{\Delta \sigma} \frac{\Delta \sigma}{\Delta s} = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta \bar{t}}{\Delta \sigma} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta s}.$$

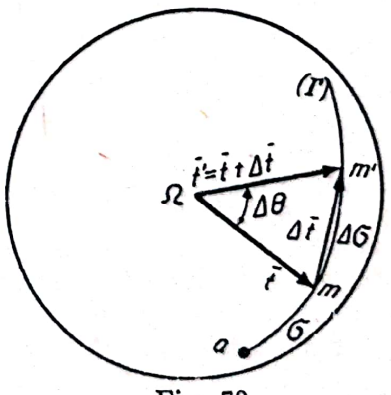


Fig. 79

[1] Nu se va confunda $\bar{t}$ cu t, chiar dacă intervin în aceeaşi expresie, deoarece $\bar{t}$ este un versor, iar t este un scalar.

Primul factor:

$$\lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\Delta\bar{\imath}}{\Delta\sigma}=\frac{d\bar{\imath}}{d\sigma}$$

reprezintă versorul tangentei în m la indicatoarea sferică. Această tangentă este perpendiculară pe Ωm, respectiv pe $\bar{\imath}$. Deci direcţia lui $\frac{d\bar{\imath}}{d\sigma}$ este paralelă cu planul normal din M la curba (C).

Dar $\frac{\Delta\bar{\imath}}{\Delta\sigma}$ se află în planul $\Omega mm'$, astfel că un vector $\frac{\Delta\bar{\imath}}{\Delta\sigma}$ construit cu originea în M se va afla în planul trecînd prin tangenta în M la (C), paralel cu tangenta infinit vecină $\bar{\imath}'$ din M'. La limită, cînd $\Delta s\to 0$, respectiv $\Delta\sigma\to 0$, versorul $\frac{d\bar{\imath}}{d\sigma}$ cu originea în M se va afla şi în *planul osculator din M la curba (C)*.

Deci direcţia versorului $\frac{d\bar{\imath}}{d\sigma}$ este după normala din planul osculator, adică după *normala principală* în M la curba (C). Se notează cu $\bar{n}$ acest versor:

$$\frac{d\bar{\imath}}{d\sigma}=\bar{n}. \tag{3.10}$$

Sensul versorului normalei principale este spre *concavitatea curbei.*

Se calculează şi cel de-al doilea factor:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}=\frac{d\sigma}{ds}.$$

Dar arcul elementar mm' al indicatoarei sferice (fig. 79) poate fi înlocuit prin arcul de cerc mare mm', intersecţia sferei de rază $\Omega m=1$, cu planul $\Omega\ mm'$. Această aproximaţie se bazează pe neglijarea infiniţilor mici de ordin superior faţă de infinitul mic de primul ordin $\Delta\theta$. Astfel că se poate scrie:

$$\Delta\sigma\approx\Omega m\cdot\Delta\theta=1\cdot\Delta\theta,$$

deci:

$$\frac{d\sigma}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{R}, \tag{3.11}$$

unde $\frac{1}{R}$ este curbura din M a curbei (C), deoarece potrivit definiţiei: *curbura unei curbe este limita raportului dintre unghiul $\Delta\theta$ format de două tangente în punctele infinit vecine M şi M' şi arcul Δs, cînd acesta din urmă tinde spre zero.*

Se înţelege că R este raza de curbură din M a curbei. S-a dedus astfel:

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}=\frac{d\bar{\imath}}{ds}=\frac{1}{R}\bar{n}, \tag{3.12}$$

o relaţie importantă în geometria diferenţială, *prima formulă a lui Frenet.*

§ 36. Triedrul natural al unei curbe

a. Pe o curbă oarecare (C) se alege punctul A ca origine a arcelor, un sens de creştere a arcelor şi se construiesc, în punctul curent M, al curbei:

1° *Tangenta*, prin versorul ei $\bar{t}$, în sensul creşterii arcelor.

2° *Normala principală*, prin versorul ei $\bar{n}$, în sensul concavităţii curbei C.

3° *Binormala*, prin versorul ei $\bar{b}$, perpendicular pe $\bar{t}$ şi $\bar{n}$ în sensul în care triedrul $Mtnb$ are aceeaşi orientare cu triedrul fundamental (fig. 80).

Triedrul $Mtnb$, astfel construit, se numeşte triedrul natural al curbei (C), sau *triedrul intrinsec* sau *triedrul lui Frenet*[1].

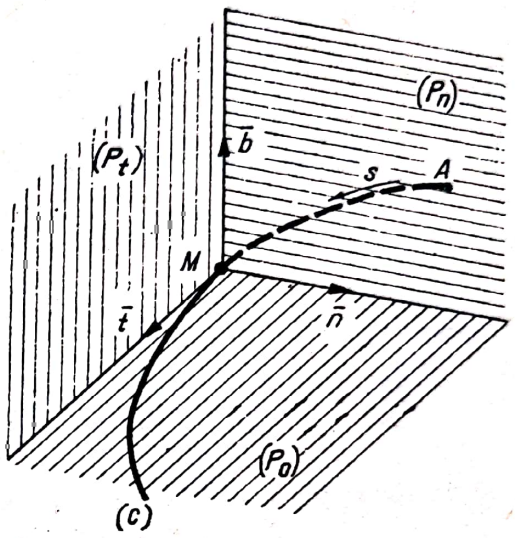


Fig. 80

Cele trei plane ale triedrului natural sînt:

(P_o) *planul osculator* al curbei, care este determinat de tangenta şi normala principală din M şi care are, dintre toate planele care trec prin M, cel mai intim contact cu curba;

(P_n) *planul normal* în M la curbă, plan care conţine toate normalele duse în M la curbă. El este determinat prin normala principală şi binormala din M la curbă;

(P_t) *planul rectificant* în M al curbei (C) este determinat de binormala şi tangenta în M la curbă.

Observaţie. În cazul unei curbe plane, planul osculator al curbei este acelaşi în orice punct M şi se confundă cu planul curbei, normala în M este evident normala principală, iar direcţia binormalei se înţelege că este constantă, fiind perpendiculară pe planul curbei [2].

---

[1] Frenet a mai stabilit încă două formule care leagă între ele derivatele versorilor triedrului natural în raport cu variabila scalară s, de curbura $\left(\frac{1}{R}\right)$ şi de torsiunea $\left(\frac{1}{T}\right)$ din punctul M al curbei (C). Cele trei formule sînt:

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{\bar{n}}{R}, \quad \frac{d\bar{b}}{ds} = -\frac{\bar{n}}{T}, \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{\bar{t}}{R} + \frac{\bar{b}}{T}.$$

[2] Deoarece: $\bar{b} = \text{const.}$, $\frac{d\bar{b}}{ds} = -\frac{\bar{n}}{T} = 0$, deci $\frac{1}{T} = 0$, curba plană are torsiunea nulă. Formulele lui Frenet devin, în cazul curbelor plane:

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{\bar{n}}{R}; \quad \frac{d\bar{b}}{ds} = 0; \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{\bar{t}}{R}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b. *Aplicații.* 1° Cunoscînd două din formulele lui Frenet:

$$\frac{d\bar{\imath}}{ds} = \frac{\bar{n}}{R}, \quad \frac{d\bar{b}}{ds} = -\frac{\bar{n}}{T},$$

să se deducă cea de-a treia.

Rezolvare. Deoarece $\bar{n} = \bar{b} \times \bar{\imath}$, se calculează:

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = \frac{d}{ds}(\bar{b} \times \bar{\imath}) \text{ etc.}$$

2° Să se calculeze expresiile analitice, în raport cu triedrul fundamental *Oxyz*, ale lui $\bar{\imath}$, $\bar{n}$ și $\frac{1}{R}$ într-un punct $M(x, y, z)$ al unei curbe strînse.

Rezolvare. Scriind:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\imath} = \frac{dx}{ds}\bar{i} + \frac{dy}{ds}\bar{j} + \frac{dz}{ds}\bar{k}; \quad \frac{d\bar{\imath}}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\bar{k} = \frac{\bar{n}}{R},$$

se obțin expresiile necesare și:

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

CAPITOLUL IV

TEORIA VECTORILOR ALUNECĂTORI

A. GENERALITĂȚI

§ 37. Tipul vectorial al forței. Suportul vectorului alunecător

a. În mecanică se studiază mișcarea unui corp sub acțiunea unui *sistem de forțe.* Prin sistem de forțe se înțelege totalitatea forțelor (acțiuni ale altor corpuri) aplicate în diferite puncte ale corpului considerat.

S-a arătat (vezi § 7) că forța se poate reprezenta printr-un vector. Acum trebuie precizat tipul vectorial al forței, adică dacă acest vector este *liber*, *alunecător* sau *legat.* Răspunsul la întrebare nu-l poate da decît experiența.

Pentru aceasta se consideră un corp oarecare în repaus asupra căruia se aplică un sistem de două forțe $\bar{F}$ și $\bar{F}'$, avînd aceeași direcție, același modul, dar sensuri opuse, adică satisfăcînd relația:

$$\bar{F} + \bar{F}' = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se constată că sînt numai trei cazuri distincte în legătură cu modul de aplicare al forţelor (fig. 81):

1° Forţele au acelaşi punct de aplicaţie (fig. 81, *a*).

2° Dreapta care trece prin punctele de aplicaţie M şi M' *are* aceeaşi direcţie cu forţele (fig. 81, *b*).

3° Dreapta MM' *nu are* aceeaşi direcţie cu forţele (fig. 81, *c*).

Experienţa arată că:

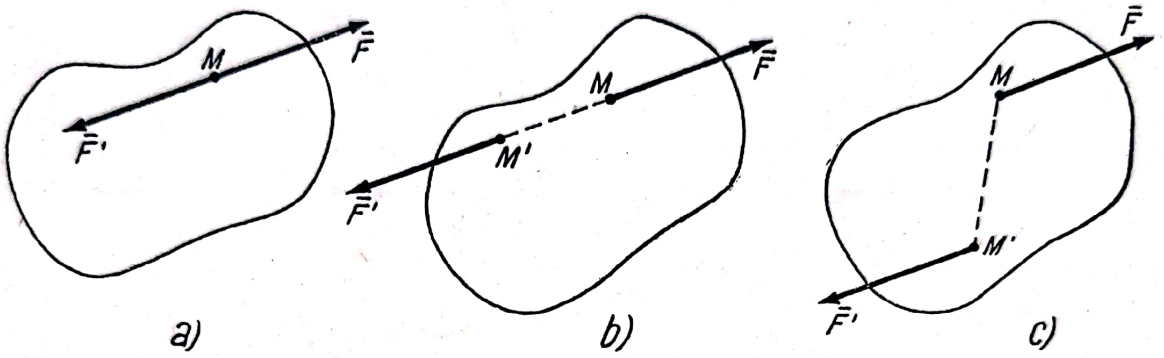


Fig. 81

— în cazul 1°, forţele se echilibrează, iar corpul rămîne în repaus şi după aplicarea forţelor;

— în cazul 2°, lungimea segmentului de dreaptă MM' se modifică, corpul se deformează şi are o anumită mişcare;

— în cazul 3°, segmentul de dreaptă MM' se modifică, corpul se deformează şi se mişcă, dar altfel ca în cazul 2°.

Deoarece fenomenele observate în cele trei cazuri sînt cu totul diferite, se ajunge la concluzia că:

Forţa aplicată unui c o r p o a r e c a r e *poate fi reprezentată numai printr-un vector legat de punctul de aplicaţie.*

Dacă se repetă experienţa asupra unui corp solid, *foarte puţin deformabil*, se constată următoarele:

— în cazul 1°, corpul rămîne mai departe în repaus;

— în cazul 2°, lungimea segmentului de dreaptă MM' se modifică foarte puţin, corpul se deformează de asemenea foarte puţin şi apoi rămîne în repaus;

— în cazul 3°, pe lîngă deformaţie, se constată şi o altă mişcare, corpul se roteşte.

Această experienţă permite să se tragă concluzia [1] că *dacă solidul ar fi nedeformabil* şi ar fi acţionat de forţele $\bar{F}$ şi $\bar{F}'$ nu s-ar constata nici o deosebire între cazurile 1° şi 2° de aplicare, adică, în aceste cazuri, aplicînd forţele în orice punct al solidului rigid de pe dreapta MM', forţele se echilibrează şi solidul rigid rămîne în repaus, deci:

Forţa aplicată unui s o l i d r i g i d *poate fi reprezentată printr-un* v e c t o r a l u n e c ă t o r.

O altă concluzie a acestor experienţe este că, în nici o ipoteză, *forţa nu poate fi reprezentată printr-un vector liber.*

[1] Această concluzie are un caracter axiomatic.

Adică, în general, nu se poate face abstracție de poziția punctului de aplicație al forței. Astfel, în cazul unui corp oarecare acționat în două din punctele sale M_1 și M_2 de forțele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ (fig. 82), *nu este permis* să se mute punctele

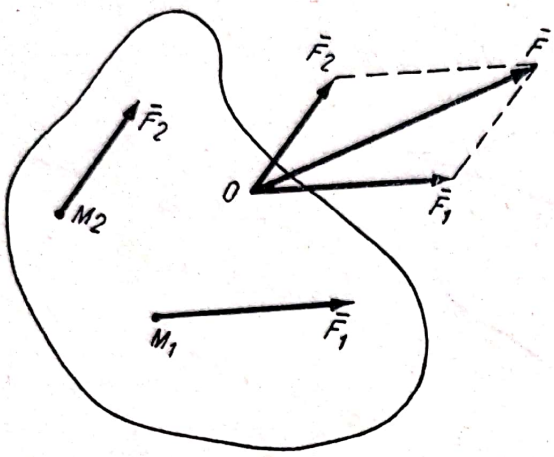


Fig. 82

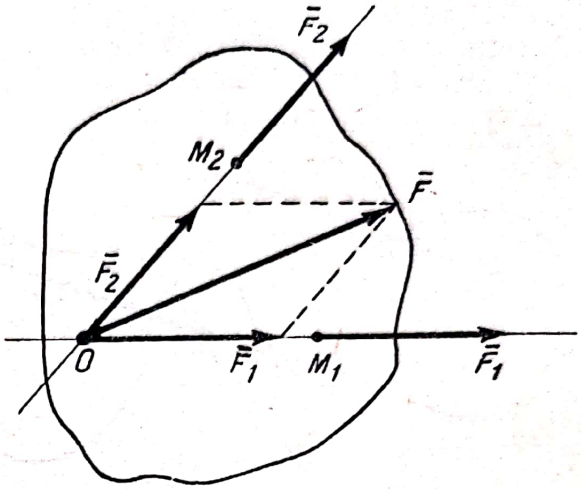


Fig. 83

de aplicație într-un punct O pentru a se afla rezultanta lor, $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$, deoarece efectul forței $\bar{F}$ este cu totul altul decît efectul comun al forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ aplicate în M_1 și M_2.

Însă, dacă într-o problemă oarecare nu interesează poziția originii vectorilor, de pildă dacă în situația corpului acționat ca în figura 82 s-ar cere numai *suma vectorială a forțelor*, se pot folosi operațiile algebrei vectoriale — definite pentru vectorii liberi — și în cazul vectorilor legați și alunecători.

b. Spre deosebire de un vector liber, caracterizat prin direcție, sens și modul, vectorul alunecător este caracterizat prin *suport*, *sens* și *modul*.

Se înțelege că un suport determină o direcție, *însă direcția nu determină complet suportul.*

Faptul că forța aplicată unui solid rigid este reprezentată printr-un vector alunecător aduce simplificări importante în mecanică. Astfel, dacă asupra unui solid rigid sînt aplicate forțele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ avînd suporturile concurente în punctul O (fig. 83), ele pot fi aduse *prin alunecare* cu punctele de aplicație din M_1 și M_2 în O și, în baza principiului paralelogramului forțelor, pot fi înlocuite cu rezultanta lor $\bar{F}$, *echivalentă* cu sistemul celor două forțe $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$. Această simplificare, înlesnită de operația de alunecare a forței pe suportul ei, se numește *reducerea unui sistem de forțe.*

În cele ce urmează se va studia problema reducerii sistemelor de forțe aplicate unui solid rigid.

§ 38. Operațiile elementare de echivalență

În paragraful precedent s-a arătat că prin alunecarea forțelor pe suporturile lor și prin înlocuirea a două forțe aplicate în același punct prin rezultanta lor, nu se schimbă efectul forțelor. Asemenea operații care, cu toate că modifică așezarea și chiar componenta sistemului de forțe, nu schimbă

efectul sistemului, se numesc *operaţii de echivalenţă*. După efectuarea acestor operaţii, noul sistem de forţe este *echivalent* cu vechiul sistem.

Cele mai simple operaţii de echivalenţă, denumite *operaţii elementare de echivalenţă*, sînt următoarele :

1° *alunecarea unei forţe pe suportul ei*[1];

2° *adăugarea, la sistemul de forţe, a unei perechi de forţe egale şi opuse situate pe acelaşi suport*[2];

3° *suprimarea, din sistemul de forţe, a unei perechi de forţe egale şi opuse situate pe acelaşi suport*;

4° *înlocuirea a două forţe aplicate în acelaşi punct prin rezultanta lor*;

5° *înlocuirea unei forţe prin componentele ei după două drepte care trec prin punctul de aplicaţie al forţei şi sînt situate în acelaşi plan cu forţa.*

După cum s-a văzut, operaţia 1° îşi găseşte justificarea în ipoteza solidului rigid, iar operaţiile 2°, 3°, 4° şi 5° sînt consecinţe ale principiului paralelogramului forţelor (vezi § 9).

Aceste operaţii elementare de echivalenţă servesc la reducerea unor sisteme de forţe la sisteme echivalente cît mai simple.

Deoarece în mecanică se mai întîlnesc şi alte mărimi care pot fi reprezentate prin vectori alunecători, în capitolul de faţă, intitulat „*Teoria vectorilor alunecători*“, se vor studia probleme de reducere a sistemelor de vectori alunecători fără a se preciza mărimea fizică şi fenomenul pe care aceşti vectori alunecători le reprezintă, cu condiţia ca mărimile vectoriale, reprezentate prin vectori alunecători, să rămînă echivalente cu forma lor iniţială, după ce au suferit transformări prin operaţii elementare.

§ 39. Momentul unui vector alunecător în raport cu un punct

a. S-a văzut că un vector alunecător este determinat prin direcţie, sens, modul, ca orice vector liber $\overline{V}$, şi în plus prin condiţia ca să se găsească, pe o dreaptă dată, *suportul* (D) al vectorului alunecător (fig. 84).

Pentru a-l deosebi de un vector liber $\overline{V}$, cu care are comune direcţia, sensul şi modulul, vectorul alunecător se va nota prin $(\overline{V}, D)$.

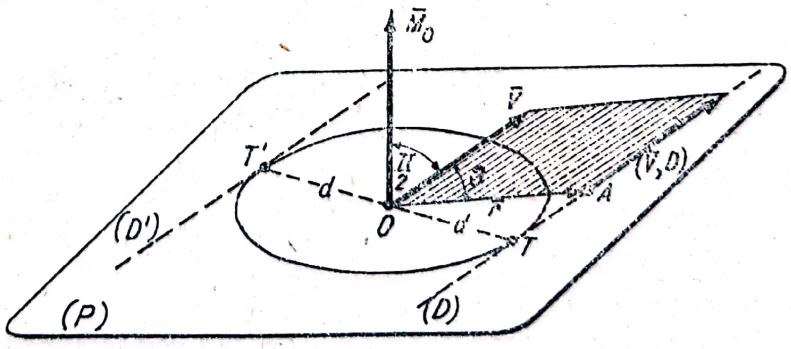


Fig. 84

[1] Cu condiţia ca punctul de aplicaţie al forţei să fie tot un punct al solidului rigid asupra căruia acţionează forţa, iar operaţia să nu-i schimbe sensul forţei.

[2] Prescurtat, forţe egale şi direct opuse.

Poziția suportului se poate determina, în raport cu un reper O, dacă sînt date următoarele elemente geometrice:

1° planul (P) care trece prin O și conține suportul D;

2° direcția suportului;

3° distanța d de la O la suport.

În adevăr, dacă se construiește în planul (P) cercul cu centrul în O și raza egală cu d, suportul poate fi una din cele două tangente la cerc paralele cu direcția dată.

b. Pentru a preciza care din cele două tangente este suportul căutat, se consideră un vector $\overline{V}$ cu aceeași direcție, același sens și modul cu $(\overline{V}, D)$, însă cu originea în O. Pe una din tangentele construite, de exemplu (D), cu originea într-un punct arbitrar A, se figurează vectorul alunecător $(\overline{V}, D)$. Punctele O, A și vîrfurile vectorilor $\overline{V}$ și $(\overline{V}, D)$ formează un paralelogram. Dacă se presupune că vectorii reprezintă mărimi geometrice, iar $\overline{r}$ este vectorul de poziție al punctului A, în raport cu un reper cu originea în O, aria paralelogramului se poate scrie în două moduri:

$$|\overline{V}|\, d = |\overline{V}|\, |\overline{r}| \sin \theta. \tag{4.1}$$

În partea a II-a a egalității se găsește modulul produsului vectorial $\overline{r} \times \overline{V}$ și care este un vector $\overline{M}_o$, legat de O, perpendicular pe planul (P) și astfel orientat încît triedrul format cu $\overline{OA}$, $\overline{V}$, $\overline{M}_o$ să fie drept.

Se observă următoarele:

1° $\overline{M}_o$ nu depinde de poziția originii A a vectorului alunecător pe suport;

2° dacă se alege ca suport cealaltă tangentă la cerc, vectorul care reprezintă produsul vectorial își schimbă sensul;

3° dacă pe lîngă vectorul liber $\overline{V}$ mai este cunoscut și vectorul $\overline{M}_o$ legat de punctul O, vectorul alunecător $(\overline{V}, D)$ este determinat, fără ambiguitate, în raport cu reperul cu originea în O.

În adevăr, planul perpendicular în O pe direcția lui $\overline{M}_o$ este planul (P). Distanța d este determinată prin relația:

$$d = \frac{|\overline{V}|\, |\overline{r}| \sin \theta}{|\overline{V}|} = \frac{|\overline{M}_o|}{|\overline{V}|}, \tag{4.2}$$

dedusă din (4.1). Tangentele la cerc se construiesc paralele cu direcția cunoscută a lui $\overline{V}$. Dintre cele două tangente construite, suportul se alege astfel încît triedrul vectorilor $\overline{OA}$, $\overline{V}$, $\overline{M}_o$ să fie drept.

În consecință, *un vector alunecător* $(\overline{V}, D)$ *este perfect determinat prin vectorul liber* $\overline{V}$, *avînd direcția, sensul și modulul vectorului* $(\overline{V}, D)$, *și prin vectorul* $\overline{M}_o$, *legat de punctul* O, *cu direcția perpendiculară pe* $\overline{V}$.

Prin definiție, produsul vectorial:

$$\overline{M}_o = \overline{r} \times \overline{V}, \tag{4.3}$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziție, în raport cu un reper cu originea în O, al unui punct arbitrar A de pe suportul (D) al unui vector alunecător $(\bar{V}, D)$, se numește *momentul* vectorului în raport cu punctul O (fig. 85).

c. *Observații și consecințe.* 1° Proprietățile momentului unui vector alunecător în raport cu un punct se deduc din cele ale produsului vectorial.

2° Momentul unui vector alunecător $(\bar{V}, D)$ în raport cu un punct O se anulează fie dacă se anulează $\bar{r}$, fie dacă $\bar{r}$ și $\bar{V}$ sînt coliniari; ambele condiții echivalează cu condiția ca suportul (D) să treacă prin punctul O.

3° Momentul este un vector perpendicular pe planul determinat de punctul O și de suportul (D), în sensul în care vectorii $\overline{OA}$, $\bar{V}$ și $\bar{M}_o$ formează un triedru la fel orientat cu triedrul drept (triedrul care orientează spațiul). Modulul momentului este egal cu produsul $|\bar{V}|\, d$, dintre modulul vectorului alunecător și distanța punctului O pînă la suportul vectorului alunecător.

4° Momentul unui vector alunecător $(\bar{V}, D)$ în raport cu un punct O este un *invariant* față de operația de alunecare a vectorului pe suport. Această proprietate este evidentă, deoarece, oricare ar fi poziția originii A pe suportul (D), planul (P) este același, deci direcția momentului nu se modifică. De asemenea nu se modifică nici sensul momentului și nici modulul lui, deoarece atît sensul lui $\bar{V}$, $|\bar{V}|$ cît și d nu se schimbă.

5° Noțiunea de moment este fără semnificație pentru un vector liber. În adevăr, dacă (D) și (D') sînt două din mulțimea dreptelor paralele pe care poate fi așezat vectorul liber $\bar{V}$ (fig. 86) și dacă momentul în raport cu un același punct al unui vector liber ar avea o semnificație, ar trebui ca momentul să fie același, oricare ar fi poziția vectorului liber, adică:

$$\bar{M}_o = \bar{r} \times \bar{V} \text{ și } \bar{M}'_o = \bar{r}' \times \bar{V}$$

să fie egali.

Dar:

$$\bar{M}'_o = \bar{r}' \times \bar{V} = (\bar{r} + \overline{AA'}) \times \bar{V} = \bar{r} \times \bar{V} + \overline{AA'} \times \bar{V}$$

$$\bar{M}'_o = \bar{M}_o + \overline{AA'} \times \bar{V},$$

expresiile fiind inegale, cel de-al doilea termen $\overline{AA'} \times \bar{V}$ nu se anulează decît dacă $\overline{AA'}$ este paralel cu $\bar{V}$, adică dacă vectorul este alunecător sau dacă

$$\overline{AA'} = O,$$

adică, dacă vectorul este legat de punctul A.

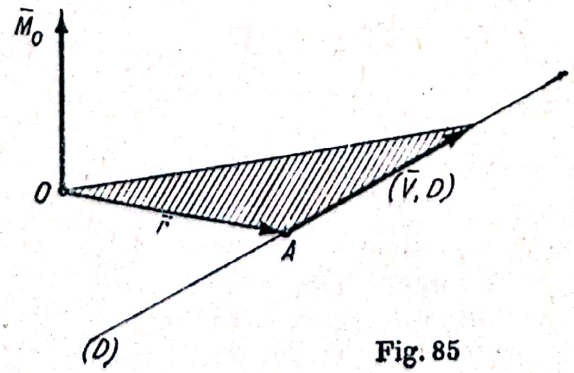


Fig. 85

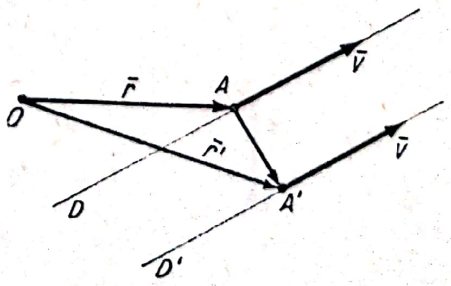


Fig. 86

6° Deoarece un vector alunecător $(\bar{V}, D)$ este determinat printr-un vector liber $\bar{V}$ şi prin momentul $\bar{M}_o$ al vectorului alunecător în raport cu un punct O, pe lîngă $(\bar{V}, D)$ se va mai folosi şi notaţia $(\bar{V}, \bar{M}_o)$. Vectorii $\bar{V}$ şi $\bar{M}_o$ sînt *coordonatele vectoriale* ale vectorului alunecător în raport cu sistemul de referinţă cu originea în punctul O.

§ 40. Momentul unui vector alunecător în raport cu o axă

a. Se consideră un vector alunecător $(\bar{V}, D)$ şi o dreaptă (Δ) determinată prin două puncte O_1 şi O_2, nesituate pe suportul (D) al vectorului alunecător (fig. 87).

Calculînd momentele vectorului $\bar{V}$ în raport cu punctele O_1 şi O_2, se găseşte :

$$\bar{M}_1 = \overline{O_1A} \times \bar{V}$$
$$\bar{M}_2 = \overline{O_2A} \times \bar{V}$$
$$\bar{M}_2 = \bar{M}_1 + \overline{O_2O_1} \times \bar{V} \qquad (4.4)$$

sau

$$\bar{M}_2 - \bar{M}_1 = \overline{O_2O_1} \times \bar{V},$$

adică : *diferenţa momentelor unui vector alunecător în raport cu două puncte arbitrare O_2 şi O_1 este egală cu momentul, în raport cu O_2, al unui vector care are aceleaşi caracteristici cu vectorul alunecător, cu excepţia originii care este în O_1.*

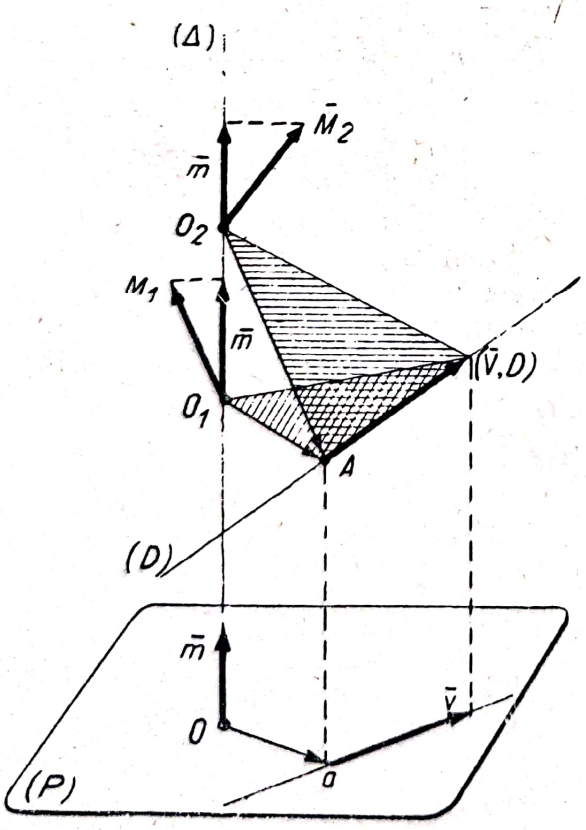


Fig. 87

Dacă, cu ajutorul versorului $\bar{u}$, dreapta (Δ) devine o axă şi dacă se multiplică relaţia (4.4) scalar cu $\bar{u}$:

$$\bar{M}_2\bar{u} = \bar{M}_1\bar{u} + (\overline{O_2O_1} \times \bar{V})\bar{u},$$

unde, deoarece $\bar{u}$ şi $\overline{O_2O_1}$ sînt coliniari :

$$(\overline{O_2O_1} \times \bar{V})\bar{u} = (\bar{u} \times \overline{O_2O_1})\bar{V} = 0,$$

se deduce :

$$\bar{M}_2\bar{u} = \bar{M}_1\bar{u} \qquad (4.5)$$

sau :

$$(\overline{O_2A} \times \bar{V})\bar{u} = (\overline{O_1A} \times \bar{V})\bar{u};$$

adică : valorile proiecţiilor momentelor vectorului $(\bar{V}, D)$ în raport cu două puncte arbitrare ale unei axe, pe direcţia axei, sînt egale şi nu depind de poziţiile punctelor. Cum

momentele nu depind de operaţia de alunecare a vectorului $\overline{V}$ pe suport, nici proiecţiile lor nu depind de această operaţie.

În consecinţă : *proiecţia pe direcţia unei axe a momentului unui vector alunecător în raport cu un punct al axei este un invariant faţă de deplasarea punctului de pe axă şi faţă de operaţia de alunecare a vectorului pe suport.*

Acest invariant se numeşte momentul vectorului alunecător în raport cu axa.

b. *Observaţii şi consecinţe:* 1° Potrivit convenţiei de la § 20 — proiecţia unui vector pe direcţia unei axe fiind un vector — şi momentul unui vector alunecător în raport cu axa este tot un vector.

2° Deoarece momentul în raport cu axa (Δ) este un invariant faţă de deplasarea punctului de pe axă, în raport cu care se consideră momentul vectorului alunecător ($\overline{V}$, D), momentul în raport cu axa este tot un *vector alunecător*, cu deosebirea că momentul este asociat altor fenomene decît vectorul ($\overline{V}$, D).

3° Dacă se notează cu $\overline{m}$ momentul vectorului alunecător ($\overline{V}$, D) în raport cu axa (Δ), $\overline{m}\,\overline{u}$ este valoarea acestui moment în raport cu versorul $\overline{u}$ al axei (Δ).

4° Aplicînd operaţia de permutare a vectorilor unui produs mixt şi aceea de înlocuire a unui vector din produsul vectorial prin proiecţia lui pe un plan perpendicular pe celălalt, valoarea momentului unui vector alunecător ($\overline{V}$, D) în raport cu axa (Δ) :

$$\overline{m}\overline{u} = (\overline{O_1A} \times \overline{V})\overline{u},$$

se poate scrie succesiv :

$$\overline{m}\overline{u} = (\overline{V} \times \overline{u})\overline{O_1A} = (\overline{v} \times \overline{u})\overline{O_1A},$$

unde $\overline{v}$ este proiecţia vectorului $\overline{V}$ pe un plan (P) perpendicular pe $\overline{u}$ (fig. 87), apoi :

$$\overline{m}\overline{u} = (\overline{v} \times \overline{u})\overline{O_1A} = (\overline{u} \times \overline{O_1A})\overline{v} = (\overline{u} \times \overline{Oa})\overline{v},$$

unde $\overline{Oa}$ este proiecţia vectorului $\overline{O_1A}$ pe planul (P), se ajunge pînă la sfîrşit la :

$$\overline{m}\overline{u} = (\overline{Oa} \times \overline{v})\overline{u}.$$

Deoarece $\overline{m}$ şi $\overline{Oa} \times \overline{v}$ sînt coliniari, rezultă :

$$\overline{m} = \overline{Oa} \times \overline{v}, \tag{4.6}$$

adică : *momentul unui vector alunecător în raport cu o axă este egal cu momentul proiecţiei vectorului pe un plan perpendicular pe axă în raport cu punctul în care axa înţeapă planul.*

5° Momentul $\overline{m}$ al unui vector alunecător în raport cu o axă (Δ) se anulează dacă se anulează $\overline{Oa}$, dacă $\overline{Oa}$ este coliniar cu $\overline{v}$ sau dacă $\overline{v}$ este nul. Primele două condiţii sînt satisfăcute dacă suportul vectorului alunecător întîlneşte axa (Δ), ultima condiţie este satisfăcută dacă suportul este paralel cu (Δ).

Deci, în general :

Momentul unui vector alunecător în raport cu o axă este nul ori de cîte ori suportul vectorului şi axa sînt în acelaşi plan.

Scanned with OKEN Scanner

§ 41. Expresii analitice în legătură cu momentul unui vector

a. Coordonatele unui vector liber $\bar{V}$ în raport cu axele unui triedru $Oxyz$ sînt X, Y, Z, iar cele ale unui vector legat de un punct sînt X, Y, Z, x, y, z (v. § 24).

Un vector legat de un punct se poate nota prin $(\bar{V}, \bar{r})$, unde $\bar{r}$ este vectorul de poziţie, în raport cu originea sistemului de referinţă, al punctului A de care este legat vectorul (fig. 88). Cele şase coordonate ale unui vector constant, legat de un punct fix, au valori bine determinate. Coordonatele originii unui vector liber sînt trei *parametri independenţi*, care pot primi orice valori. În aceste condiţii, se spune că un vector liber are trei grade de libertate, iar vectorul legat nu are nici un grad de libertate.

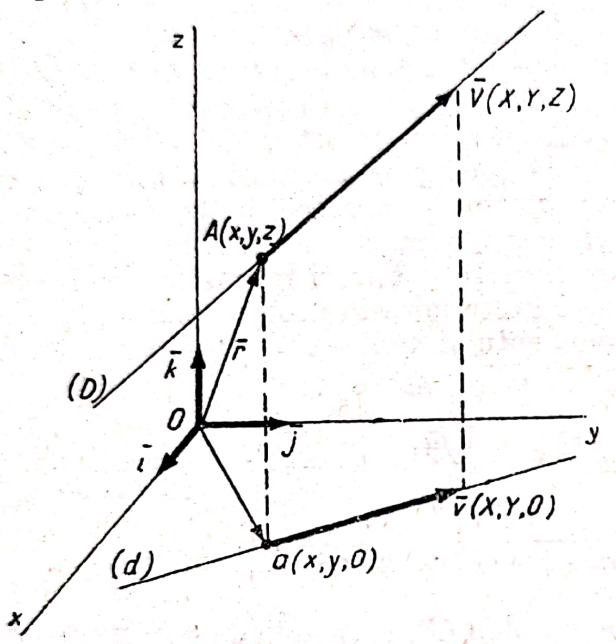


Fig. 88

În cazul unui vector alunecător $(\bar{V}, D)$ constant, coordonatele x, y, z ale originii satisfac ecuaţiile suportului (D):

$$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma}.$$

Deci între cele trei coordonate există două condiţii.

Cu ajutorul ecuaţiilor suportului se pot exprima două din coordonatele originii în funcţie de cea de-a treia care rămîne nedeterminată, parametru independent.

Deci un vector alunecător are un singur grad de libertate, libertatea originii de a se deplasa pe o linie dreaptă dată.

În plan, un vector liber are două grade de libertate, deoarece, în plan, un punct are numai două coordonate. Un vector alunecător are, în plan, un singur grad de libertate, iar un vector legat de un punct fix, nici un grad de libertate.

b. Expresia analitică a momentului unui vector alunecător sau legat, în raport cu originea O a sistemului de referinţă $Oxyz$, se obţine înlocuind în relaţia de definiţie:

$$\bar{M}_o = \bar{r} \times \bar{V}$$

expresiile complexe ale vectorilor $\bar{r}$ şi $\bar{V}$:

$$\bar{M}_o = (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) \times (X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}).$$

Rezultatul calculelor este:

$$\bar{M}_o = (yZ - zY)\bar{i} + (zX - xZ)\bar{j} + (xY - yX)\bar{k} = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k}. \tag{4.7}$$

Cei trei termeni din (4.7) reprezintă componentele și, în același timp, proiecțiile pe axele Ox, Oy și Oz ale momentului vectorului în raport cu punctul O; deci reprezintă chiar momentele vectorului în raport cu axele triedrului tridreptunghic cu originea în O. Uneori, se folosește relația (4.7) scrisă sub forma unui determinant simbolic:

$$\overline{M}_o = \begin{vmatrix} \bar{i} & j & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \tag{4.8}$$

În cazul particular al unui vector alunecător sau legat, situat într-un plan, de exemplu în planul Oxy, se poate calcula la fel momentul vectorului în raport cu punctul O.

Dacă X, Y, x, y sînt cele patru coordonate ale vectorului $\bar{v}$ din planul Oxy (fig. 88), expresia complexă a momentului în raport cu O este:

$$\overline{M}_o = (x\bar{i} + y\bar{j}) \times (X\bar{i} + Y\bar{j}) = (xY - yX)\bar{k} = M_z\bar{k}. \tag{49}$$

c. *Observații.* 1° Dacă $\bar{v}$ este proiecția vectorului $\overline{V}$ din spațiu pe planul Oxy, din compararea relațiilor (4.7) și (4.9) rezultă că: momentul, în raport cu o axă, al unui vector alunecător sau legat este egal cu momentul proiecției vectorului pe un plan perpendicular pe axă în raport cu punctul în care axa înțeapă planul, adică o verificare a proprietății stabilite la § 40, *b*, 4°.

2° Valorile momentelor vectorului alunecător sau legat, în raport cu cele trei axe Ox, Oy și Oz, sînt:

$$M_x = yZ - zY, \quad M_y = zX - xZ, \quad M_z = xY - yX.$$

Cum valorile proiecțiilor vectorului $\overline{V}$ pe aceleași axe sînt:

$$X \quad Y \quad Z$$

și deoarece:

$$XM_x + YM_y + ZM_z = X(yZ - zY) + Y(zX - xZ) + Z(xY - yX) \equiv 0,$$

adică:

$$\overline{V}\overline{M}_o = 0, \tag{4.10}$$

se verifică astfel că momentul, în raport cu un punct al vectorului alunecător, este perpendicular pe direcția vectorului.

3° Deoarece coordonatele vectoriale ale unui vector alunecător $(\overline{V}, D)$ sînt vectorul liber $\overline{V}$ și vectorul $\overline{M}_o$ legat de O, vezi § 39, *b*, 6°, între care există condiția (4.10), coordonatele analitice ale aceluiași vector, în raport cu triedrul tridreptunghic $Oxyz$, sînt X, Y, Z, M_x, M_y și M_z, între care există relația:

$$XM_x + YM_y + ZM_z = 0. \tag{4.11}$$

Scanned with OKEN Scanner

d. *Aplicații.* 1° Să se calculeze și să se figureze momentele vectorului $\overline{V}$ situat pe diagonala DF a unui cub $OABCDEFG$ de muchie a (fig. 89), în raport cu:
— vîrfurile G, A, B, C și O;
— muchiile BF, OA, OB, OC;
— diagonala OG.

2° Să se calculeze expresiile complexe ale momentelor vectorului $\overline{V}$ din aplicația 1°, în raport cu axele triedrului $Oxyz$ (fig. 89).

3° Să se calculeze momentele unui vector alunecător $\overline{V}'$ situat pe diagonala OG (fig. 89), în raport cu axele AD, BD, AE și AB.

4° Se consideră o bară rigidă AB acționată de forțele $\overline{G}$, $\overline{T}$, $\overline{N}_1$ și $\overline{N}_2$, în același plan cu bara ca în figura 90; forțele $\overline{G}$ și $\overline{T}$ sînt verticale, iar $\overline{N}_1$ are direcția după orizontală.

Să se calculeze suma momentelor tuturor forțelor în raport cu punctul O, apoi în raport cu punctul A și în fine în raport cu punctul B.

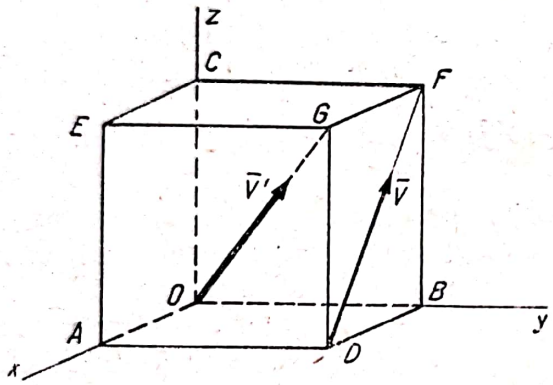


Fig. 89

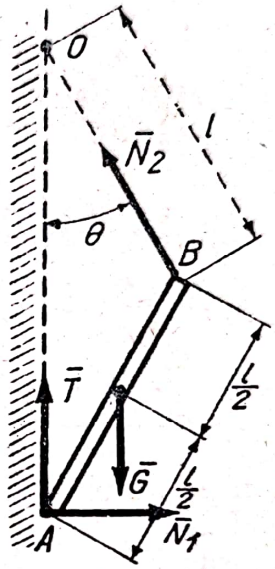


Fig. 90

B. REDUCEREA UNUI SISTEM DE VECTORI ALUNECĂTORI

§ 42. Vectori cu suporturi concurente. Vector rezultant. Moment rezultant. Teorema momentelor

a. Se consideră un număr n finit de vectori alunecători cu suporturile concurente într-un punct A. Se notează cu $\overline{V}_i$ unul din vectori ($i = 1,2, 3,..., n$). Prin alunecare se aduc vectorii cu originile în A. Se compun primii doi vectori, iar rezultatul compunerii cu cel de-al treilea vector ș.a.m.d., pînă cînd, rămînînd numai doi vectori, se obține, după compunerea lor, *vectorul rezultant al sistemului.*

Operația de reducere se poate simplifica: pornind dintr-un punct arbitrar O se construiește poligonul vectorilor prin așezarea lor cap la cap ca și cum ar fi liberi. Rezultatul obținut reprezintă *vectorul sumă*:

$$\overline{V} = \sum_{i=1}^{n} \overline{V}_i. \qquad (4.12)$$

Construind un vector egal cu $\bar{V}$, dar pe paralela dusă din A la vectorul sumă $\bar{V}$, se obține vectorul rezultant al sistemului. În figura 91 este dat un exemplu de reducere pentru patru vectori concurenți. Poligonul vectorilor este construit în figura 91, *b*, iar vectorul rezultant în figura 91, *a*.

În general, se pot ivi următoarele două cazuri:

1° Poligonul vectorilor nu se închide de la sine, vectorul sumă este diferit de zero, sistemul se reduce la un *vector rezultant* cu originea în A.

2° Poligonul vectorilor se închide de la sine, vectorul sumă este nul, *sistemul este echivalent cu zero.*

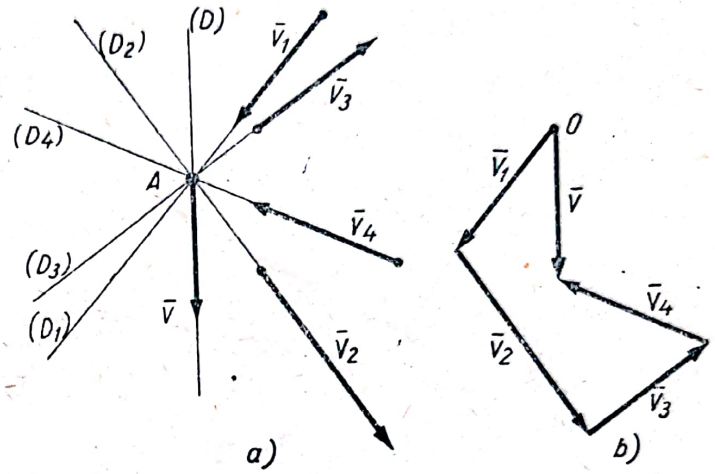


Fig. 91

b. Observații. 1°. Dacă vectorii alunecători reprezintă forțe, în primul caz sistemul de forțe se reduce la o *rezultantă*, iar în cel de-al doilea caz, se *echilibrează.*

2° Cazul particular al unui sistem de vectori alunecători situați pe același suport se rezolvă imediat numai prin așezarea vectorilor cap la cap pe suportul lor comun.

3° Calculul analitic al vectorului rezultant se deduce din calculul vectorului sumă, așa după cum s-a determinat vectorul sumă în exemplul din § 24, și apoi se scrie ecuația suportului, care este o dreaptă determinată de punctul A și de direcția vectorului sumă.

c. *Teorema momentelor.* Vectorul rezultant al sistemului de vectori alunecători cu suporturi concurente în același punct se poate determina și altfel. Se știe (§ 39) că vectorul sumă și momentul, în raport cu un punct oarecare, determină vectorul alunecător. Relația (4.12) stabilește caracteristicile vectorului sumă, care sînt comune cu cele ale vectorului rezultant, dar nu se cunoaște momentul vectorului rezultant.

În schimb se pot calcula momentele vectorilor sistemului.

Definiție. *Momentul rezultant al unui sistem de vectori alunecători este suma vectorială a momentelor vectorilor sistemului.*

Iar momentul vectorului rezultant se obține prin *teorema momentelor vectoriale*, care are enunțul următor:

Momentul, în raport cu un punct al vectorului rezultant al unui sistem de vectori alunecători cu suporturi concurente, este egal cu momentul rezultant, în raport cu același punct, al sistemului[1].

[1] Teorema a fost enunțată de *Varignon* (1654—1722) pentru cazul unui sistem de forțe care se reduce la o *rezultantă unică.*

I se dă uneori teoremei și următorul enunț concis: *Momentul rezultantei este egal cu momentul rezultant (rezultanta momentelor componentelor).*

Se va demonstra teorema pentru cazul a doi vectori alunecători cu suporturile concurente. Se consideră vectorii alunecători $(\bar{V}_1, D_1)$ și $(\bar{V}_2, D_2)$ cu suporturile concurente în A (fig. 92). Se notează cu $\bar{r}$, $\bar{r}_1$ și $\bar{r}_2$ vectorii de poziție ai punctelor A, A_1 și A_2 în raport cu un punct oarecare O, originea sistemului de referință, iar cu $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ și $\bar{M}_o$ momentele, în raport cu O, ale vectorilor alunecători și al vectorului rezultant $(\bar{V}, D)$.

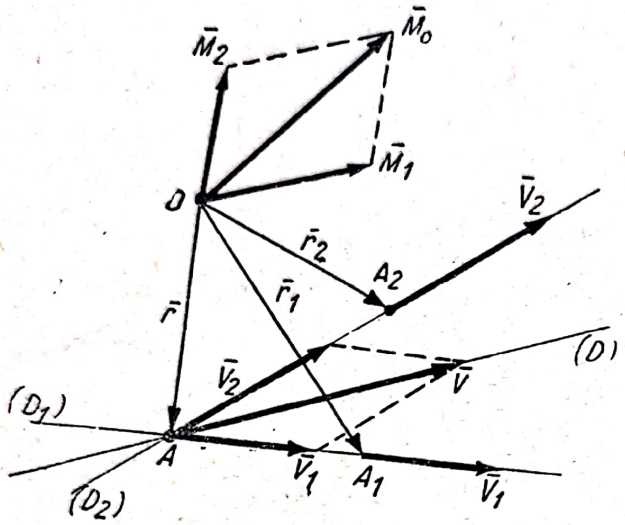


Fig. 92

Se pot scrie următoarele relații :

$$\bar{M}_1 = \bar{r}_1 \times \bar{V}_1 = \bar{r} \times \bar{V}_1$$
$$\bar{M}_2 = \bar{r}_2 \times \bar{V}_2 = \bar{r} \times \bar{V}_2$$
$$\bar{M}_o = \bar{r} \times \bar{V}.$$

Adunînd :

$$\bar{M}_1 + \bar{M}_2 = \bar{r} \times \bar{V}_1 + \bar{r} \times \bar{V}_2 = \bar{r} \times (\bar{V}_1 + \bar{V}_2)$$

și deoarece :

$$\bar{V}_1 + \bar{V}_2 = \bar{V},$$

se obține :

$$\bar{r} \times \bar{V} = \bar{r}_1 \times \bar{V}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{V}_2,$$

adică :

$$\bar{M}_o = \bar{M}_1 + \bar{M}_2. \quad \text{c.c.t.d.} \tag{4.13}$$

d. *Observații.* 1° Teorema momentelor este o consecință a proprietății de distributivitate a produsului vectorial în raport cu operația de însumare.

2° Teorema se demonstrează, prin metoda inducției complete, pentru un număr oarecare n (finit) de vectori alunecători cu suporturile concurente.

3° Multiplicînd relația (4.13) scalar cu $\bar{u}$, versorul unei axe (Δ) care trece prin O :

$$\bar{M}_o\bar{u} = \bar{M}_1\bar{u} + \bar{M}_2\bar{u},$$

se conchide că teorema se aplică și pentru momentele în raport cu o axă, cu următorul enunț :

Momentul vectorului rezultant al unui sistem de vectori alunecători cu suporturi concurente, în raport cu o axă, este egal cu momentul rezultant al sistemului în raport cu aceeași axă.

4° Este util de reținut faptul că teorema momentelor vectoriale în raport cu o axă se exprimă printr-o relație algebrică.

La fel, în cazul cînd suporturile vectorilor alunecători se află în același plan în care se alege și punctul O la care sînt raportate momentele, relația la care se ajunge este tot algebrică.

Scanned with OKEN Scanner

e. *Aplicații.* 1° Se consideră vectorii $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$ și $\bar{V}_3$, formînd între ei unghiuri de 120°, avînd modulele egale, suporturile în același plan și concurente în O (fig. 93). Să se calculeze suma momentelor în raport cu un punct arbitrar O', din același plan, și să se explice de ce rezultatul nu depinde de poziția punctului O'.

2° Să se calculeze momentul vectorului rezultant al sistemului de vectori alunecători cu suporturile concurente (fig. 94) și cu modulele:

$$|\bar{V}_2| = 2\,|\bar{V}_1|, \qquad |\bar{V}_3| = 3\,|\bar{V}_1|,$$

în raport cu punctul B.

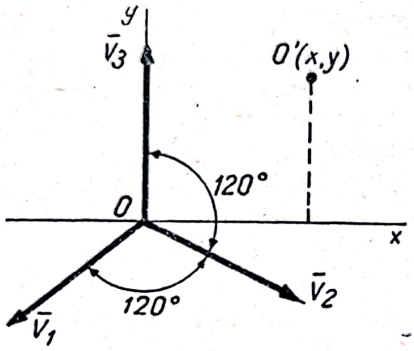


Fig. 93

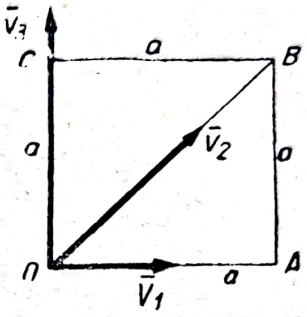


Fig. 94

3° Pe muchiile SA, SB și SC ale piramidei $SOABC$, cu baza un pătrat de latură a și înălțimea $SO = \frac{a}{3}$, sînt așezați vectorii avînd modulele egale cu lungimile muchiilor respective (fig. 95). Să se calculeze:

— momentele vectorului rezultant în raport cu axele OA, OB și OC și poziția punctului în care suportul vectorului rezultant întîlnește planul $OABC$.

§ 43. Cazul unui sistem de doi vectori alunecători cu suporturi paralele

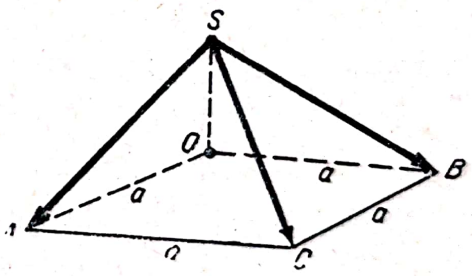


Fig. 95

a. Se consideră doi vectori alunecători $(\bar{V}_1, D_1)$ și $(\bar{V}_2, D_2)$ cu suporturi paralele. Se aplică operațiile elementare de echivalență pentru a transforma sistemul celor doi vectori cu suporturi paralele într-un *sistem echivalent* de vectori cu suporturile concurente. Pentru aceasta:

1° Se adaugă în A_1 și A_2 (fig. 96), pe suportul A_1A_2, perechea de vectori alunecători $\bar{v}$, $\bar{v}'$, astfel ca: $\bar{v} + \bar{v}' = 0$.

2° Se înlocuiesc sistemele parțiale $\bar{v}$, $\bar{V}_1$ și $\bar{v}'$, $\bar{V}_2$, fiecare prin vectorul rezultant $\bar{V}'$, respectiv $\bar{V}''$:

$$\bar{V}' = \bar{v} + \bar{V}_1, \quad \bar{V}'' = \bar{v}' + \bar{V}_2.$$

În general, suporturile vectorilor $\bar{V}'$ și $\bar{V}''$ sînt concurente într-un punct A.

3° Se aduc, prin alunecare, vectorii $\bar{V}'$ și $\bar{V}''$ cu originea în A.

4° Se înlocuiesc vectorii $\bar{V}'$ și $\bar{V}''$ prin aceleași componente pe care le aveau în punctele A_1 și A_2.

5° Se suprimă componentele $\bar{v}$ şi $\bar{v}'$ din A, deoarece ele formează un sistem echivalent cu zero.

6° Celelalte componente sînt vectorii $\bar{V}_1$ şi $\bar{V}_2$ care, avînd acum acelaşi suport, dau vectorul rezultant:

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2,$$

un vector alunecător, a cărui origine poate fi deplasată oriunde pe suport, de exemplu în A', la intersecţia cu $A_1\,A_2$.

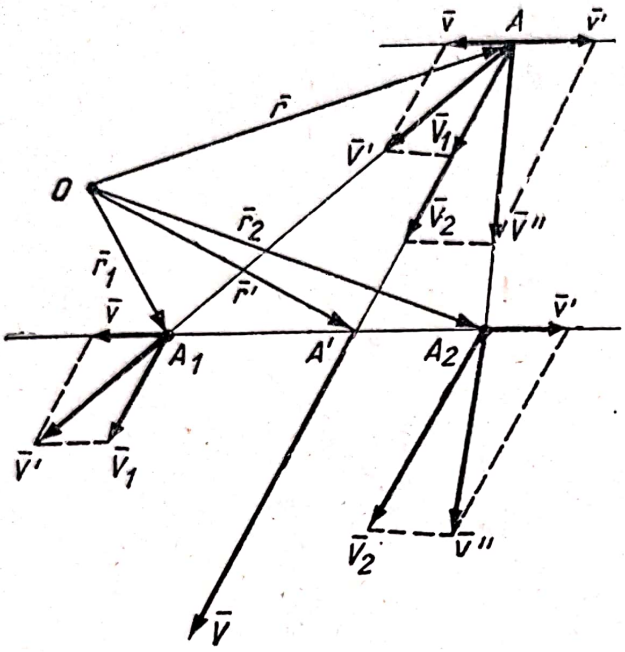


Fig. 96

Se demonstrează că teorema momentelor în raport cu un punct oarecare O este aplicabilă şi unui sistem de doi vectori alunecători, cu suporturile paralele, dacă sistemul se reduce la un *vector rezultant unic.*

Se notează cu $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}$ şi $\bar{r}'$ vectorii de poziţie ai punctelor A_1, A_2, A şi A' în raport cu reperul cu originea în O şi se exprimă:

$$\bar{M}_o = \bar{r}' \times \bar{V}, \quad \bar{M}_1 = \bar{r}_1 \times \bar{V}_1, \quad \bar{M}_2 = \bar{r}_2 \times \bar{V}_2,$$

momentul vectorului rezultant şi momentele vectorilor $\bar{V}_1$ şi $\bar{V}_2$ în raport cu O.

Trebuie demonstrat că:

$$\bar{M}_o = \bar{M}_1 + \bar{M}_2.$$

Deoarece vectorii $\bar{V}'$ şi $\bar{V}''$, rezultaţi din reducerile parţiale, sînt concurenţi în A, prin aplicarea teoremei momentelor se scrie:

$$\bar{r} \times \bar{V} = \bar{r} \times \bar{V}' + \bar{r} \times \bar{V}''.$$

Prin deplasarea vectorilor pe suporturile lor se poate transforma relaţia precedentă, succesiv, în:

$$\begin{aligned} \bar{r}' \times \bar{V} &= \bar{r}_1 \times \bar{V}' + \bar{r}_2 \times \bar{V}'' \\ &= \bar{r}_1 \times (\bar{v} + \bar{V}_1) + \bar{r}_2 \times (\bar{v}' + \bar{V}_2) \\ &= \bar{r}_1 \times \bar{v} + \bar{r}_1 \times \bar{V}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{v}' + \bar{r}_2 \times \bar{V}_2. \end{aligned}$$

Pe de altă parte:

$$\bar{r}_1 \times \bar{v} + \bar{r}_2 \times \bar{v}' = \bar{r}_1 \times \bar{v} + \bar{r}_2 \times (-\bar{v}) = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{v} = \overline{A_2A_1} \times \bar{v} = 0,$$

deoarece $\overline{A_2A_1}$ şi $\bar{v}$ sînt coliniari.

Deci:

$$\bar{r}' \times \bar{V} = \bar{r}_1 \times \bar{V}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{V}_2 \quad \text{c.c.t.d.}$$

Scanned with OKEN Scanner

b. *Observații.* 1° În general, o pereche de vectori alunecători cu suporturi paralele se reduce la un vector rezultant.

2° Uneori, această reducere este imposibilă. Cazul excepție apare ori de cîte ori prin aplicarea operațiilor elementare de echivalență nu se ajunge în nici un fel la transformarea sistemului de doi vectori cu suporturi paralele în altul cu suporturi concurente.

Adică, se poate, ca, după aplicarea operațiilor 1° și 2°, vectorii $\overline{V}'$ și $\overline{V}''$ să fie tot paraleli.

În acest caz, se înțelege : $\overline{V}' \times \overline{V}'' = 0$

sau :

$$(\bar{v} + \overline{V}_1) \times (\bar{v}' + \overline{V}_2) = \bar{v} \times \bar{v}' + \bar{v} \times \overline{V}_2 + \overline{V}_1 \times \bar{v}' + \overline{V}_1 \times \overline{V}_2 = 0;$$

dar :

$$\bar{v} \times \bar{v}' = 0 \text{ și } \overline{V}_1 \times \overline{V}_2 = 0,$$

fiind produse vectoriale de vectori coliniari, deci :

$$\bar{v} \times \overline{V}_2 + \overline{V}_1 \times \bar{v}' = \bar{v} \times \overline{V}_2 + \overline{V}_1 \times (-\bar{v}) = \bar{v} \times \overline{V}_2 + \bar{v} \times \overline{V}_1 = \\ = \bar{v} \times (\overline{V}_2 + \overline{V}_1) = 0.$$

Cum $\bar{v}$ este un vector arbitrar, necoliniar cu $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$ și diferit de zero, cazul ireductibil se caracterizează prin condiția :

$$\overline{V}_2 + \overline{V}_1 = 0,$$

adică :

Un sistem de doi vectori alunecători cu suporturi paralele, avînd același modul, dar sensuri contrarii, nu este reductibil la un vector rezultant.

Acest sistem se numește *cuplu de vectori alunecători.*

3° În aceste condiții, un sistem de doi vectori alunecători cu suporturi paralele este reductibil la un vector rezultant, ori de cîte ori suma vectorilor este diferită de zero (vectorii nu sînt opuși).

§ 44. Cuplul de vectori alunecători. Momentul cuplului. Proprietăți

a. Prin definiție, un cuplu de vectori alunecători este un sistem de doi vectori alunecători cu suporturi paralele, cu același modul, dar cu sensuri opuse.

Cuplul de vectori alunecători este ireductibil la un vector rezultant.

Cuplul este asociat cu alte fenomene decît vectorul alunecător.

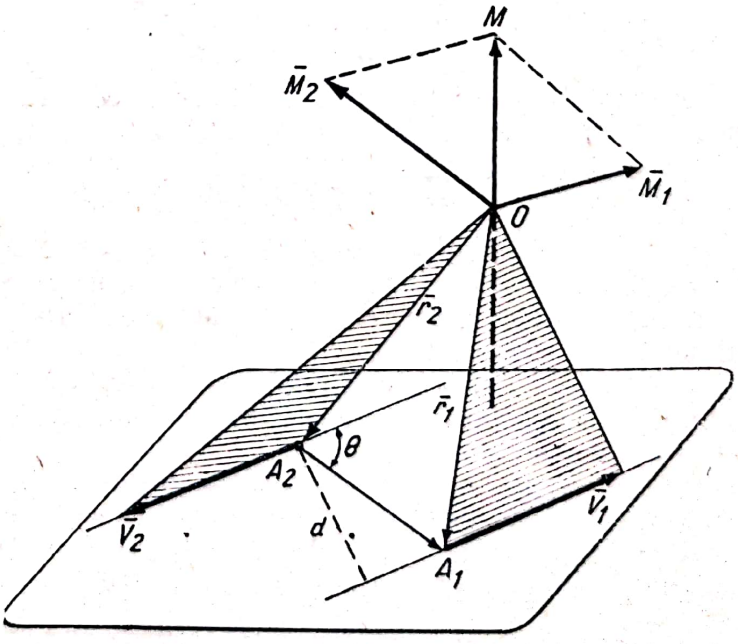


Fig. 97

Dacă $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$ sînt cei doi vectori alunecători ai cuplului (fig. 97), ei satisfac relația :

$$\overline{V}_1 + \overline{V}_2 = 0, \tag{4.14}$$

dar sistemul nu este echivalent cu zero, deoarece vectorii nu se află pe același suport, *nu sînt direct opuși.*

Sistemul fiind ireductibil, nu se poate aplica teorema momentelor, deoarece nu există vector rezultant.

Totuși, dacă se scriu expresiile momentelor vectorilor cuplului în raport cu un punct oarecare O din spațiu :

$$\overline{M}_1 = \bar{r}_1 \times \overline{V}_1, \quad \overline{M}_2 = \bar{r}_2 \times \overline{V}_2,$$

și dacă se adună momentele și se ține seama de relația (4.14) :

$$\overline{M}_1 + \overline{M}_2 = \bar{r}_1 \times \overline{V}_1 + \bar{r}_2 \times \overline{V}_2 = \bar{r}_1 \times \overline{V}_1 + \bar{r}_2 \times (-\overline{V}_1) = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \overline{V}_1 =$$

$$= \overline{A_2A_1} \times \overline{V}_1,$$

se constată următoarele :

Suma momentelor, în raport cu un punct oarecare, ale vectorilor cuplului nu depinde de poziția punctului.

Oricare ar fi punctul O din spațiu, vectorul care reprezintă suma momentelor și se notează cu $\overline{M}$ are aceeași expresie :

$$\overline{M} = \overline{A_2A_1} \times \overline{V}_1 \tag{4.15}$$

și depinde numai de momentul unuia din vectorii alunecători ai cuplului în raport cu un punct de pe suportul celuilalt.

Deci $\overline{M}$ *este un vector liber*, iar caracteristicile lui sînt :

— *direcția*, perpendiculară pe planul cuplului ;

— *sensul*, astfel încît un observator așezat între suporturile celor doi vectori în sensul vectorului moment să vadă originile vectorilor la dreapta și extremitățile la stînga sa, sau astfel încît triedrul construit cu vectorii $\overline{A_2A_1}$, $\overline{V}_1$, $\overline{M}$ să fie la fel orientat cu triedrul fundamental (triedru drept) — iar *modulul* :

$$|\overline{M}| = |\overline{V}_1| \, |\overline{A_2A_1}| \sin \theta = |\overline{V}_1| \, d,$$

adică să fie egal cu produsul modulului unuia din vectorii cuplului prin distanța d dintre suporturile vectorilor cuplului.

Vectorul liber $\overline{M}$ reprezintă *măsura* cuplului de vectori alunecători și se numește *momentul cuplului.*

Observație. Dacă vectorii cuplului reprezintă forțe aplicate unui solid rigid, momentul cuplului de forțe este *măsura* efectului cuplului de forțe în mișcarea de rotație a solidului.

b. *Echivalența a două cupluri de vectori alunecători.* Se demonstrează că *două cupluri de vectori alunecători, care au momente egale, sînt echivalente.*

Momentele fiind egale, planele celor două cupluri sînt paralele. Astfel, cuplul $(\bar{v}, \bar{v}')$ din planul (p) are momentul :

$$\overline{m} = \overline{ab} \times \bar{v},$$

iar cuplul $(\bar{V}, \bar{V}')$ din planul (P) are momentul:

$$\bar{M} = \overline{AB} \times \bar{V}.$$

Pentru demonstrație se aplică operațiile elementare de echivalență unuia din cupluri, transformîndu-l, cu ajutorul acestor operații, în celălalt cuplu (fig. 98).

Date:

$$\bar{v} + \bar{v}' = 0;\ \bar{V} + \bar{V}' = 0;\ \bar{m} = \bar{M}.$$

1° În planul (P) se consideră punctul C astfel ca:

$$\overline{AC} = \overline{ab}.$$

2° În punctul A se adaugă o pereche de vectori $\bar{v}$, $\bar{v}'$ care nu modifică sistemul de vectori alunecători, la fel se procedează și în punctul C.

3° Se înlocuiește sistemul de vectori alunecători paraleli $\bar{v}'$ din a și $\bar{v}'$ din C prin vectorul rezultant $2\bar{v}'$ din O, mijlocul segmentului aC. La fel, sistemul de vectori $\bar{v}$ din b și $\bar{v}$ din A este înlocuit prin vectorul rezultant $2\bar{v}$ care, evident, are originea tot în O.

4° Se suprimă perechea de vectori $2\bar{v}'$ și $2\bar{v}$ din O, deoarece formează un sistem echivalent cu zero.

După cum se vede, nu au mai rămas vectori decît în planul (P), și anume:

— cuplul $(\bar{v},\bar{v}')$ cu originile vectorilor în A și C, precum și

— cuplul $(\bar{V}, \bar{V}')$ neschimbat.

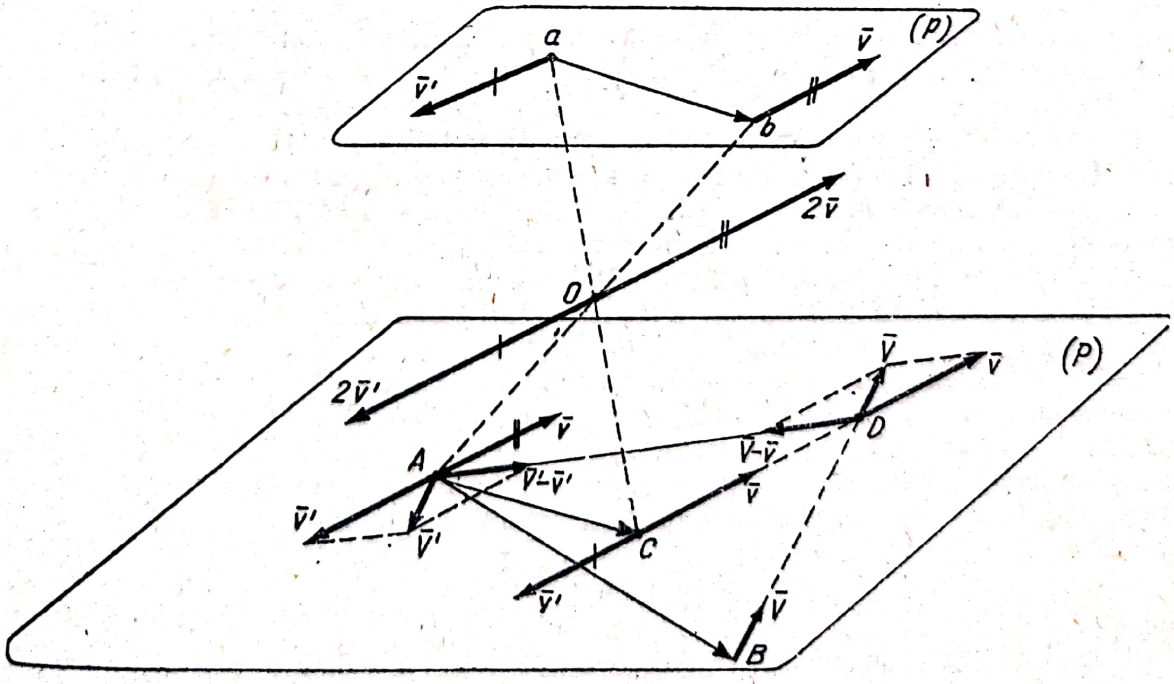


Fig. 98

Un prim rezultat: a fost mutat cuplul $(\bar{v}, \bar{v}')$ din planul (p) în planul (P) printr-o translație. În continuare:

5° Se aduce, prin alunecare, vectorul $\bar{v}$ din C în punctul D, intersecția suporturilor vectorilor $\bar{v}$ din C și $\bar{V}$ din B.

Se demonstrează că $\overline{AD}$ este coliniar cu $\bar{V} - \bar{v}$. În adevăr, din:

$$\bar{M} - \bar{m} = \overline{AB} \times \bar{V} - \overline{AD} \times \bar{v} = \overline{AD} \times \bar{V} - \overline{AD} \times \bar{v} = \overline{AD} \times (\bar{V} - \bar{v}) = 0,$$

cum:

$$\bar{V} - \bar{v} \neq 0$$

deoarece caracteristicile vectorilor celor două cupluri sînt diferite, atît în direcție cît și în modul, rezultă că $\overline{AD}$ este coliniar cu $\bar{V} - \bar{v}$.

6° Se adaugă cuplului $(\bar{v}, \bar{v}')$, din A și D, vectorii $\bar{V}' - \bar{v}'$ în A și $\bar{V} - \bar{v}$ în D și deoarece:

$$(\bar{V}' - \bar{v}') + (\bar{V} - \bar{v}) = (\bar{V} + \bar{V}') - (\bar{v} + \bar{v}') = 0,$$

acești vectori transformă cuplul într-unul echivalent.

7° Se înlocuiesc vectorii $\bar{v}'$ și $(\bar{V}' - \bar{v}')$ concurenți în A prin vectorul rezultant:

$$\bar{V}' = \bar{v}' + (\bar{V}' - \bar{v}');$$

la fel, se înlocuiesc vectorii $\bar{v}$ și $(\bar{V} - \bar{v})$ din D prin:

$$\bar{V} = \bar{v} + (\bar{V} - \bar{v}).$$

8° Se aduce, prin alunecare, vectorul rezultant $\bar{V}$ din D în B și se constată că:

Prin operații elementare de echivalență, aplicabile sistemelor de vectori alunecători, cuplul $(\bar{v}, \bar{v}')$ din planul (p) a fost transformat în cuplul $(\bar{V}, \bar{V}')$ din planul (P), *deci cele două cupluri sînt echivalente.* c.c.d.t.

c. *Consecințe și observații.* 1° Din mersul construcției și al demonstrației rezultă că se pot aplica unui cuplu următoarele operații de echivalență:

α) *să fie deplasat prin translație*, în același plan sau într-un alt plan, care, evident, trebuie să fie paralel cu primul;

β) *să fie deplasat și transformat* astfel încît originile vectorilor cuplului transformat să coincidă cu două puncte arbitrare date A și B, situate pe o dreaptă paralelă cu planul cuplului;

γ) de asemenea, un cuplu *poate fi rotit în planul său* în jurul unei axe perpendiculare pe plan sau *poate fi deformat*, adică *să i se modifice distanța* dintre suporturile vectorilor, cu condiția *să nu i se schimbe orientarea și nici modulul momentului său.* De pildă, dacă se dublează distanța dintre suporturi, trebuie redus modulul vectorilor cuplului la jumătate:

$$\frac{1}{2} | \bar{V} | 2d = | \bar{V} | d.$$

Proprietățile de la γ) se pot demonstra și direct, folosind aceleași operații elementare de echivalență.

2° Cazurile particulare, de pildă cel al cuplurilor de vectori care au suporturi paralele, necesită demonstrații mai simple care pot fi deduse ușor din demonstrația precedentă.

§ 45. Reducerea unui sistem de cupluri de vectori alunecători

a. Se începe prin reducerea unui sistem de două cupluri de vectori alunecători. Se consideră două cupluri avînd planele neparalele și momentele $\overline{M}_1$ și $\overline{M}_2$.

Se transformă cele două cupluri în altele echivalente (v. § 44, c), astfel încît originile vectorilor respectivi să fie două puncte oarecare A și A' de pe dreapta comună a planelor (P_1) și (P_2) (fig. 99), adică:

$$\overline{M}_1 = \overline{A'A} \times \overline{V}_1, \qquad \overline{M}_2 = \overline{A'A} \times \overline{V}_2.$$

Se înțelege că vectorii $\overline{V}_1$, $\overline{V}'_1$; $\overline{V}_2$ și $\overline{V}'_2$ nu sînt aceiași cu cei dinaintea operațiilor. Se înlocuiesc vectorii $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$, cu originile în A, prin vectorul rezultant:

$$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2$$

și la fel se procedează cu vectorii din A':

$$\overline{V}' = \overline{V}'_1 + \overline{V}'_2.$$

Deoarece:

$$\overline{V}_1 + \overline{V}'_1 = 0$$

și

$$\overline{V}_2 + \overline{V}'_2 = 0,$$

rezultă că și

$$\overline{V} + \overline{V}' = 0,$$

deci sistemul celor două cupluri se reduce la un cuplu, cuplul rezultant de vectori alunecători.

Se calculează momentul $\overline{M}$ al cuplului rezultant:

$$\overline{M} = \overline{A'A} \times \overline{V},$$

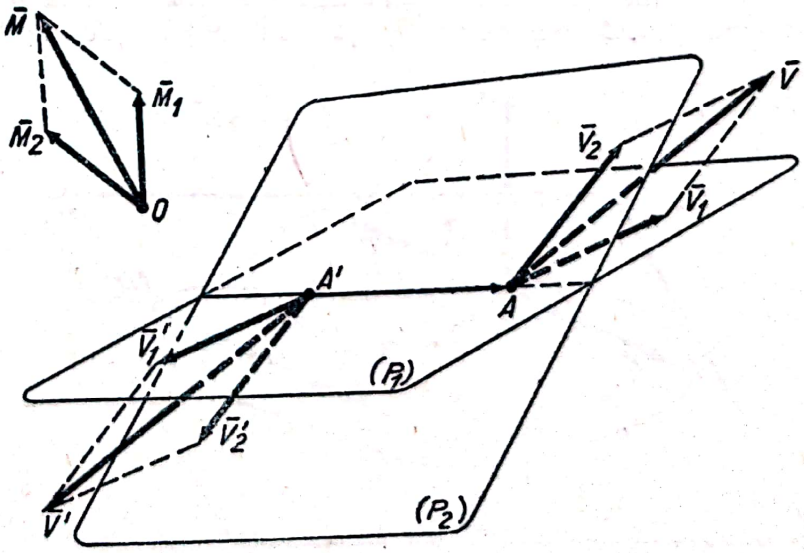


Fig. 99

adică :

$$\overline{M} = \overline{A'A} \times (\overline{V}_1 + \overline{V}_2) = \overline{A'A} \times \overline{V}_1 + \overline{A'A} \times \overline{V}_2 = \overline{M}_1 + \overline{M}_2.$$

Pe de altă parte se știe (§ 44) că momentul unui cuplu de vectori alunecători este egal cu suma vectorială a momentelor vectorilor în raport cu un punct arbitrar O din spațiu.

Astfel că, *momentul cuplului rezultant a două cupluri este egal cu suma vectorială a momentelor cuplurilor componente, sau egal cu suma vectorială a momentelor, în raport cu un punct O, ale tuturor vectorilor celor două cupluri.*

În cazul a n (finit) cupluri de vectori alunecători, în mod analog se demonstrează că :

Un sistem de n *cupluri se reduce, în general, la un cuplu rezultant, al cărui moment este egal cu suma vectorială a momentelor cuplurilor sau este egal cu suma vectorială a momentelor* (momentul rezultant al sistemului) *în raport cu un punct, ale tuturor vectorilor celor* n *cupluri.*

b. *Observații.* 1° Dacă momentul rezultant este nul, sistemul format din cele n cupluri este echivalent cu zero.

2° Dacă cuplurile sistemului au planele paralele sau vectorii au suporturile în același plan, momentele cuplurilor, fiind perpendiculare pe același plan, sînt paralele, iar momentul cuplului rezultant se obține printr-o *însumare algebrică.*

§ 46. Reducerea unui sistem oarecare de vectori alunecători. Torsor. Discuția cazurilor de reducere

Înainte de a rezolva problema reducerii unui sistem de n vectori alunecători $\overline{V}_i (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ cu suporturile așezate oricum în spațiu, se stabilesc următoarele teoreme :

a. **Teorema I.** *Orice vector alunecător* $(\overline{V}, D)$ *este echivalent cu un sistem compus dintr-un vector, având direcția, sensul și modulul lui* $\overline{V}$, *dar originea într-un punct oarecare O, și un cuplu de vectori alunecători având momentul egal cu momentul, în raport cu O, al vectorului* $(\overline{V}, D)$.

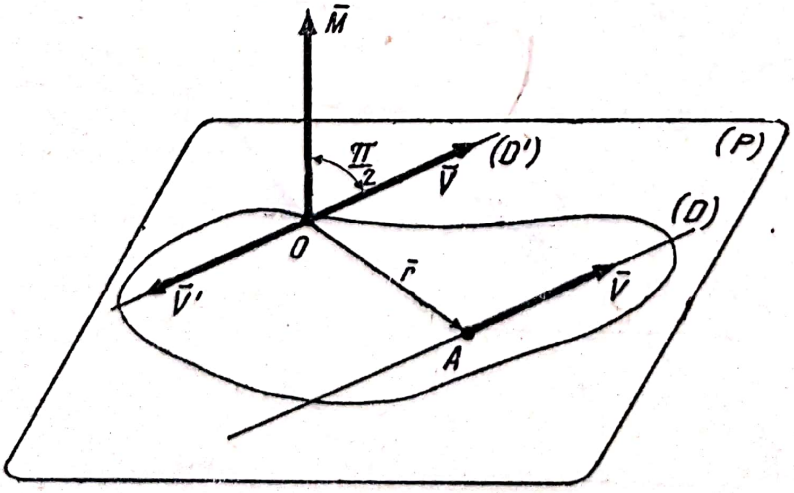


Fig. 100

Printr-un punct oarecare O se duce dreapta (D') paralelă cu suportul (D) (fig. 100).

Se adaugă în O perechea de vectori $\overline{V}$, $\overline{V}'$ a căror sumă este nulă. Sistemul de vectori compus din $(\overline{V}, D)$ și perechea $\overline{V}$, $\overline{V}'$ este echivalent cu $(\overline{V}, D)$.

Însă $\overline{V}'$ din O şi $(\overline{V}, D)$ formează un cuplu de moment:

$$\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{V}.$$

Deci, vectorul alunecător $(\overline{V}, D)$ echivalează cu sistemul compus din vectorul $\overline{V}$ cu originea în O şi un cuplu de vectori alunecători de moment $\overline{M}$.

Observaţii. 1° Momentul $\overline{M}$ este perpendicular pe (D) şi (D'), respectiv pe planul (P), determinat de suportul (D) şi pe punctul O.

2° Oriunde s-ar găsi punctul O pe o dreaptă (D'), paralelă cu (D), se obţine acelaşi sistem, deoarece momentul vectorului $(\overline{V}, D)$ este independent de poziţia punctului O, dacă acesta se găseşte pe o paralelă la suport.

3° Reciproc, orice sistem compus dintr-un vector alunecător $\overline{V}$ pe un suport (D') şi un cuplu de moment $\overline{M}$, dacă $\overline{V}$ şi $\overline{M}$ sînt perpendiculari între ei, adică:

$$\overline{V}\,\overline{M} = 0, \tag{4.16}$$

echivalează cu un *vector rezultant unic* $(\overline{V}, D)$, al cărui suport (D) este determinat de $\overline{V}$ şi $\overline{M}$ (v. § 39).

b. **Teorema II.** *Un sistem de doi vectori alunecători* $(\overline{V}_1, D_1)$ şi $(\overline{V}_2, D_2)$, *cu suporturile* (D_1) *şi* (D_2) *nesituate în acelaşi plan, nu se poate reduce la un sistem nul sau la un cuplu de vectori alunecători şi nici la un vector rezultant unic.*

În primul rînd, este evident că pentru ca sistemul să se reducă la un sistem nul, sau la un cuplu de vectori alunecători, trebuie ca:

$$\overline{V}_1 + \overline{V}_2 = 0,$$

adică vectorii să fie coliniari, suporturile (D_1) şi (D_2) să fie confundate sau paralele, ceea ce este imposibil, deoarece suporturile nu sînt situate în acelaşi plan.

Pe de altă parte, în baza teoremei precedente, se poate înlocui vectorul alunecător $(\overline{V}_1, D_1)$ prin sistemul compus dintr-un vector $\overline{V}_1$ cu originea într-un punct arbitrar O din spaţiu (fig. 101) şi un cuplu de vectori alunecători de moment:

$$\overline{M}_1 = \overline{OA_1} \times \overline{V}_1$$

La fel, se înlocuieşte $(\overline{V}_2, D_2)$ prin $\overline{V}_2$ cu originea în O şi cuplul de moment:

$$\overline{M}_2 = \overline{OA_2} \times \overline{V}_2.$$

Deci, sistemul iniţial este echivalent cu sistemul compus din vectorii $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$ cu originile în O, la care se adaugă cuplurile de momente $\overline{M}_1$ şi $\overline{M}_2$ (fig. 101).

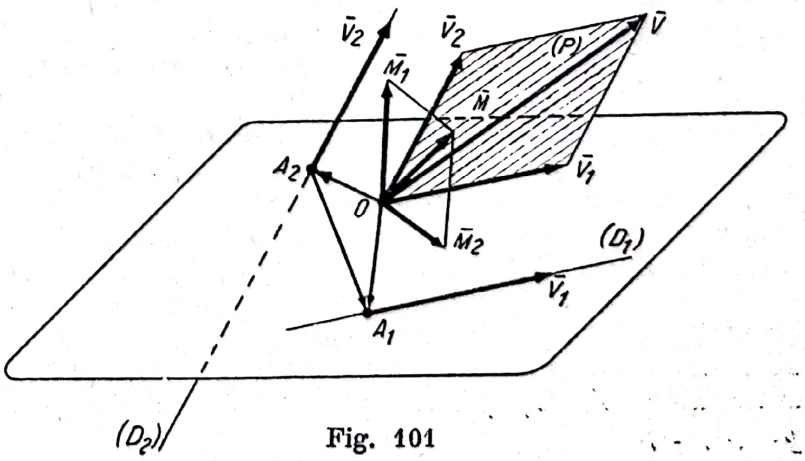


Fig. 101

Sistemul nou se poate reduce la un sistem compus dintr-un vector rezultant $\overline{V}$ și un cuplu rezultant de moment $\overline{M}$, astfel ca:

$$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2$$

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 = \overline{OA}_1 \times \overline{V}_1 + \overline{OA}_2 \times \overline{V}_2.$$

Pentru ca sistemul redus să poată fi echivalent cu un vector rezultant unic, trebuie să fie satisfăcută condiția (4.16), adică:

$$\overline{V}\overline{M} = (\overline{V}_1 + \overline{V}_2)(\overline{OA}_1 \times \overline{V}_1 + \overline{OA}_2 \times \overline{V}_2) =$$

$$= \overline{V}_1(\overline{OA}_1 \times \overline{V}_1) + \overline{V}_1(\overline{OA}_2 \times \overline{V}_2) + \overline{V}_2(\overline{OA}_1 \times \overline{V}_1) + \overline{V}_2(\overline{OA}_2 \times \overline{V}_2) = 0,$$

însă:

$$\overline{V}_1(\overline{OA}_1 \times \overline{V}_1) = \overline{OA}_1(\overline{V}_1 \times \overline{V}_1) = 0,$$

$$\overline{V}_2(\overline{OA}_2 \times \overline{V}_2) = \overline{OA}_2(\overline{V}_2 \times \overline{V}_2) = 0,$$

deci, este necesar ca:

$$\overline{V}_1(\overline{OA}_2 \times \overline{V}_2) + \overline{V}_2(\overline{OA}_1 \times \overline{V}_1) = 0$$

sau:

$$\overline{OA}_2(\overline{V}_2 \times \overline{V}_1) + \overline{OA}_1(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2) = -\overline{OA}_2(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2) + \overline{OA}_1(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2) = 0;$$

în fine:

$$(\overline{OA}_1 - \overline{OA}_2)(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2) = \overline{A_2A_1}(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2) = 0. \qquad (4.17)$$

Punctul O, un punct arbitrar, se numește *centru de reducere*. Relația (4.17) găsită reprezintă condiția ca sistemul celor doi vectori să fie reductibil, într-un centru de reducere, la un *vector rezultant unic*.

Dar produsul vectorial $\overline{V}_1 \times \overline{V}_2$ nu poate fi nul, deoarece suporturile (D_1) și (D_2) nu sînt paralele. De asemenea, nici $\overline{A_2A_1}$ nu poate fi nul, deoarece suporturile (D_1) și (D_2) nu sînt concurente.

Deci, condiția ca sistemul să se reducă la un vector rezultant unic este ca $\overline{A_2A_1}$ să fie paralel cu planul (P), planul vectorilor $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$ din O.

Dacă A_1A_2 ar fi o dreaptă paralelă cu (P) și cum, prin construcție, (D_1) este o dreaptă paralelă cu planul (P), rezultă că planul (A_1A_2, D_1) ar trebui să fie paralel cu planul (P).

La fel și planul (A_2A_1, D_2) ar trebui să fie paralel cu același plan (P).

Dar printr-o dreaptă A_1A_2 paralelă cu un plan (P) nu se poate construi decît un sigur plan paralel cu (P).

Aceasta implică condiția ca (D_1) și (D_2) să determine cu A_1A_2 unul și același plan, adică (D_1) și (D_2) să fie în același plan, *ceea ce este contrar ipotezei.*

În concluzie, un sistem de vectori alunecători $(\overline{V}_1, D_1)$ și $(\overline{V}_2, D_2)$ cu suporturile nesituate în același plan *nu se poate reduce* nici la un vector rezultant unic. Sistemul este echivalent cu un sistem compus dintr-un vector alunecător $(\overline{V}, D)$ și un cuplu al cărui moment $\overline{M}$ *nu este perpendicular pe* $(\overline{V}, D)$.

Scanned with OKEN Scanner

c. *Torsor de vectori alunecători.* În general, se definește ca *torsor de vectori alunecători* un sistem compus dintr-un vector alunecător $(\bar{V}, D)$ și un cuplu de vectori alunecători $(\bar{v}, \bar{v}')$ de moment M, cu condiția ca $\sphericalangle \alpha$ dintre $\bar{V}$ și $\bar{M}$ *să nu fie drept* (fig. 102).

Torsorul este un element nou din teoria vectorilor alunecători, element diferit de vectorul alunecător și de cuplul de vectori alunecători.

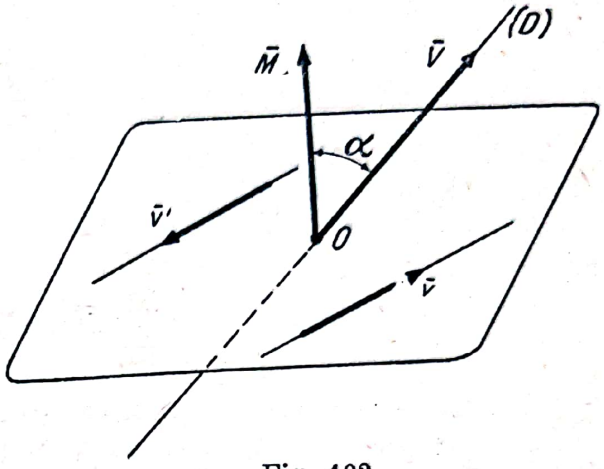


Fig. 102

Observații. 1° Dacă $\sphericalangle \alpha$ este drept, torsorul *nu mai este veritabil*, deoarece, potrivit observației § 46, a 3°, el poate fi redus la un vector rezultant unic.

Pentru simplificarea exprimării, orice sistem compus dintr-un vector alunecător $(\bar{V}, D)$ și un cuplu de vectori alunecători de moment $\bar{M}$, în cazul $\alpha = 90°$, se va numi *torsor formal.*

2° Dacă $\alpha = 0$ sau $\alpha = 180°$, adică $\bar{V}$ și $\bar{M}$ sînt coliniari, sistemul se numește *torsor minimal.*

3° În ipoteza că vectorii alunecători ai unui torsor minimal reprezintă forțe aplicate unui solid rigid în repaus, acțiunea torsorului minimal asupra solidului se poate asocia cu deplasarea unui șurub în raport cu mutelca sa (fig. 103).

d. *Reducerea unui sistem oarecare de vectori alunecători.* Se aplică întocmai metoda folosită în cazul particular a doi vectori cu suporturile nesituate în același plan. Se alege un punct oarecare O ca centru de reducere (fig. 104). În baza teoremei I, se înlocuiește vectorul alunecător $(\bar{V}_i, D_i)$, printr-un vector $\bar{V}_i$ cu originea în O și un cuplu de moment:

$$\bar{M}_i = \overline{OA_i} \times \bar{V}_i.$$

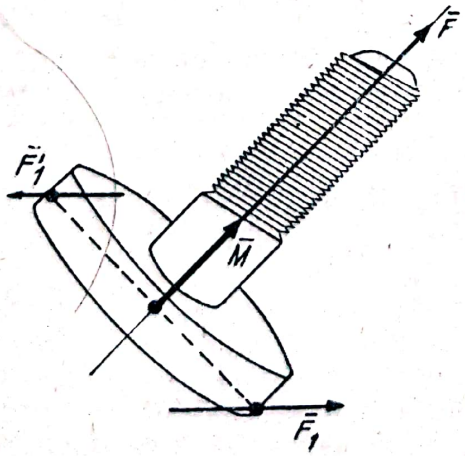


Fig. 103

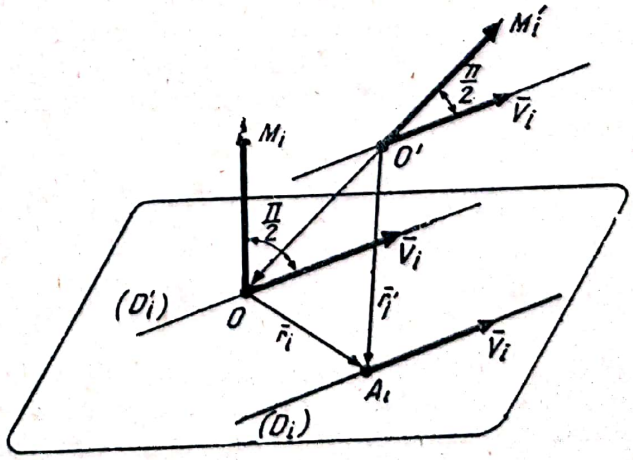


Fig. 104

Se aplică aceeaşi operaţie tuturor vectorilor sistemului. În acest fel se formează un sistem de n vectori, egali în direcţie, sens şi modul, cu vectorii $\overline{V}_i\,(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, dar cu originea în O, şi un sistem de n cupluri de momente $\overline{M}_i\,(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Se reduc vectorii din O ca în cazul unui sistem de vectori cu suporturile concurente :

$$\overline{V} = \sum_{i=1}^{n} \overline{V}_i. \tag{4.18}$$

Acesta este *vectorul sumă* al sistemului de vectori alunecători $(\overline{V}_i, D_i)$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Cuplul rezultant al celor n cupluri are momentul egal cu *momentul rezultant* :

$$\overline{M} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{OA}_i \times \overline{V}_i, \tag{4.19}$$

al sistemului de vectori alunecători.

Deci, *sistemul de vectori alunecători* $(\overline{V}_i, D_i)$, $(i = 1\ 2, 3, \ldots, n)$ *se reduce, în raport cu un centru* O, *la un torsor compus dintr-un vector* $\overline{V}$ *cu originea în* O *şi un cuplu de vectori de moment* $\overline{M}$.

e. *Variaţia torsorului în raport cu poziţia centrului de reducere.*

Dacă O' este noul centru de reducere, vectorul $(\overline{V}_i, D_i)$ al sistemului este înlocuit printr-un vector egal $\overline{V}_i$ cu originea în O' şi un cuplu al cărui moment $\overline{M}'_i$:

$$\overline{M}'_i = \overline{O'A}_i \times \overline{V}_i,$$

diferă de $\overline{M}_i$, atît în direcţie cît şi în modul (fig. 104), şi anume :

$$\overline{M}'_i = \overline{O'A}_i \times \overline{V}_i = (\overline{O'O} + \overline{OA}_i) \times \overline{V}_i = \overline{O'O} \times \overline{V}_i + OA_i \times \overline{V}_i =$$

$$= \overline{O'O} \times \overline{V}_i + \overline{M}_i.$$

Diferenţa este egală cu momentul, în raport cu noul centru O', al vectorului $\overline{V}_i$ cu originea în vechiul centru O.

Prin reducerea sistemului de vectori în centrul O' se găseşte acelaşi vector sumă (4.18), iar momentul cuplului rezultant, ţinînd seamă de (4.19), este :

$$\overline{M}' = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}'_i = \sum_{i=1}^{n} (\overline{O'O} \times \overline{V}_i) + \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i = \overline{O'O} \times \sum_{i=1}^{n} \overline{V}_i + \overline{M}$$

$$\overline{M}' = \overline{M} + \overline{O'O} \times \overline{V}, \tag{4.20}$$

deci : *Prin schimbarea centrului de reducere nu se modifică vectorul sumă al torsorului echivalent cu sistemul de vectori alunecători, dar variază momentul cuplului rezultant, şi anume cu momentul vectorului sumă din vechiul centru în raport cu noul centru de reducere.*

Scanned with OKEN Scanner

f. *Discuţie.* 1° Se pune întrebarea: dacă prin variaţia momentului torsorului, în raport cu schimbarea centrului de reducere, nu se modifică şi natura torsorului echivalent cu sistemul de vectori alunecători, adică dacă un torsor veritabil nu se transformă într-un torsor formal sau invers, un torsor formal, într-unul veritabil?

Calculînd produsul scalar al vectorului $\bar{V}$ şi $\bar{M}'$ din noul centru (fig. 105):

$$\bar{V}\bar{M}' = \bar{V}(\bar{M} + \overline{O'O} \times \bar{V}) =$$
$$= \bar{V}\bar{M} + \bar{V}(\overline{O'O} \times \bar{V}),$$

şi deoarece:

$$\bar{V}(\overline{O'O} \times \bar{V}) = \overline{O'O}(\bar{V} \times \bar{V}) = 0,$$

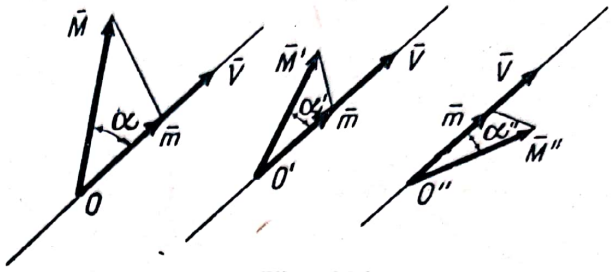


Fig. 105

se obţine:

$$\bar{V}\bar{M}' = \bar{V}\bar{M},$$

un rezultat important: *natura torsorului nu se modifică prin schimbarea centrului de reducere*, deoarece, dacă: $\bar{V}\bar{M} \neq 0$ şi $\bar{V}\bar{M}' \neq 0$.

2° În egalitatea precedentă se poate înlocui $\bar{M}$ prin $\bar{m}$ proiecţia lui pe direcţia lui $\bar{V}$, iar $\bar{M}'$ prin $\bar{m}'$ proiecţia pe aceeaşi direcţie a lui $\bar{M}'$. Deoarece atît $\bar{m}$ cît şi $\bar{m}'$ sînt coliniari cu $\bar{V}$ şi deoarece produsele scalare rămîn egale, rezultă că:

$$\bar{m}' = \bar{m},$$

adică: *proiecţia momentului cuplului rezultant pe direcţia vectorului sumă nu depinde de poziţia centrului de reducere. Această proiecţie, împreună cu vectorul sumă, sînt doi invarianţi faţă de operaţia de schimbare a centrului de reducere.*

3° Ce se întîmplă dacă vectorul sumă $\bar{V}$ este nul? În acest caz $\bar{V} = 0$ şi în orice alt centru O', iar sistemul de vectori alunecători se reduce în orice centru la un cuplu. Calculînd momentul cuplului rezultant, în raport cu orice centru O', cu relaţia (4.20), în care se înlocuieşte $\bar{V} = 0$, se găseşte $\bar{M}' = \bar{M}$.

În consecinţă, dacă $\bar{V} = 0$, *momentul cuplului la care se reduce sistemul de vectori alunecători este chiar momentul rezultant al sistemului în raport cu orice punct arbitrar ales.*

4° În fine, dacă torsorul dintr-un centru de reducere este nul şi deoarece în acest caz torsorul din orice centru este nul, relaţiile:

$$\bar{V} = 0 \qquad \bar{M} = 0$$

reprezintă *condiţiile necesare şi suficiente* pentru ca sistemul de vectori alunecători să fie echivalent cu zero.

La aceeaşi concluzie se ajunge şi dacă se consideră drept *condiţii necesare şi suficiente*, pentru ca un sistem de vectori alunecători să fie echivalent cu zero, reducerea sistemului la *doi vectori avînd acelaşi suport, acelaşi modul, dar sensuri opuse* (vectori direct opuşi).

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, torsorul din O, echivalent cu sistemul de vectori alunecători, se compune dintr-un cuplu $(\bar{v}, \bar{v}')$ de moment $\bar{M}$, adică:

$$\bar{v} + \bar{v}' = 0$$
$$\bar{r} \times \bar{v}' = \bar{M}$$

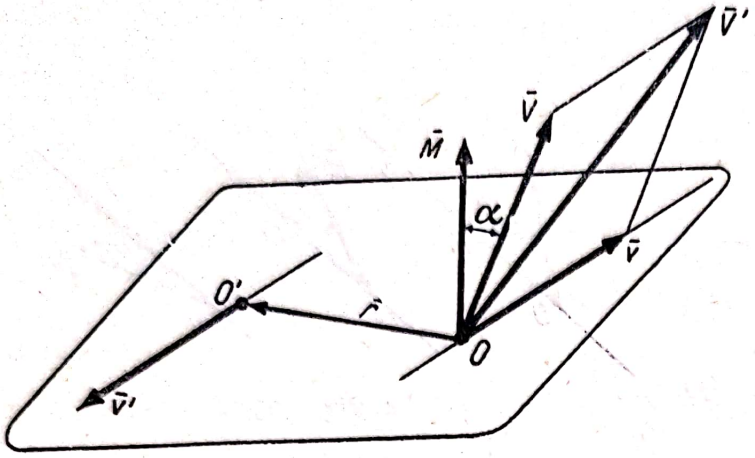


Fig. 106

și un vector $\bar{V}$, în general nesituat în planul cuplului (fig. 106).

Se notează cu $\bar{V}'$ vectorul rezultant al vectorilor $\bar{v}$ și $\bar{V}$:

$$\bar{V}' = \bar{v} + \bar{V},$$

și în acest fel s-a redus sistemul de vectori alunecători la sistemul de doi vectori $\bar{v}'$ și $\bar{V}'$.

Pentru ca cei doi vectori $\bar{v}'$ și $\bar{V}'$ să fie direct opuși este necesar și suficient ca:

$$\bar{v}' + \bar{V}' = 0 \quad \text{și} \quad \bar{r} \times \bar{v}' = 0.$$

Ținînd seamă și de relațiile precedente, aceste condiții devin:

$$\bar{v}' + (\bar{v} + \bar{V}) = \bar{V} = 0 \quad \text{și} \quad \bar{M} = 0. \quad \text{c.c.t.d.}$$

5° În concluzie, cu ajutorul invarianților unui sistem de n vectori alunecători $(\bar{V}_i\, D_i)$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ cu suporturile așezate oricum în spațiu, se poate cunoaște imediat care este cel mai simplu sistem de vectori alunecători, echivalent cu sistemul dat.

Pentru aceasta se calculează invarianții sistemului de vectori alunecători:

$$\bar{V} = \sum_{i=1}^{n} \bar{V}_i,$$

$$\bar{m} = \operatorname{pr}_{\bar{V}} \bar{M} = \operatorname{pr}_{\bar{V}} \sum_{i=1}^{n} \overline{OA_i} \times \bar{V}_i,$$

iar discuția se reduce la următoarele cazuri:

Cazul I $\bar{V} \neq 0$, $\bar{m} \neq 0$, sistemul se reduce la un torsor *veritabil*;
Cazul II $\bar{V} \neq 0$, $\bar{m} = 0$, sistemul se reduce la un *vector rezultant unic*;
Cazul III $\bar{V} = 0$, $\bar{M} \neq 0$, sistemul se reduce la un *cuplu de vectori alunecători*;
Cazul IV $\bar{V} = 0$, $\bar{M} = 0$, sistemul este *echivalent cu un sistem nul.*

g. *Observații.* 1°. Cazul $\bar{V} \neq 0$, $\bar{M} = 0$ se încadrează în cazul II, cu particularitatea că vectorul rezultant unic *trece chiar prin centrul O de reducere.*

Scanned with OKEN Scanner

2° $\bar{m}$ fiind proiecţia pe direcţia lui $\bar{V}$, a momentului rezultant, în raport cu O, al sistemului de vectori alunecători $(\bar{V}_i, D_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots n$, este şi momentul rezultant al sistemului în raport cu axa determinată prin punctul O şi vectorul $\bar{V}$, deci:

Momentul rezultant al unui sistem de vectori alunecători în raport cu orice axă paralelă cu vectorul sumă este un invariant al sistemului.

3° Dacă sistemul de vectori reprezintă forţe, condiţiile *necesare şi suficiente* ca un sistem oarecare de forţe, aplicat unui solid rigid, *să se echilibreze* sînt:

$$\bar{V} = 0 \quad \text{şi} \quad \bar{M} = 0,$$

adică: *atît suma vectorială a forţelor, ca şi cum ar fi vectori liberi, cît şi suma vectorială a momentelor forţelor sistemului, în raport cu un punct arbitrar din spaţiu, să fie nule.*

h. *Aplicaţii.* 1° Se consideră trei puncte O_1, O_2 şi O_3 nesituate pe o dreaptă şi un sistem de forţe aplicate unui solid rigid. Dacă $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$, $\bar{M}_3$ reprezintă momentele rezultante în raport cu cele trei puncte, să se demonstreze că sistemul de forţe se echilibrează dacă:

$$\bar{M}_1 = 0, \qquad \bar{M}_2 = 0, \qquad \bar{M}_3 = 0.$$

Rezolvare. Se ştie că:

$$\bar{M}_2 = \bar{M}_1 + \overline{O_2O_1} \times \bar{V}$$

$$\bar{M}_3 = \bar{M}_1 + \overline{O_3O_1} \times \bar{V}.$$

Dacă cele trei condiţii sînt satisfăcute, rezultă că trebuie ca:

$$\overline{O_2O_1} \times \bar{V} = 0 \quad \text{şi} \quad \overline{O_3O_1} \times \bar{V} = 0.$$

Dar $\overline{O_2O_1}$ şi $\overline{O_3O_1}$ nefiind coliniari, cel puţin unul din ei nu este coliniar cu $\bar{V}$ (fig. 107). Deoarece cele trei puncte arbitrare sînt şi distincte, nici $\overline{O_2O_1}$ şi nici $\overline{O_3O_1}$ nu sînt nuli, deci trebuie ca:

$$\bar{V} = 0,$$

ecuaţie care împreună cu:

$$\bar{M}_1 = 0$$

reprezintă condiţiile necesare şi suficiente ca sistemul să se echilibreze.

Reciproc, este evident că dacă:

$$\bar{V} = 0 \qquad \text{şi} \qquad \bar{M}_1 = 0,$$

adică sistemul de forţe se echilibrează, momentul rezultant al sistemului, în raport cu orice punct, este nul, deci:

$$\bar{M}_2 = 0 \qquad \text{şi} \qquad \bar{M}_3 = 0.$$

2° Să se demonstreze că pentru ca trei forţe $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, şi $\bar{F}_3$, care acţionează asupra unui solid rigid, să se echilibreze, este necesar, fără a fi şi suficient, ca suporturile forţelor să fie situate în acelaşi plan şi să fie ori toate trei concurente, ori toate trei paralele.

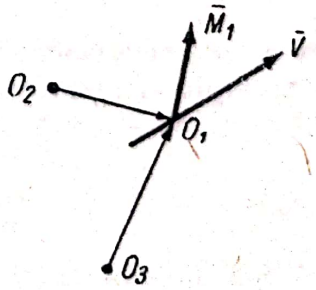


Fig. 107

Rezolvare: Demonstrația se bazează pe următoarele consecințe ale reducerii unui sistem de vectori alunecători: Pentru ca sistemul să fie echivalent cu zero este necesar, fără a fi și suficient, ca momentul rezultant al sistemului, în raport cu un punct oarecare sau în raport cu o axă oarecare, să fie nul. În consecință, se aleg pe fiecare din suporturile forțelor cîte un punct O_1, O_2 și O_3, astfel încît să formeze un triunghi în raport cu ale cărui laturi și vîrfuri să se exprime condițiile necesare de echilibru menționate (fig. 108).

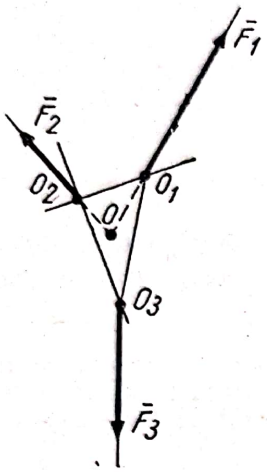


Fig. 108

Astfel, în raport cu latura O_1O_2 considerată ca axă, momentul rezultant al sistemului se reduce la momentul forței $\bar{F}_3$, deoarece forțele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ dau momente nule. Pentru ca și momentul forței $\bar{F}_3$ să fie nul este necesar ca suportul forței $\bar{F}_3$ să fie în același plan cu O_1O_2, adică în planul $O_1O_2O_3$.

La fel se dovedește că pentru echilibrul forțelor este necesar ca și suporturile forțelor $\bar{F}_2$ și $\bar{F}_3$ să fie situate în același plan $O_1O_2O_3$.

În continuare, dacă suporturile a două forțe ($\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$) se întîlnesc într-un punct O, scriind condițiile ca momentul rezultant al sistemului în raport cu O să fie nul, rezultă că și suportul forței $\bar{F}_3$ trebuie să treacă prin O.

Dacă două din suporturi sînt paralele, și suportul ultimei forțe trebuie să fie paralel cu suporturile primelor două, deoarece, dacă le-ar întîlni pe fiecare în cîte un punct, nu s-ar anula momentul rezultant al sistemului în raport cu aceste puncte. În cazul cînd două din suporturi se confundă și cel de-al treilea suport, trebuie să coincidă cu suportul comun al primelor două și așa mai departe.

Condițiile de mai sus sînt necesare, însă nu și suficiente, astfel dacă sistemul celor trei forțe s-ar reduce la o rezultantă unică situată în planul $O_1O_2O_3$, momentul rezultantei, față de oricare axă O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1, este nul fără ca, prin aceasta, sistemul să se echilibreze.

§ 47. Axa centrală a unui sistem de vectori alunecători

a. S-a arătat că un sistem oarecare de n vectori alunecători $(\bar{V}_i, D_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, este echivalent cu un torsor, adică cu sistemul compus dintr-un vector alunecător $(\bar{V}, D)$ și un cuplu de vectori alunecători de moment $\bar{M}$ (§ 46).

De asemenea s-a arătat că $\bar{V}$ este vectorul sumă al sistemului:

$$\bar{V} = \sum_{i=1}^{n} \bar{V}_i$$

și că în orice centru de reducere vectorul sumă este același, dar că momentul cuplului rezultant depinde de centrul de reducere O:

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^{n} \overline{OA}_i \times \bar{V}_i.$$

S-a mai constatat că, deoarece produsul scalar $\bar{V}\bar{M}$ nu depinde de centrul de reducere, proiecția momentului rezultant $\bar{M}$, din orice centru de reducere,

pe direcţia vectorului sumă, este un invariant al sistemului. S-a notat cu $\overline{m}$ acest al doilea invariant. Dacă se descompune $\overline{M}$ după $\overline{V}$ şi după direcţia perpendiculară pe $\overline{V}$ (fig. 109):

$$\overline{M} = \overline{m} + \overline{\mu}, \qquad (4.21)$$

se constată că variaţia lui $\overline{M}$, de la un centru de reducere la altul, se datoreşte variaţiei componentei $\overline{\mu}$.

Se observă că $\overline{\mu}$ fiind proiecţia lui $\overline{M}$ pe axa perpendiculară pe $\overline{V}$ situată în planul $\overline{M}$, O, $\overline{V}$, este şi momentul rezultant, în raport cu această axă a sistemului de vectori alunecători.

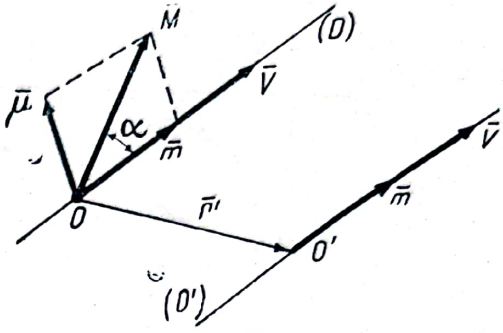


Fig. 109

Faptul că $\overline{\mu}$ variază de la un centru de reducere la altul pune problema determinării centrului în care $\overline{\mu} = 0$. În acest centru de reducere $\overline{M}$ şi $\overline{V}$ sînt colinari, iar momentul rezultant are cea mai mică valoare, adică în acest centru sistemul de vectori alunecători se reduce la un *torsor minimal*.

Poziţia centrului necunoscut O' urmează a fi determinată prin vectorul de poziţie $\overline{r'}$ în raport cu reperul cu originea în O.

Se ştie că în noul centru, potrivit relaţiei (4.20):

$$\overline{M'} = \overline{M} + \overline{O'O} \times \overline{V} = \overline{M} - \overline{r'} \times \overline{V}.$$

Condiţia este ca în noul centru:

$$\overline{M'} = \overline{m},$$

adică:

$$\overline{m} = \overline{M} - \overline{r'} \times \overline{V}$$

sau:

$$\overline{r'} \times \overline{V} = \overline{M} - \overline{m}$$

În fine, ţinînd seama de (4.21), se găseşte:

$$\overline{r'} \times \overline{V} = \overline{\mu}. \qquad (4.22)$$

Cum $\overline{V}$ şi $\overline{\mu}$ sînt calculaţi în raport cu O, ecuaţia (4.22), permite determinarea lui $\overline{r'}$, adică a centrului O' în care torsorul, echivalent cu sistemul de vectori, este minimal.

Se observă că dacă se cunosc vectorii $\overline{V}$ şi $\overline{\mu}$, unde $\overline{\mu}$, potrivit condiţiei precedente, este momentul vectorului $\overline{V}$, de pe suportul căutat (D'), în raport cu O, se poate determina acest suport şi cu ajutorul construcţiei de la § 39.

Dacă în (4.22) se înlocuieşte $\overline{r'}$ prin:

$$\overline{r} = \overline{r'} + \lambda \overline{V}, \qquad (4.23)$$

unde λ este un parametru scalar, se observă că ecuaţia (4.22), este satisfăcută de o infinitate de puncte situate pe o dreaptă care trece prin punctul O'

găsit şi are direcţia vectorului sumă $\bar{V}$ (fig. 110). Ecuaţia dreptei este (4.23).

Dacă se reduce sistemul de vectori alunecători în orice punct al acestei drepte, se găseşte acelaşi torsor minimal $(\bar{V}, \bar{m})$.

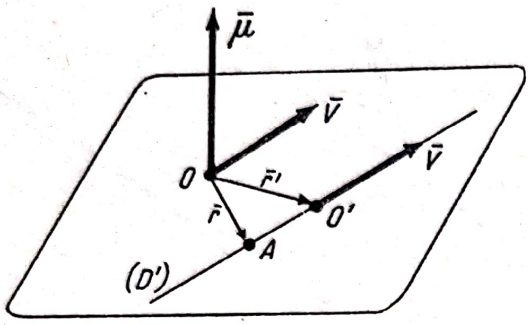


Fig. 110

Această dreaptă, locul geometric al centrelor de reducere în care torsorul echivalent cu sistemul de vectori alunecători este minimal, se numeşte axa centrală a sistemului.

b. **Extinderea teoremei lui Varignon.** 1° Ecuaţia (4.22) poate fi interpretată ca o extindere a teoremei momentelor, prin următorul enunţ:

Momentul vectorului sumă de pe axa centrală (D') a sistemului, în raport cu un punct oarecare O, este egal cu proiecţia, pe perpendiculara din O pe planul determinat de (D') şi O, a momentului rezultant, în raport cu punctul O, al sistemului de vectori alunecători.

2° Folosind definiţia momentului unui vector alunecător în raport cu o axă, teorema mai poate fi enunţată şi astfel:

Momentul vectorului sumă de pe axa centrală (D'), în raport cu axa perpendiculară în O, pe planul determinat de O şi (D'), este egal cu momentul rezultant al sistemului de vectori alunecători în raport cu axa considerată.

3° În cazul particular cînd sistemul se reduce la un vector rezultant unic, adică dacă:

$$\bar{V} \neq 0 \quad \text{şi} \quad \bar{m} = 0,$$

şi în consecinţă:

$$\bar{\mu} = \bar{M}, \tag{4.24}$$

axa centrală a sistemului este chiar suportul vectorului rezultant unic.

În acest caz, enunţul teoremei lui Varignon, pentru toate cazurile în care sistemul se reduce la un vector rezultant unic, este:

Momentul, în raport cu un punct, al vectorului rezultant unic, echivalent cu un sistem de vectori alunecători, este egal cu momentul rezultant, în raport cu acelaşi punct, al sistemului.

c. Observaţii. 1° Determinarea axei centrale a sistemului de vectori alunecători se mai poate face şi prin exprimarea condiţiei de coliniaritate dintre $\bar{M}'$ şi $\bar{V}$ sau, altfel, scriind condiţiile analitice de minim pentru $\bar{M}'^2$.

2° Ecuaţia suportului vectorului rezultant unic se deduce din (4.22) şi (4.23) ţinînd seama de (4.24) şi este:

$$\bar{r} \times \bar{V} = \bar{M}. \tag{4.25}$$

3° Acelaşi lucru se obţine aplicînd teorema lui Varignon:

$$\bar{r} \times \sum_{i=1}^{n} \bar{V}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{V}_i. \tag{4.26}$$

În consecinţă, ori de cîte ori sistemul de vectori alunecători se reduce la un vector rezultant unic, ecuaţia suportului vectorului rezultant unic se obţine imediat prin aplicarea teoremei lui Varignon (4.26).

4° Pentru ecuaţia axei centrale, în cazul general, se poate folosi teorema sub forma extinsă (b. 1°) sau (b. 2°).

§ 48. Cazuri particulare

a. *Sistemul de vectori alunecători cu suporturi situate în acelaşi plan.* Se consideră un sistem de n vectori alunecători $\overline{V}_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) cu suporturi situate în acelaşi plan (P) (fig. 111). Se alege ca centru de reducere un punct arbitrar O din plan. Oricare din vectorii ($\overline{V}_i$, D_i) de pe suportul respectiv se poate înlocui prin sistemul compus din vectorul $\overline{V}_i$ cu originea în O şi cuplul de moment $\overline{M}_i = \overline{r}_i \times \overline{V}_i$, un vector perpendicular în O pe planul (P). Sistemul celor n vectori alunecători cu suporturi situate în planul (P) se reduce în centrul O la un *torsor formal* de componente :

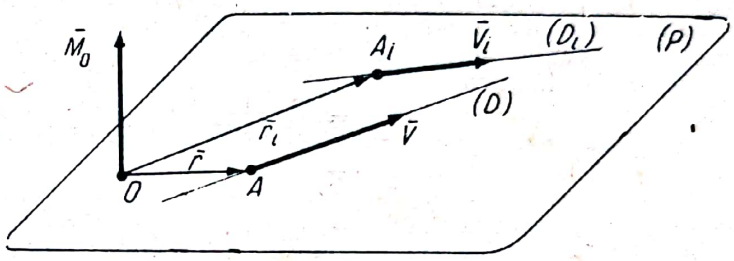


Fig. 111

$$\overline{V} = \sum_{i=1}^{n} \overline{V}_i \quad \text{şi} \quad \overline{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{V}_i,$$

unde $\overline{V}$ este vectorul sumă, iar $\overline{M}_o$, momentul cuplului rezultant (momentul rezultant al sistemului).

1° Dacă $\overline{V} \neq 0$, sistemul se reduce la un vector rezultant unic, al cărui suport se determină folosind relaţia (4.26), adică aplicînd teorema momentelor.

Se înţelege că dacă $\overline{M}_o = 0$, suportul vectorului rezultant trece prin centrul O de reducere.

2° Dacă $\overline{V} = 0$, momentul rezultant al sistemului este un invariant, independent de poziţia centrului O de reducere, şi se notează cu $\overline{M}$.

α) Dacă $\overline{M} \neq 0$, sistemul se reduce la un cuplu de vectori alunecători al cărui moment este M.

β) Dacă şi $\overline{M} = 0$, sistemul de vectori alunecători este echivalent cu zero.

b. *Metoda grafică (poligonul funicular).* Pentru prezentarea metodei şi pentru justificarea ei se consideră un număr de patru vectori alunecători ($\overline{V}_1$, D_1), ($\overline{V}_2$, D_2), ($\overline{V}_3$, D_3) şi ($\overline{V}_4$, D_4), cu suporturile dispuse oricum într-un plan (fig. 112, *b*). Evident, metoda şi justificarea se pot extinde şi aplica unui număr oarecare (finit) de vectori şi oricum ar fi dispuse suporturile lor în planul lor.

În primul rînd, se construieşte *suma vectorilor*, cu ajutorul *poligonului vectorilor* (fig. 112, *a*) ca şi cum vectorii ar fi liberi.

Pornind dintr-un punct arbitrar A_1, din planul suporturilor, ca origine, se construieşte vectorul $\overline{A_1A_2}$, echipolent cu primul vector $\overline{V}_1$; în continuare, vectorul $\overline{A_2A_3}$, echipolent cu cel de-al doilea vector $\overline{V}_2$, şi tot astfel pînă la ultimul vector $\overline{A_4A_5}$, echipolent cu $\overline{V}_4$. Vectorul sumă este $\overline{A_1A_5}$, care este egal în direcţie, sens şi modul cu vectorul rezultant $(\overline{V},\ D)$.

Pentru evitarea unor erori posibile este preferabilă notarea vectorilor în ordinea în care sînt aşezate suporturile lor; astfel, pe figura 112, *b* — de la stînga spre dreapta — se întîlnesc în ordine suporturile vectorilor $(\overline{V}_1,\ D_1)$ $(\overline{V}_2,\ D_2)$ etc.

După construirea poligonului vectorilor urmează determinarea unui punct al suportului vectorului rezultant $(\overline{V},\ D)$.

Pentru aceasta, în figura 112, *a* se alege un punct arbitrar O, numit *pol*. Se construiesc razele polare OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 şi OA_5. Se trece la figura 112, *b* şi printr-un punct B_0, din stînga vectorului $\overline{V}_1$, se duce paralela la OA_1 pînă întîlneşte în B_1 suportul (D_1). Prin punctul B_1 se duce paralela la OA_2 pînă întîlneşte suportul (D_2) în B_2. Şi aşa mai departe, paralela la OA_3 dusă prin B_2 intersectează suportul (D_3) în B_3, paralela din B_3 la OA_4 intersectează suportul (D_4) în B_4. În fine, prin B_4 se duce paralela la OA_5.

Ultima paralelă se intersectează cu B_0B_1 într-un punct C situat pe suportul vectorului rezultant. Linia frîntă $B_0B_1B_2B_3B_4$ se numeşte *poligon funicular*.

Pentru justificarea construcţiei se observă (fig. 112, *a*) că:

$$\begin{aligned}
\overline{V}_1 &= \overline{A_1O} + \overline{OA_2} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2,\\
\overline{V}_2 &= \overline{A_2O} + \overline{OA_2} = \bar{v}_2' + \bar{v}_3,\\
\overline{V}_3 &= \overline{A_3O} + \overline{OA_4} = \bar{v}_3' + \bar{v}_4,\\
\overline{V}_4 &= \overline{A_4O} + \overline{OA_5} = \bar{v}_4' + \bar{v}_5,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

ceea ce înseamnă că s-au descompus vectorii $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ şi $\overline{V}_4$ în cîte două componente după razele polare OA_1, OA_2 etc.

Pe de altă parte, se înlocuiesc, pe figura 112, *b*, vectorii prin componentele lor, după laturile poligonului funicular construit, după cum se ştie, paralel cu razele polare.

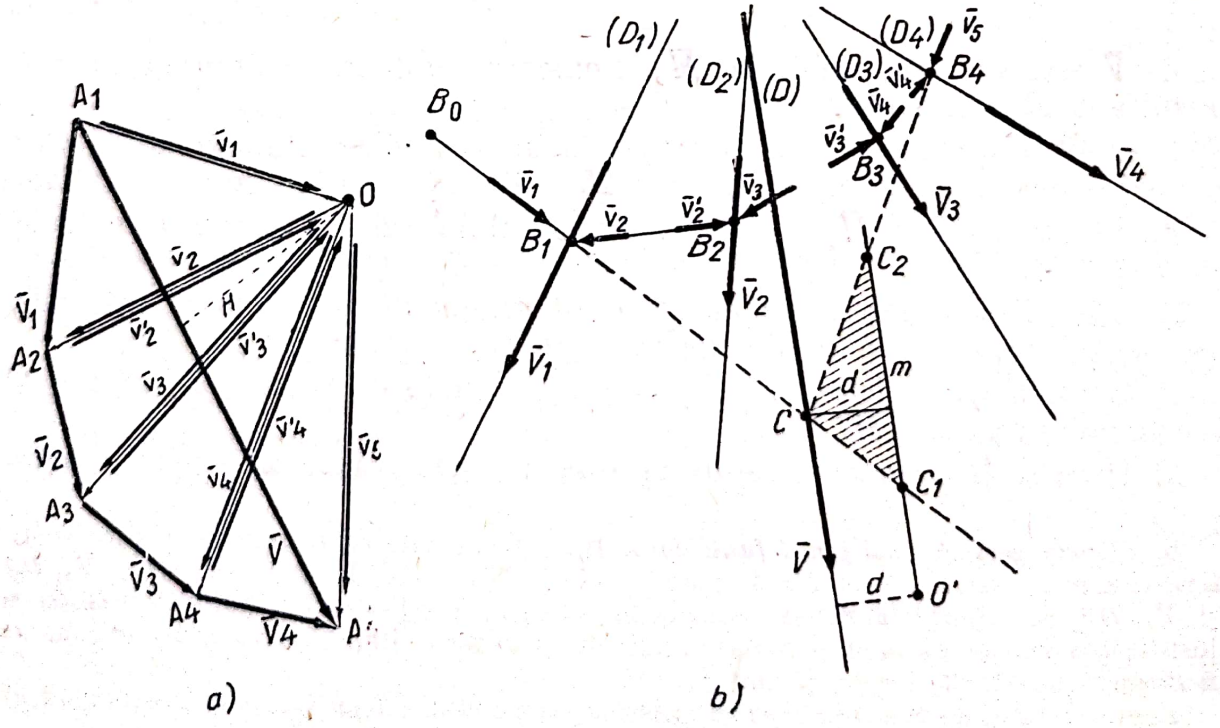


Fig. 112

Prin însumarea relaţiilor (4.27) se găseşte:

$$\overline{V} = \sum_{i=1}^{4} \overline{V}_i = \overline{A_1O} + \overline{OA_5} = \bar{v}_1 + \bar{v}_5, \tag{4.28}$$

deoarece, după cum se observă, atît în poligonul vectorilor cît şi în poligonul funicular, vectorii $\bar{v}_2$ şi $\bar{v}_2'$, $\bar{v}_3$ şi $\bar{v}_3'$, $\bar{v}_4$ şi $\bar{v}_4'$ sînt doi cîte doi egali şi direct opuşi.

Cum în ambele poligoane $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_5$ sînt componentele vectorului rezultant şi cum în poligonul funicular vectorii se găsesc chiar pe suporturile lor, prelungind suporturile componentelor $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_5$ se determină, la intersecţia lor, punctul C al suportului, iar paralela dusă prin C la A_1A_5 este chiar suportul vectorului rezultant $(\overline{V}, D)$.

Se pot prezenta următoarele situaţii:

1° Poligonul vectorilor nu se închide de la sine, sistemul de vectori se reduce la un vector rezultant al cărui suport se poate determina întotdeauna, deoarece laturile extreme ale poligonului funicular sînt concurente.

2° Poligonul vectorilor se închide de la sine, suma vectorilor este nulă, deci A_1 şi A_5 coincid şi razele polare extreme se confundă — în consecinţă, laturile extreme ale poligonului funicular, suporturile vectorilor $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_5$, au aceeaşi direcţie, iar suma (4.28) este nulă. În această situaţie sînt posibile următoarele cazuri:

α) Dacă suporturile nu se confundă, sistemul se reduce la *un cuplu.*

β) Dacă suporturile se confundă, vectorii $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_5$ sînt *direct opuşi*, iar sistemul de vectori alunecători este echivalent cu zero.

Se regăsesc astfel rezultatele de la § 48, a.

c. *Observaţii.* 1° Denumirea de poligon funicular este dată din cauza formei asemănătoare pe care o ia un fir flexibil, inextensibil, de greutate neglijabilă, sub acţiunea unui sistem de forţe aplicate în diferite puncte ale firului.

2° Metoda grafică se foloseşte de preferinţă în aplicaţiile tehnice ale mecanicii, în problemele în care aproximaţia calculelor grafice este satisfăcătoare.

3° Se mai poate calcula grafic şi modulul momentului rezultant, faţă de un punct O' din plan, al sistemului de vectori alunecători. Pentru aceasta, se construieşte paralela din O' la suportul vectorului rezultant $(\overline{V}, D)$. Paralela întîlneşte laturile extreme ale poligonului funicular în C_1 şi C_2. Se notează cu d distanţa de la C la C_1C_2 şi cu m lungimea segmentului C_1C_2 (fig. 112, *b*).

Dacă sistemul se reduce la un vector rezultant $(\overline{V}, D)$, momentul rezultant, faţă de un punct O', al sistemului de vectori, este egal cu momentul, faţă de acelaşi punct, al vectorului rezultant; deci:

$$|\overline{M}| = |\overline{V}|\, d.$$

Pe de altă parte, triunghiurile CC_1C_2 şi OA_1A_5 sînt asemenea, deoarece au laturile paralele, astfel că:

$$\frac{C_1C_2}{A_1A_5} = \frac{d}{H},$$

unde s-a notat cu H distanţa polului O la $A_1\,A_5$, deci:

$$\frac{m}{|\overline{V}|} = \frac{d}{H}$$

sau:

$$m = \frac{|\overline{V}|\, d}{H} = \frac{|\overline{M}|}{H},$$

adică lungimea segmentului de dreaptă C_1C_2 este proporţională cu modulul momentului rezultant, faţă de O', al sistemului de vectori alunecători. Calculul se simplifică mult prin stabilirea unor scări convenabile. De exemplu, se presupune că vectorii reprezintă forţe aplicate unui solid şi care se măsoară în kgf.

Scanned with OKEN Scanner

Se construieşte o scară convenabilă pentru forţe, în aşa fel încît segmentele de dreaptă reprezentînd forţele să nu iasă din cadrul graficului, de exemplu 1 cm să reprezinte pe grafic 100 kgf.

Se construieşte apoi o altă scară pentru distanţe, care de asemenea să permită încadrarea distanţelor pe grafic, de exemplu 1 cm să reprezinte pe solid 40 cm (fig. 113).

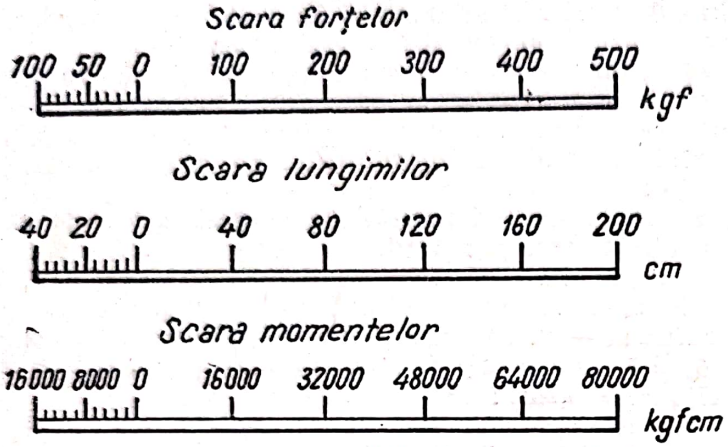


Fig. 113

Polul O şi distanţa polară H sînt arbitrare. Se poate demonstra că schimbarea poziţiei polului, deşi aduce după sine modificarea poligonului funicular, lasă *suportul vectorului rezultant neschimbat.*

Distanţa polară H, găsindu-se în poligonul forţelor, se măsoară la scara forţelor, de exemplu, pentru :

$$H = 4 \text{ cm},$$

distanţa polară reprezintă o forţă de 400 kgf.

În fine, se calculează scara momentelor, astfel încît prin raportarea lungimii segmentului C_1C_2 la această scară să se măsoare modulul momentului rezultant în raport cu O'.

Pentru aceasta se calculează momentul corespunzător unei lungimi de 1 cm, care la scara lungimilor reprezintă 40 cm, adică :

$$|\bar{M}| = m_1 H = 40 \text{ cm} \cdot 400 \text{ kgf} = 16\,000 \text{ kgfcm}.$$

De exemplu, dacă segmentul de dreaptă C_1C_2 este de 3,2 cm, modulul momentului rezultant al sistemului de forţe la această scară este :

$$|\bar{M}| = 3{,}2 \text{ cm} \cdot 16\,000 \frac{\text{kgfcm}}{\text{cm}} = 51\,200 \text{ kgfcm} = 512 \text{ kgfm}.$$

4° Dacă sistemul de forţe se reduce la un cuplu, iar distanţa dintre laturile extreme ale poligonului funicular (fig. 114) este d, se calculează imediat modulul momentului cuplului :

$$|\bar{M}| = |\bar{v}_1| \, d.$$

d. *Aplicaţii.* 1° Se consideră o bară A_1A_2 rigidă, de greutate neglijabilă, acţionată de un sistem de forţe paralele, ca în figura 115.

Să se calculeze forţele paralele cu care trebuie acţionată bara la capetele ei pentru ca întreg sistemul de forţe date şi necunoscute să se echilibreze.

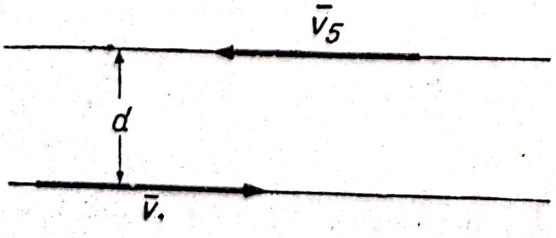


Fig. 114

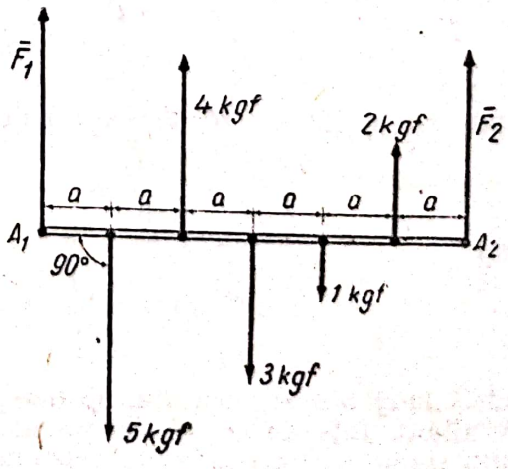


Fig. 115

Rezolvare: Se notează cu $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ forțele necunoscute de la capete. Condițiile de echilibru sînt:

$$\bar{V} = 0 \text{ și } \bar{M} = 0.$$

Se alege sensul forțelor necunoscute ca sens al direcției comune a forțelor paralele. Condițiile devin ecuații scalare:

$$F_1 + F_2 - 5 \text{ kgf} + 4 \text{ kgf} - 3 \text{ kgf} - 1 \text{ kgf} + 2 \text{ kgf} = 0$$

sau:

$$F_1 + F_2 = 3 \text{ kgf};$$

ecuația de momente în raport cu A_1 dă:

$$F_2 \cdot 6a + 2 \text{ kgf} \cdot 5a - 1 \text{ kgf} \cdot 4a - 3 \text{ kgf} \cdot 3a + 4 \text{ kgf} \cdot 2a - 5 \text{ kgf} \cdot a = 0,$$

de unde se obține:

$$F_2 = 0$$

și în consecință:

$$F_1 = + 3 \text{ kgf}.$$

2° Să se rezolve aplicația precedentă prin metoda grafică.

Indicație. În primul rînd se determină, cu ajutorul poligonului funicular, rezultanta forțelor date și apoi se descompune rezultanta în două componente după suporturile duse, prin A_1 și A_2, paralel la direcția rezultantei.

39 Asupra unei plăci plane rigide avînd forma unui pătrat cu latura de 6 dm, acționează un sistem de forțe dispuse ca în figura 116, cu modulele:

$$|\bar{F}_1| = 6 \text{ kgf}, |\bar{F}_2| = 4 \text{ kgf}, |\bar{F}_3| = 2 \text{ kgf}, |\bar{F}_4| = 1 \text{ kgf}.$$

Să se construiască grafic rezultanta și suportul rezultantei acestui sistem de forțe.

Indicație. Se poate aplica construcția rezultantei, din aproape în aproape succesiv, la cîte două forțe. Totuși se recomandă aplicarea metodei poligonului funicular.

e. *Sistemul de vectori alunecători cu suporturi paralele nesituate în același plan.* Se consideră un sistem de n vectori alunecători, $\bar{V}_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$), cu suporturi paralele, dar dispuse oricum în spațiu. Prin operația de alunecare a vectorilor pe suporturi, se pot aduce originile A_i ale vectorilor într-un același plan (P) perpendicular pe direcția lor comună. Se alege un punct oarecare O din planul (P) ca centru de reducere. Oricare din vectori, de exemplu, $\bar{V}_i$ de pe suportul (D_i) (fig. 117), se poate înlocui prin vectorul $\bar{V}_i$ cu originea

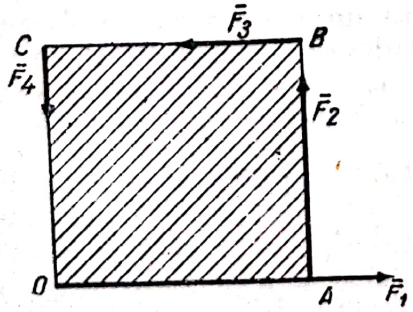


Fig. 116

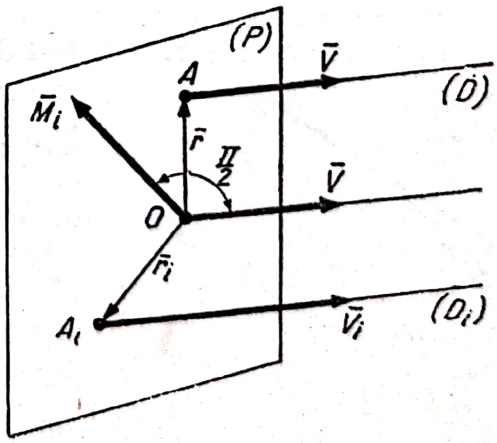


Fig.117

în O și cuplul de vectori având momentul $\overline{M}_i = \bar{r}_i \times \overline{V}_i$, un vector cu originea în O situat în planul (P), deoarece are direcția perpendiculară pe planul determinat de O și (D_i).

Sistemul celor n vectori alunecători cu suporturi paralele se reduce în centrul O la un torsor, de componente :

$$\overline{V} = \sum_{i=1}^{n} \overline{V}_i \text{ și } \overline{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \overline{V}_i,$$

unde $\overline{V}$ este vectorul sumă, iar $\overline{M}_o$, momentul cuplului rezultant (momentul rezultant) al sistemului. Acest torsor este *formal*, deoarece $\overline{V}$ este perpendicular pe planul (P) în care se găsește $\overline{M}_o$.

1° Dacă $\overline{V} \neq 0$, sistemul se reduce la un vector rezultant unic, al cărui suport se determină folosind relația (4.26), adică aplicînd teorema momentelor.

Evident, în acest caz, dacă $\overline{M}_o = 0$, suportul vectorului rezultant rece prin punctul O.

2° Dacă $\overline{V} = 0$, momentul rezultant devine independent de poziția punctului O și se notează cu $\overline{M}$.

α) Dacă $\overline{M} \neq 0$, sistemul se reduce la un cuplu de vectori alunecători de moment $\overline{M}$.

β) Dacă și $\overline{M} = 0$, sistemul de vectori alunecători este echivalent cu zero.

f. *Ecuația suportului* în cazurile în care sistemul se reduce la un vector rezultant unic se deduce, după cum s-a arătat, din aplicarea teoremei momentelor. În cele ce urmează se va calcula ecuația vectorială a suportului vectorului rezultant al unui sistem de vectori alunecători cu suporturi paralele în spațiu.

Pentru aceasta se va calcula, pe de o parte, suma :

$$\overline{V} = \sum_{i=1}^{n} \overline{V}_i \neq 0, \tag{4.29}$$

ca și cum vectorii sistemului ar fi liberi și, pe de altă parte, momentul vectorului rezultant, cu ajutorul teoremei momentelor :

$$\overline{M}_o = \bar{r} \times \overline{V} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \overline{V}_i. \tag{4.30}$$

Deoarece vectorii au suporturile paralele (fig. 118), relațiile (4.29) și (4.30) se pot exprima folosind versorul $\bar{u}$ al direcției lor comune :

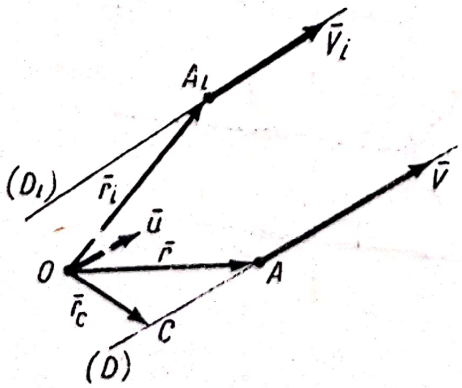


Fig. 118

$$\overline{V}_i = m_i \bar{u} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{4.31}$$

unde : $\overline{V}_i$ este unul din vectorii sistemului, iar m_i este valoarea vectorului $\overline{V}_i$, rezultat din compararea lui cu versorul $\bar{u}$.

Înlocuind în relația (4.29) se obține :

$$\overline{V} = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{u} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) \bar{u} = m\bar{u}, \tag{4.32}$$

unde s-a notat :

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i. \tag{4.33}$$

De asemenea, folosind (4.31) şi (4.32) în (4.30) :

$$\bar{r} \times m\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i\bar{u},$$

se ajunge la :

$$\left(m\bar{r} - \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i\right) \times \bar{u} = 0. \tag{4.34}$$

Deoarece $\bar{u}$ nu este nul, ecuaţia (4.34) este verificată de soluţia particulară :

$$m\bar{r} - \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i = 0 \tag{4.35}$$

şi de soluţia generală :

$$m\bar{r} - \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i = \alpha\bar{u}, \tag{4.36}$$

în care α este parametru arbitrar.

Evident, pentru valoarea nulă a parametrului, soluţia (4.35) este cuprinsă în (4.36).

În cazul :

$$\bar{V} \neq 0 \quad \text{sau} \quad m \neq 0,$$

cînd sistemul se reduce la un vector rezultant, notînd·

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i}{m} \tag{4.37}$$

şi :

$$\lambda = \frac{\alpha}{m},$$

se ajunge la ecuaţia vectorială a suportului vectorului rezultant :

$$\bar{r} = \bar{r}_c + \lambda\,\bar{u}, \tag{4.38}$$

unde : $\bar{r}$ este vectorul de poziţie al unui punct curent de pe suportul căutat, $\bar{r}_c$ este vectorul de poziţie al unui punct C care depinde de poziţiile originilor vectorilor sistemului şi de valorile m_i, iar λ este un parametru.

Ecuaţia (4.38) arată că $\bar{r}$ este o funcţie liniară de variabila scalară λ şi că reprezintă o dreaptă care trece prin punctul C şi este paralelă cu direcţia comună a vectorilor alunecători (v. § 29).

Aplicaţie. Să se determine vectorul rezultant şi suportul acestuia pentru sistemul de vectori alunecători paraleli dispuşi ca în figura 119.

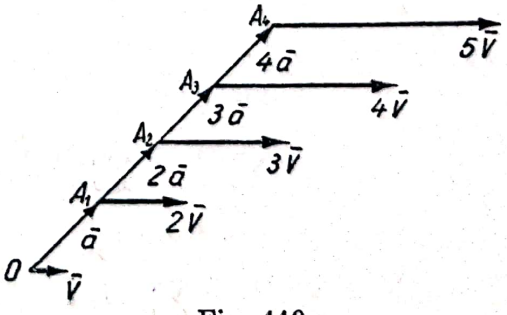


Fig. 119

Rezolvare. Se alege punctul O ca origine a sistemului de referinţă şi se notează cu $\bar{R}$ vectorul rezultant:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{5} i\bar{V} = 15\ \bar{V}.$$

Aplicînd teorema momentelor în raport cu O:

$$\bar{r}_c \times 15\ \bar{V} = \bar{a} \times 2\bar{V} + 2\bar{a} \times 3\bar{V} + 3\bar{a} \times 4\bar{V} + 4\bar{a} \times 5\bar{V},$$

unde $\bar{a}$, $2\bar{a}$ etc. sînt vectorii de poziţie ai punctelor A_1, A_2 etc., se găseşte poziţia punctului C prin:

$$\bar{r}_c = \frac{8}{3}\bar{a},$$

iar ecuaţia suportului în raport cu sistemul de referinţă cu originea în O este:

$$\bar{r} = \frac{8}{3}\bar{a} + \lambda\bar{V},$$

unde λ este un parametru scalar, astfel încît $\lambda\bar{V}$ să fie un vector de poziţie variabil în mărime.

§ 49. Expresii analitice în legătură cu reducerea unui sistem de vectori alunecători

a. Problema reducerii unui sistem de vectori alunecători şi discuţia cazurilor posibile se poate rezolva şi analitic, în raport cu un sistem de referinţă $Oxyz$. Astfel, dacă sistemul de redus este format din n vectori alunecători $(\bar{V}_i, D_i)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, cu suporturile dispuse oricum în spaţiu, se alege un sistem de referinţă tridreptunghic $Oxyz$ (fig. 120), în raport cu care: X_i, Y_i, Z_i, M_{ix}, M_{iy} şi M_{iz} sînt cele 6 coordonate ale vectorului alunecător $(\bar{V}_i, D_i)$. Între aceste coordonate există condiţia (§ 41):

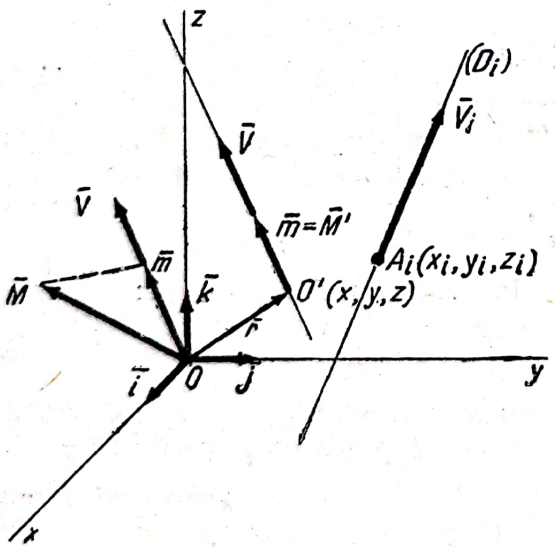


Fig. 120

$$X_i\ M_{ix} + Y_i\ M_{iy} + Z_i\ M_{iz} = 0.$$

Torsorul din O, echivalent cu sistemul de n vectori alunecători, are ca vector sumă:

$$\bar{V} = \sum_{i=1}^{n} \bar{V}_i = \sum_{i=1}^{n} (X_i\bar{i} + Y_i\bar{j} + Z_i\bar{k}) = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$$

şi ca moment rezultant:

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i = \sum_{i=1}^{n} (M_{ix}\bar{i} + M_{iy}\bar{j} + M_{iz}\bar{k}) = M_x\bar{i} + M_y\bar{i} + M_z\bar{k}.$$

Deci, cele şase coordonate ale torsorului sînt :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \qquad Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} M_{ix}, \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} M_{iy}, \quad M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{iz}.$$

Observaţie. Dacă vectorul alunecător $(\overline{V}_i, D_i)$ este determinat prin $\overline{V}_i(X_i, Y_i, Z_i)$ şi prin ecuaţiile suportului (D_i), se poate găsi un punct A_i (x_i, y_i, z_i) al suportului şi apoi calcula celelalte trei coordonate (§ 41) :

$$M_{ix} = y_i Z_i - z_i Y_i, \quad M_{iy} = z_i X_i - x_i Z_i, \quad M_{iz} = x_i Y_i - y_i X_i.$$

b. *Axa centrală.* Pentru ca să existe un punct O' (x, y, z) în care torsorul, echivalent cu sistemul de vectori, să fie minimal, este necesar ca momentul rezultant $\overline{M}'$ din O' şi vectorul sumă $\overline{V}$ să fie coliniari.

Se calculează $\overline{M}'$ cu ajutorul relaţiei (4.20) :

$$\overline{M}' = \overline{M} + \overline{O'O} \times \overline{V} = \overline{M} - \overline{r} \times \overline{V},$$

în care se fac înlocuirile :

$$\overline{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\overline{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$
$$\overline{M} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}.$$

În expresia :

$$\overline{M}' = (M_x - yZ + zY)\vec{i} + (M_y - zX + xZ)\vec{j} + (M_z - xY + yX)\vec{k}$$

se notează :

$$\begin{aligned} M'_x &= M_x - yZ + zY \\ M'_y &= M_y - zX + xZ \\ M'_z &= M_z - xY + yX. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Condiţia de coliniaritate între $\overline{V}(X, Y, Z)$ şi $\overline{M}'(M'_x, M'_y, M'_z)$ se exprimă prin ecuaţiile :

$$\frac{M_x - yZ + zY}{X} = \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + yX}{Z}, \tag{4.40}$$

în care singurele necunoscute sînt x, y, z, coordonatele centrului căutat.

Cele trei coordonate satisfac numai două ecuaţii, deci există o infinitate de centre în care sistemul se reduce la un torsor minimal.

Deci ecuaţiile (4.40) reprezintă axa centrală în raport cu sistemul de referinţă *Oxyz*.

Scanned with OKEN Scanner

c. *Discuţia cazurilor de reducere.* Această discuţie s-a făcut vectorial în § 46. Aici se vor folosi expresiile analitice şi ecuaţiile axei centrale.

Dacă se înmulţesc atît numărătorii cît şi numitorii celor trei rapoarte din (4.40), respectiv cu X, Y şi Z, apoi se aplică o proprietate cunoscută a rapoartelor egale, se ajunge la ecuaţiile :

$$\frac{M_x - yZ + zY}{X} = \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + yX}{Z} = \frac{XM_x + YM_y + ZM_z}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Expresia : $XM_x + YM_y + ZM_z$ se numeşte *trinomul invariant* al sistemului de vectori alunecători, deoarece :

$$XM_x + YM_y + ZM_z = \overline{V}\overline{M},$$

iar produsul scalar $\overline{V}\overline{M}$ este independent de poziţia sistemului de referinţă.

În consecinţă, ecuaţiile axei centrale pot fi legate de expresiile vectoriale :

$$\frac{M_x - yZ + zY}{X} = \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + yX}{Z} = \frac{\overline{V} \cdot \overline{M}}{V^2} = \pm \frac{|\overline{m}|}{|\overline{V}|}$$

şi se pot folosi concluziile discuţiei de la § 46.

Cazul I :

$$\overline{V} \neq 0, \ \overline{m} \neq 0, \text{ sau } \overline{V}\overline{M} \neq 0.$$

Se constată analitic că nu toate coordonatele X, Y, Z ale vectorului sumă sînt nule, iar trinomul invariant este diferit de zero, adică :

$$XM_x + YM_y + ZM_z \neq 0.$$

În acest caz, sistemul se reduce la un *torsor veritabil*, iar (4.40) sînt ecuaţiile axei centrale a sistemului.

Cazul II :

$$\overline{V} \neq 0, \ \overline{m} = 0 \text{ sau } \overline{V}\overline{M} = 0,$$

adică, deşi nu toate coordonatele X, Y, Z sînt nule, totuşi :

$$XM_x + YM_y + ZM_z = 0. \tag{4.41}$$

În acest caz, sistemul se reduce la un *vector rezultant unic*, suportul căruia are ecuaţiile :

$$M_x - yZ + zY = 0$$
$$M_y - zX + xZ = 0$$
$$M_z - xY + yX = 0,$$

deduse din ecuaţiile (4.40).

Se observă că, deşi există între coordonatele x, y, z ale punctului O' trei ecuaţii, ele nu pot determina aceste coordonate, deoarece ecuaţiile nu sînt

independente între ele, întrucît coeficienţii X, Y, Z, M_x, M_y, M_z satisfac condiţia (4.41). În consecinţă, sînt suficiente două din ele pentru determinarea ecuaţiilor suportului vectorului rezultant unic.

Cazul III:

$$\overline{V} = 0, \quad \overline{M} \neq 0,$$

adică toate coordonatele vectorului sumă, X, Y, Z, sînt nule în acelaşi timp.

Sistemul nu poate avea axă centrală şi se reduce la un cuplu de vectori alunecători. Momentul cuplului fiind un vector liber, coordonatele M_x, M_y, M_z determină, faţă de axele $Oxyz$, direcţia, sensul şi modulul momentului $\overline{M}$:

$$|\overline{M}| = +\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Cazul IV:

$$\overline{V} = 0, \quad \overline{M} = 0$$

sau:

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = 0$$

$$M_x = 0 \quad M_y = 0 \quad M_z = 0 \tag{4.42}$$

sistemul este echivalent cu zero.

d. *Observaţii.* 1° Cazurile particulare (II, III şi IV) se pot deduce din cazul oarecare (I), însă este preferabil să se aplice direct, acestor cazuri particulare, *teorema proiecţiei* şi *teorema momentelor*, folosite la stabilirea formulelor din cazul oarecare. În acest fel, raţionamentul primează, calculele se simplifică şi se evită automatismul caracteristic aplicării unor formule.

2° Dacă vectorii alunecători $(\overline{V}_i, D_i)$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, reprezintă forţe aplicate unui solid rigid, *condiţiile necesare şi suficiente* ca sistemele de forţe să se echilibreze sînt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \qquad M_x = \sum_{i=1}^{n} (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \qquad M_y = \sum_{i=1}^{n} (z_i X_i - x_i Z_i) = 0 \tag{4.43}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 \qquad M_z = \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i) = 0.$$

În aceste ecuaţii, X_i, Y_i, Z_i sînt valorile proiecţiilor forţei $\overline{V}_i$ pe axe, iar x_i, y_i, z_i, coordonatele unui punct oarecare de pe suportul (D_i).

3° Dacă toate forţele au suporturile situate în acelaşi plan, axele Oxy sînt alese în acest plan, iar axa Oz este perpendiculară pe planul forţelor, condiţiile necesare şi suficiente pentru echilibrul sistemului de forţe se reduc la:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad M_z = M_o = \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i) = 0, \tag{4.44}$$

Scanned with OKEN Scanner

celelalte condiţii din (4.43) fiind satisfăcute de la sine, deoarece :

$$Z_i = 0 \text{ şi } z_i = 0.$$

Dacă cel puţin una din primele două condiţii (4.44) nu este satisfăcută, sistemul de forţe este echivalent cu o forţă unică. Ecuaţia suportului ei se obţine direct, prin aplicarea teoremei momentelor în raport cu O :

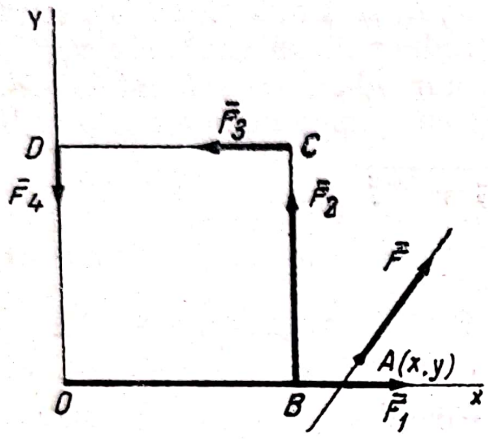


Fig. 121

$$xY - yX = \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i). \qquad (4.45)$$

4° Dacă toate forţele au suporturile paralele şi se alege axa Oz paralelă cu direcţia comună a suporturilor, condiţiile de echilibru sînt :

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0, \qquad M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i Z_i = 0,$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} (-x_i Z_i) = 0, \qquad (4.46)$$

celelalte condiţii din (4.43) fiind satisfăcute, deoarece :

$$X_i = 0 \text{ şi } Y_i = 0.$$

Dacă prima condiţie (4.46) nu este satisfăcută, sistemul de forţe este echivalent cu o forţă unică. Ecuaţiile suportului, în raport cu sistemul de axe $Oxyz$, se deduc prin aplicarea teoremei momentelor în raport cu axele Ox şi Oy :

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i Z_i = yZ, \qquad M_y = \sum_{i=1}^{n} (-x_i Z_i) = -xZ.$$

Cum :

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i,$$

rezultă :

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i Z_i}{\sum_{i=1}^{n} Z_i}, \qquad y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i Z_i}{\sum_{i=1}^{n} Z_i}, \qquad (4.47)$$

z fiind arbitrar.

e. Aplicaţii. 1° Să se rezolve aplicaţia 3° (§ 48) prin metoda analitică.

Rezolvare. Se alege originea O a sistemului de referinţă Oxy, în unul din vîrfurile pătratului, iar axele Ox şi Oy după laturile OB şi OD (fig. 121). Se notează cu X_i, Y_i valorile proiecţiilor forţelor date, cu X, Y cele ale rezultantei $\bar{F}$ şi cu x, y coordonatele cele unui punct de pe suportul rezultantei.

Scanned with OKEN Scanner

Deci :

$$X_1 = 6 \text{ kgf}; \quad Y_1 = 0; \quad X_2 = 0; \quad Y_2 = 4 \text{ kgf};$$
$$X_3 = -2 \text{ kgf}; \quad Y_3 = 0; \quad X_4 = 0; \quad Y_4 = -1 \text{ kgf}.$$

Folosind teorema proiecției, se obține :

$$X = 4 \text{ kgf}; \quad Y = 3 \text{ kgf},$$

deci :

$$|\bar{F}| = \sqrt{X^2 + Y^2} = 5 \text{ kgf}.$$

Aplicînd teorema momentelor, în raport cu O se găsește :

$$xY - yX = 4 \text{ kgf} \cdot 6 \text{ dm} + 2 \text{ kgf} \cdot 6 \text{ dm} = 36 \text{ kgfdm};$$

ecuația suportului este :

$$\frac{x}{12} - \frac{y}{9} = 1.$$

2° O placă rigidă $OABCDE$, avînd forma unui hexagon regulat de latură a, este acționată de un sistem de forțe ca în figura 122, avînd modulele :

$$|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2|; \quad |\bar{F}_3| = 3|\bar{F}_1|; \quad |\bar{F}_4| = |\bar{F}_1|\sqrt{3},$$

iar :

$$HC = \lambda a.$$

Să se reducă sistemul de forțe.

Rezolvare. Deoarece :

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

sistemul nu se reduce la o rezultantă.

Suma momentelor forțelor în raport cu O are valoarea :

$$M_o = (3\lambda - 1)\frac{|\bar{F}_1|\sqrt{3}}{2} a.$$

Discuție. Dacă: $\lambda \neq \frac{1}{3}$ sistemul se reduce la un cuplu de forțe, iar dacă: $\lambda = \frac{1}{3}$, sistemul de forțe se echilibrează.

3° De vîrfurile unei plăci pătrate rigide $OABC$, de latură a și greutate neglijabilă, acționează forțele verticale $\bar{F}$, $2\bar{F}$, $3\bar{F}$ și $4\bar{F}$.

Să se afle punctul D al plăcii, în care acționînd cu o forță $\bar{R}$, care urmează să fie determinată, placa să rămînă în repaus.

Rezolvare. Alegînd axele ca în figura 123 : $X_i = 0$, $Y_i = 0$, $Z_i = -iF$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, unde F este modulul forței $\bar{F}$.

Pentru echilibru este necesar ca :

$$X + \sum_1^4 X_i = 0, \qquad Y + \sum_1^4 Y_i = 0,$$

$$Z + \sum_1^4 Z_i = 0,$$

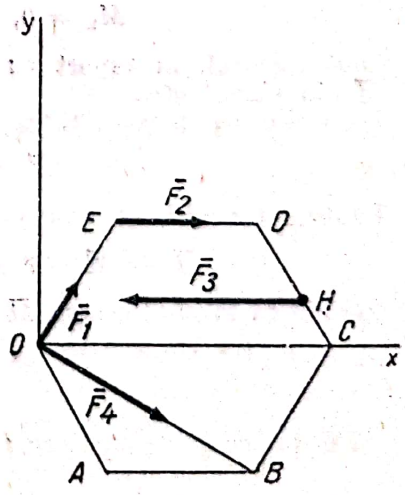


Fig. 122

deci:

$$X = 0 \qquad Y = 0 \qquad Z = +10F,$$

adică forța $\bar{R}$ trebuie să fie orientată după axa Oz.

Mai trebuie satisfăcute condițiile:

$$M_x = 0, \qquad M_y = 0, \qquad M_z = 0.$$

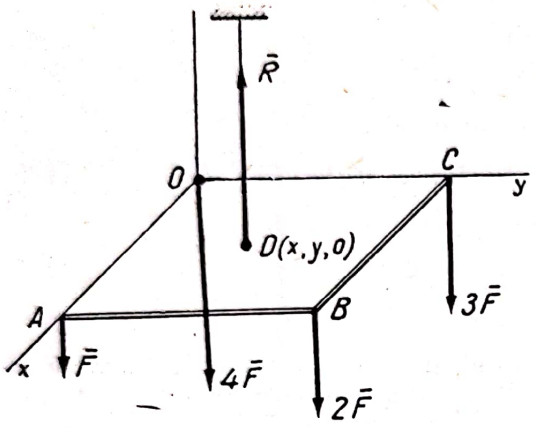


Fig. 123

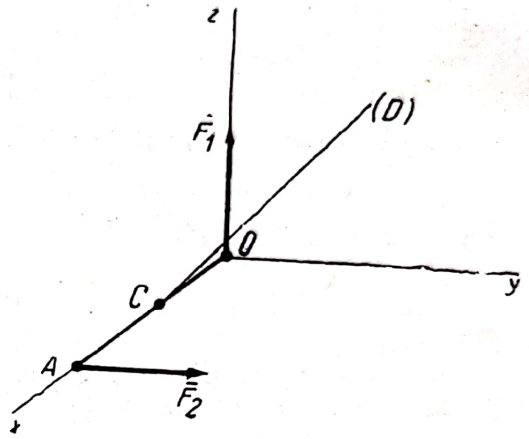


Fig. 124

Ultima condiție este satisfăcută; rămîn numai două ecuații, iar:

$$x = \frac{3a}{10}, \qquad y = \frac{a}{2}$$

sînt coordonatele punctului D.

4° Asupra unei bare rigide $OA = a$, de greutate neglijabilă, acționează la capete forțele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ avînd același modul, iar direcțiile lor fiind perpendiculare între ele și perpendiculare pe bară. Să se determine torsorul minimal și axa centrală a sistemului celor două forțe.

Rezolvare. În raport cu sistemul de referință ales (fig. 124), dacă se notează cu F modulul comun al celor două forțe, și cu X, Y, Z, M_x, M_y, M_z coordonatele torsorului din O, echivalent cu sistemul de forțe, se poate scrie:

$$X = 0, \qquad Y = F, \qquad Z = F,$$

$$M_x = 0, \qquad M_y = 0, \qquad M_z = +aF.$$

Deci torsorul, în raport cu O, al sistemului este reprezentat în figura 125 prin $\bar{V}$ și $\bar{M}$ din planul yOz.

Expresiile complexe sînt:

$$\bar{V} = F\bar{j} + F\bar{k}, \qquad \bar{M} = aF\bar{k}.$$

Căutînd torsorul din noul centru de reducere $O'(x, y, z)$, se găsește același $\bar{V}$, dar:

$$\bar{M}' = \bar{M} - \bar{r} \times \bar{V} = (z - y)F\bar{i} + xF\bar{j} + (a - x)F\bar{k}.$$

Scriind că în noul centru $\bar{M}'$ și $\bar{V}$ sînt coliniari,

$$\frac{(z - y)F}{0} = \frac{xF}{F} = \frac{(a - x)F}{F},$$

se deduc ecuațiile axei centrale:

$$z - y = 0 \qquad x = \frac{a}{2},$$

o dreaptă care trece prin C, mijlocul barei, paralel cu bisectoarea unghiului yOz (fig. 124). Modulul momentului minim este:

$$|\bar{m}| = F\frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

5° Să se reducă sistemul de vectori alunecători dispuşi ca în figura 126 după muchiile şi feţele unui cub de muchie a, ştiind că:

$$|\bar{V}_1| = |\bar{V}_2|, \quad |\bar{V}_3| = \frac{|\bar{V}_1|}{3}, \quad |\bar{V}_4| = \frac{|\bar{V}_1|\sqrt{2}}{3}.$$

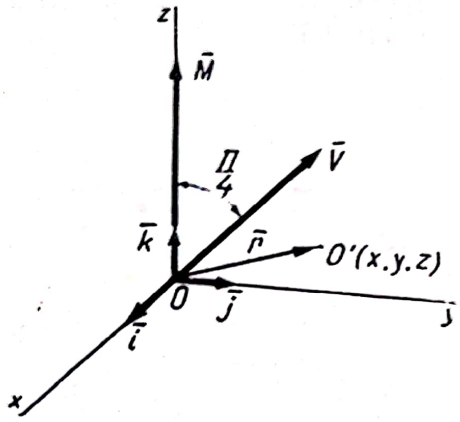


Fig. 125

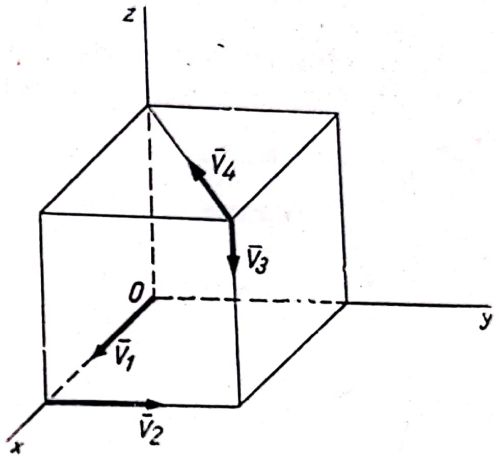


Fig. 126

Rezultat. Sistemul se reduce la un torsor minimal cu axa centrală:

$$\frac{x-\frac{2a}{3}}{2} = \frac{y+\frac{2a}{3}}{2} = \frac{z}{-1},$$

cu:

$$|\bar{V}| = |\bar{V}_1| \quad \text{şi} \quad |\bar{M}'| = \frac{a|\bar{V}_1|}{3}.$$

CAPITOLUL V

CENTRE DE GREUTATE. CENTRE DE MASĂ

A. BAZE TEORETICE

§ 50. Greutatea şi centrul de greutate al unui corp

În mişcarea mecanică a unui sistem material de pe Pământ, una din acţiunile care joacă un rol important este atracţia Pământului. Din cauza mişcării de rotaţie a Pământului, forţa de atracţie se compune cu forţa centrifugă pentru a da *greutatea fiecărei particule materiale*, o forţă îndreptată aproximativ spre centrul Pământului[1].

[1] v. § 122.

Din cauză că dimensiunile corpurilor care fac obiectul problemelor obișnuite puse de tehnică sînt relativ mici față de raza Pămîntului (6 378 000 m), direcțiile greutăților particulelor unui corp sînt practic *paralele*. Astfel, pentru o locomotivă, avînd lungimea de 18 m, direcțiile greutăților particulelor extreme A și B (fig. 127) formează între ele un unghi :

$$\alpha = \frac{18 \cdot 180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi \ 6\ 378\ 000} \approx 0{,}6'',$$

adică mai mic decît o secundă sexagesimală.

În aceste condiții, calculul greutății unui corp este o problemă de determinare a rezultantei unui sistem de forțe paralele sau de reducere a unui sistem de vectori alunecători cu suporturile paralele.

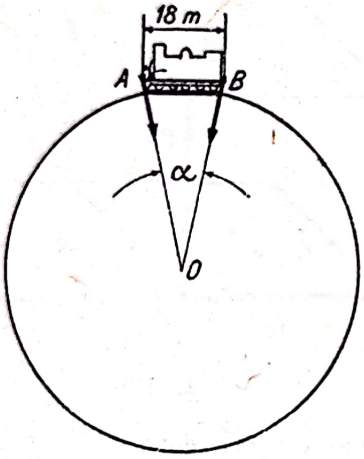


Fig. 127

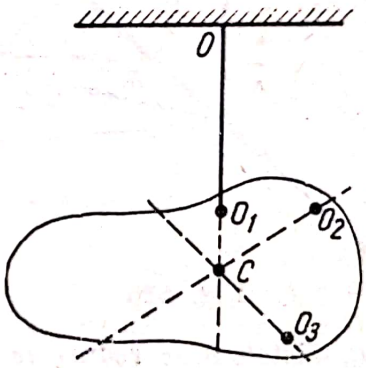


Fig.128

Pe de altă parte, se știe că prin metode experimentale simple se poate determina linia de acțiune a greutății unui solid, de pildă prin suspendarea lui cu ajutorul unui fir (fig. 128). În poziția de repaus a solidului, firul coincide cu suportul rezultantei, greutatea solidului. Schimbînd punctul de suspensie, experiența arată că toate suporturile se întîlnesc într-un punct C. Acest punct se numește *centrul de greutate* al solidului.

Plecînd de la ideea care se desprinde din această experiență, și anume că, oricare ar fi așezarea solidului față de Pămînt, centrul de greutate rămîne același, se va determina prin calcul poziția centrului de greutate al unui sistem de puncte materiale și se va arăta că acest centru coincide cu *centrul de masă* al sistemului.

În acest scop se vor folosi rezultatele de la reducerea unui sistem de vectori alunecători cu suporturi paralele.

§ 51. Centrul unui sistem de mărimi scalare. Vectori legați

a. Se consideră un sistem de n vectori alunecători $(\bar{V}_i, D_i)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ cu suporturi paralele, reductibil la un vector rezultant unic.

Se știe (§ 48) că, exprimînd vectorii :

$$\bar{V}_i = m_i \bar{u},$$

cu ajutorul versorului $\bar{u}$ al direcției comune și al mărimilor scalare m_i corespunzătoare, ecuația suportului vectorului rezultant unic este :

$$\bar{r} = \bar{r}_c + \lambda\bar{u}.$$

În această ecuație, λ este un parametru scalar, $\bar{r}$ este vectorul de poziție al unui punct curent al suportului, iar $\bar{r}_c$ este vectorul de poziție al unui anumit punct C al suportului (fig. 129).

S-a determinat expresia :

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i}{m}, \qquad (5.1)$$

unde :

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \neq 0. \qquad (5.2)$$

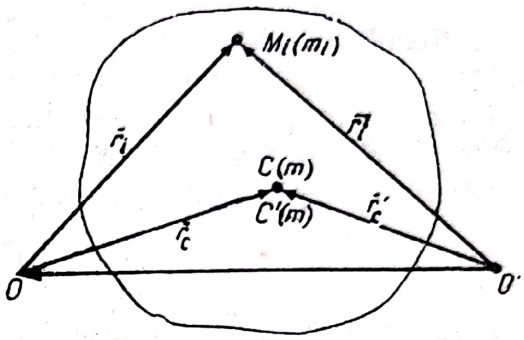


Fig. 129

Se constată că punctul C există numai dacă este satisfăcută condiția (5.2), iar poziția acestui punct depinde de pozițiile originilor M_i ale vectorilor și de scalarii m_i, și este *independentă de* $\bar{u}$.

b. Dacă se fixează originile vectorilor în raport cu un sistem de referință cu originea în O, vectorii devin *legați*. Punctul C, prin care trece suportul vectorului rezultant, rămîne fix chiar dacă variază direcția comună a vectorilor paraleli, deoarece $\bar{r}_c$ este independent de $\bar{u}$.

Poziția acestui punct depinde numai de *configurația de puncte* M_i și de *distribuția* în aceste puncte a *scalarilor* m_i.

Se definește punctul C, *ca centru al sistemului de mărimi scalare* m_i *distribuite în punctele* M_i, *determinat prin relația* (5.1), *cu condiția* (5.2).

c. *Proprietățile centrului* C. 1° Dacă toate mărimile scalare sînt multiplicate prin același scalar c, diferit de zero, poziția centrului nu se schimbă, deoarece :

$$\bar{r}'_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} cm_i\bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} cm_i} = \frac{c\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i}{c\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i}{m} = \bar{r}_c.$$

2° Poziția centrului nu depinde de sistemul de referință. Dacă noul sistem de referință își are originea în O', iar relația de transformare este :

$$\bar{r}'_i = \overline{O'O} + \bar{r}_i, \qquad (5.3)$$

poziția centrului C', al sistemului de mărimi m_i, în raport cu sistemul de referință O', este determinată prin :

$$\bar{r}'_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}'_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{O'O} + \bar{r}_i)}{m} = \overline{O'O} + \bar{r}_c.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece vectorul de poziţie al centrului C' satisface aceeaşi relaţie de transformare (5.3) ca toate punctele sistemului, înseamnă că C' coincide cu C (fig. 129).

§ 52. Centrul de greutate, centrul de masă

a. Rezultatele stabilite (§ 51) sînt utile pentru determinarea poziţiei centrului de greutate al unui sistem de puncte materiale.

Deoarece masa gravifică şi masa inertă sînt egale, se poate nota cu m_i masa punctului M_i, iar cu $\bar{g}$ acceleraţia greutăţii într-un loc pe Pămînt.

Greutatea $\bar{G}_i$ a punctului material M_i se exprimă în acest caz prin :

$$\bar{G}_i = m_i\bar{g}.$$

Deoarece forţele $\bar{G}_i$ sînt practic paralele, rezultanta lor $\bar{G}$, greutatea sistemului de puncte materiale, este :

$$\bar{G} = \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{g} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\bar{g} = m\bar{g}, \tag{5.4}$$

unde m este masa sistemului.

Poziţia centrului de greutate este determinată, în raport cu un sistem de referinţă, prin :

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i}{m}. \tag{5.5}$$

Deoarece această poziţie este independentă de $\bar{g}$, rezultă că *centrul de greutate coincide cu centrul sistemului de mărimi* m_i, *adică cu centrul de masă* al sistemului de puncte materiale.

b. *Observaţii.* 1° Centrul de masă al unui sistem material există indiferent dacă sistemul material este greu sau nu, adică dacă se află sau nu în sfera de gravitaţie a unui alt sistem material.

2° Poziţia centrului de masă al unui sistem de puncte materiale depinde de *configuraţia geometrică* a sistemului de puncte şi de *distribuţia maselor* şi, ca urmare a proprietăţii c, 2° de la § 51, este independentă de sistemul de referinţă.

3° Orice sistem, chiar deformabil, de puncte materiale are în orice moment un centru de masă a cărui poziţie, în raport cu un sistem de referinţă, este determinată prin relaţia (5.5).

c. *Expresii analitice.* Prin raportarea sistemului de puncte materiale M_i de mase m_i ($i = 1, 2, 3,.., n$) la triedrul tridreptunghic $Oxyz$ se pot calcula coordonatele centrului de masă.

Scanned with OKEN Scanner

Se notează cu x_i, y_i, z_i coordonatele punctului M_i şi cu x_c, y_c, z_c coordonatele centrului C (fig. 130) şi se înlocuiesc în (5.5) expresiile complexe :

$$\bar{r}_i = x_i\bar{i} + y_i\bar{j} + z_i\bar{k}$$

şi

$$\bar{r}_c = x_c\bar{i} + y_c\bar{j} + z_c\bar{k}.$$

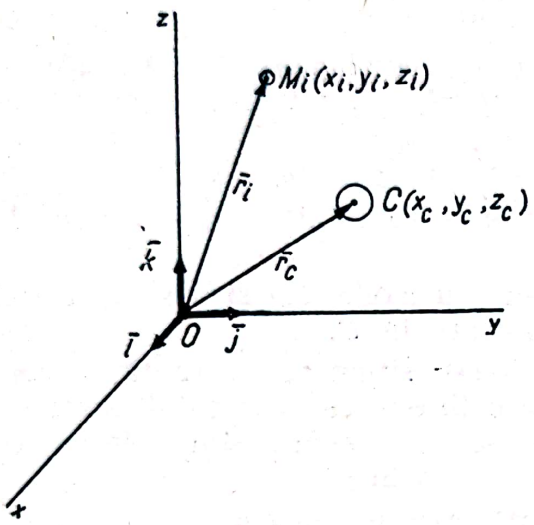


Fig. 130

Rezultatul înlocuirii se exprimă prin relaţiile :

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m},$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}. \tag{5.6}$$

Dacă punctele M_i se află într-un plan, se poate alege sistemul de referinţă Oxy în acest plan, iar coordonatele centrului de masă sînt date de primele două relaţii din (5.6). De asemenea, în cazul unui sistem de puncte materiale pe o dreaptă, abscisa centrului de masă, în raport cu axa Ox de pe această dreaptă, este dată de prima relaţie din (5.6).

§ 53. Teorema momentelor statice

a. *Momente statice.* Masa unui sistem material poate fi distribuită oricum în acest sistem.

În mecanică se întîlnesc două mărimi care exprimă, în două moduri diferite, *distribuţia masei faţă de un reper oarecare.* Aceste mărimi sînt : *momentul static al masei* şi *momentul de inerţie*[1] *al masei*, în raport cu un punct, sau cu o axă, sau cu un plan.

În cazul cînd sistemul material este un continuu omogen, momentele statice şi momentele de inerţie exprimă *modul de aşezare a formei geometrice a continuului* faţă de reperul considerat. Acestea sînt *momentele statice geometrice* şi *momentele de inerţie geometrice* şi privesc *volumul* ocupat de continuul material. Dacă continuul este cu două dimensiuni sau cu o singură dimensiune, în aceste cazuri, momentele statice şi momentele de inerţie geometrice privesc *aria*, respectiv *lungimea arcului* ocupat de continuul considerat.

Momentele statice şi cele de inerţie, geometrice, găsesc o largă aplicaţie mai ales în rezistenţa materialelor.

[1] vezi §§ 131 şi 132.

În paragraful de față se dau expresiile matematice ale *momentelor statice masice*, pentru un sistem de puncte materiale, după cum urmează :

$m_i\bar{r}_i$, momentul static al punctului material M_i în raport cu originea O a sistemului de referință ;

$m\bar{r}_c$, momentul static, în raport cu O, al masei sistemului presupusă concentrată în centrul ei C ;

m_ix_i, m_iy_i, m_iz_i, momentele statice ale punctului material M_i în raport cu planele yOz, zOx, xOy ;

mx_c, my_c, mz_c, momentele statice, în raport cu planele yOz, zOx, xOy ale masei sistemului, presupusă concentrată în centrul de masă.

Dacă configurația punctelor sistemului este plană se definesc :

m_ix_i, m_iy_i ca momente statice ale punctului material M_i în raport cu axele Oy și Ox ;

mx_c, my_c ca momente statice, în raport cu axele Oy și Ox, ale masei sistemului, presupusă concentrată în C.

În fine, dacă sistemul de puncte materiale este situat pe o dreaptă, pe care se alege sistemul de referință Ox, m_ix_i se definește ca momentul static al punctului material M_i în raport cu O, iar mx_c, momentul static, în raport cu O, al masei sistemului, presupusă concentrată în C.

Pe baza definițiilor, relațiile (5.5) și (5.6), scrise sub forma :

$$m\bar{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i, \tag{5.7}$$

respectiv :

$$mx_c = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i, \quad my_c = \sum_{i=1}^{n} m_iy_i, \quad mz_c = \sum_{i=1}^{n} m_iz_i, \tag{5.8}$$

exprimă următoarea *teoremă a momentelor statice* :

Momentul static, în raport cu un punct, un plan sau o axă, al masei sistemului, presupusă concentrată în centrul ei, este egal cu suma momentelor statice, în raport cu punctul, planul sau axa considerată, ale tuturor punctelor materiale ale sistemului.

b. *Observații.* 1° Prin definiție, suma momentelor statice ale punctelor materiale ale sistemului este *momentul static al sistemului.*

2° Se poate da teoremei un enunț prescurtat : *Momentul static al masei totale, concentrată în centrul ei, este egal cu momentul static al sistemului.*

3° Momentul static al unui sistem în raport cu centrul lui de masă este nul. Momentul static în raport cu un plan care conține centrul de masă este nul. Dacă sistemul este plan, momentul static al sistemului în raport cu orice axă care trece prin centrul de masă este nul. Aceste proprietăți se deduc imediat din enunțul însuși al teoremei momentelor statice. De pildă, dacă se alege punctul O, chiar în centrul de masă, evident $\bar{r}_c = 0$, iar momentul static al sistemului în raport cu centrul de masă este nul etc.

Scanned with OKEN Scanner

§ 54. Sisteme de puncte materiale simetrice

a. *Dacă un sistem de puncte materiale este caracterizat printr-o simetrie, în raport cu un punct O, atît a poziţiilor punctelor materiale cît şi a distribuţiei maselor, centrul sistemului este chiar punctul O.*

Se alege ca origine a sistemului de referinţă punctul O (fig. 131). Dacă M_i şi M_i' sînt două din punctele materiale, de aceeaşi masă m_i aşezate simetric în raport cu O, adică:

$$\bar{r}_i + \bar{r}_i' = 0,$$

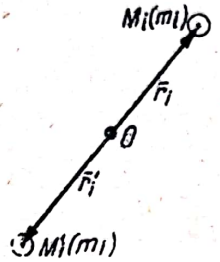


Fig. 131

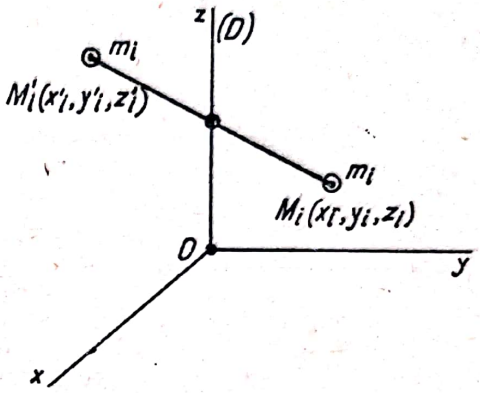


Fig. 132

centrul de masă al sistemului se găseşte în punctul O, deoarece:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i + \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i'}{2\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i(\bar{r}_i + \bar{r}_i')}{2\sum_{i=1}^{n} m_i} = 0.$$

b. *Dacă un sistem de puncte materiale este caracterizat printr-o simetrie, în raport cu o dreaptă (D), atît a poziţiilor punctelor cît şi a distribuţiei de mase, centrul sistemului se află pe dreapta (D).*

Se alege sistemul de referinţă cu dreapta (D) ca axă Oz (fig. 132). Dacă $M_i(x_i, y_i, z_i)$ şi $M_i'(x_i', y_i', z_i')$ sînt două din punctele materiale, de aceeaşi masă m_i, dispuse simetric în raport cu Oz, rezultă:

$$x_i + x_i' = 0;\ y_i + y_i' = 0;\ z_i = z_i'.$$

În aceste condiţii, centrul de masă al sistemului de puncte materiale are coordonatele:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i + \sum_{i=1}^{n} m_i x_i'}{2\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\ (x_i + x_i')}{2\sum_{i=1}^{n} m_i} = 0,$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\ (y_i + y_i')}{2\sum_{i=1}^{n} m_i} = 0;$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i + \sum_{i=1}^{n} m_i z_i'}{2\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

adică centrul se află pe axa Oz, adică pe (D).

c. *Dacă un sistem de puncte materiale este caracterizat printr-o simetrie, în raport cu un plan* (P), *atît a poziţiilor punctelor cît şi a distribuţiei maselor, centrul sistemului se găseşte în planul* (P).

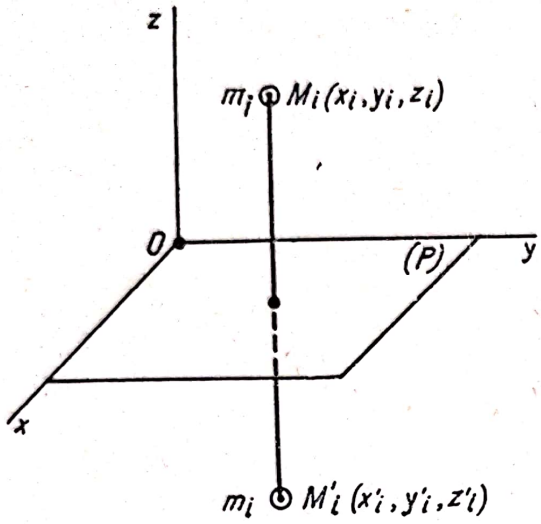


Fig. 133

Se alege planul (P) ca plan Oxy al sistemului de referinţă (fig. 133). Două cîte două, punctele materiale, simetric dispuse faţă de Oxy, au masele egale m_i, iar coordonatele lor satisfac relaţiile:

$$x_i = x'_i,\ y_i = y'_i,\ z_i + z'_i = 0.$$

Calculînd cota centrului de masă se găseşte:

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i + \sum_{i=1}^{n} m_i z'_i}{2\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i (z_i + z'_i)}{2\sum_{i=1}^{n} m_i} = 0,$$

ceea ce demonstrează că centrul de masă se găseşte în planul (P).

d. *Observaţii.* 1° Cunoaşterea simetriei aduce simplificări în calculul centrului de masă al unui sistem de puncte materiale.

2° Este important de accentuat că nu este suficientă o simetrie în poziţia punctelor materiale, ci mai este necesar ca două cîte două punctele simetrice să aibă şi aceeaşi masă.

3° Existenţa unei simetrii este utilă determinării centrului de masă, însă faptul că există centrul de masă *nu atrage după sine şi existenţa unei simetrii.*

4° În acest paragraf s-a studiat simetria dreaptă, astfel dreptele $M_i M'_i$ sînt perpendiculare pe axa Oz sau pe planul Oxy. Mai există şi posibilitatea unei simetrii oblice în care dreptele $M_i M'_i$ sînt paralele cu o direcţie anumită.

§ 55. Centrul de masă al unui continuu

a. Se consideră un continuu material (§ 2, *c*) din domeniul (D), M un punct curent al domeniului şi Δm un element de masă distribuit unui element de volum ΔV din jurul punctului curent M (fig. 134).

Se notează cu $\bar{r}$ şi $\bar{r}_c$ vectorii de poziţie, în raport cu reperul cu originea în O, al punctului M şi al centrului de masă C.

Pentru determinarea acestui centru se va admite că teorema momentelor statice, stabilită asupra unui sistem material discret, se poate extinde şi asupra continuului.

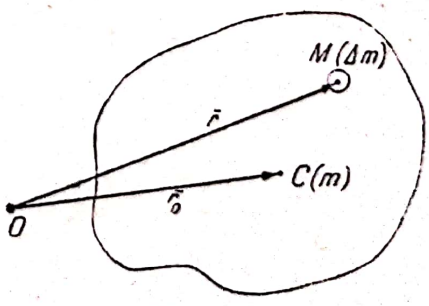


Fig. 134

Pentru aceasta, punctul curent M va fi considerat ca un punct material de masă Δm. În această ipoteză, teorema se exprimă prin relaţia :

$$\bar{r}_c \sum \Delta m = \sum \bar{r} \Delta m,$$

care apoi, printr-un proces de trecere la limită, devine :

$$\bar{r}_c \int_{(D)} dm = \int_{(D)} \bar{r}\, dm. \tag{5.9}$$

Deoarece densitatea în M este :

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV},$$

dacă această limită există, din (5.9) se deduce :

$$\bar{r}_c = \frac{\int_{(V)} \bar{r}\, \rho\, dV}{\int_{(V)} \rho\, dV}, \tag{5.10}$$

integralele sînt triple şi extinse la întreg domeniul (D) al continuului de volum V.

b. Deşi orice sistem material are trei dimensiuni, totuşi dacă una din dimensiuni este neglijabilă faţă de celelalte două (placă plană sau curbă) se poate considera, într-un calcul aproximativ, că întreaga masă este distribuită pe o suprafaţă. Dacă M este un punct curent de pe suprafaţă, ΔA un element de arie în jurul punctului M, Δm un element de masă conţinut în ΔA şi dacă ρ este densitatea superficială :

$$\rho = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta A} = \frac{dm}{dA},$$

cînd această limită există, vectorul de poziţie al centrului C este :

$$\bar{r}_c = \frac{\int_{(A)} \bar{r}\, \rho\, dA}{\int_{(A)} \rho\, dA}, \tag{5.11}$$

unde integralele sînt duble şi extinse la întreg domeniul (D) al plăcii de arie A.

c. Dacă două din dimensiunile continuului material sînt neglijabile faţă de a treia, se poate considera că masa este distribuită pe o curbă, şi dacă ρ este densitatea liniară :

$$\rho = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = \frac{dm}{ds},$$

poziţia centrului de masă se determină cu :

$$\bar{r}_c = \frac{\int_{(l)} \bar{r}\, \rho\, ds}{\int_{(l)} \rho\, ds}, \tag{5.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde ds este elementul de arc al curbei, iar integralele sînt simple şi extinse la întreg domeniul (D) al curbei de lungime l.

d. *Centre de greutate geometrice.* Densitatea este un scalar care, în general, depinde de poziţia punctului curent, deci ρ este o funcţie scalară de $\bar{r}$. În ipoteza că ρ este *constant*, continuul se numeşte *omogen*, iar de la ecuaţia (5.9) se ajunge, după simplificarea cu ρ, la ecuaţia :

$$\bar{r}_c \int_{(V)} \mathrm{d}V = \int_{(V)} \bar{r}\,\mathrm{d}V, \tag{5.13}$$

sau la ecuaţia :

$$\bar{r}_c \int_{(A)} \mathrm{d}A = \int_{(A)} \bar{r}\,\mathrm{d}A, \tag{5.14}$$

sau la :

$$\bar{r}_c \int_{(l)} \mathrm{d}s = \int_{(l)} \bar{r}\,\mathrm{d}s, \tag{5.15}$$

după cum continuul are trei, două sau o singură dimensiune.

Întocmai ca la momentele statice ale sistemelor discrete de puncte materiale se definesc :

$\bar{r}\,\mathrm{d}V$ *este momentul static geometric*, în raport cu O, al elementului de *volum* $\mathrm{d}V$ din jurul punctului curent M;

$\bar{r}\,\mathrm{d}A$ *este momentul static geometric*, în raport cu O, al elementului de *arie* $\mathrm{d}A$ din jurul punctului M;

$\bar{r}\,\mathrm{d}s$ *este momentul static geometric*, în raport cu O, al elementului de *arc de curbă* $\mathrm{d}s$ din punctul M.

Apoi, folosind expresiile complexe ale vectorilor de poziţie, fiecare din cele trei ecuaţii precedente se proiectează pe axele şi planele sistemului de referinţă $Oxyz$.

În final, se poate ajunge la un enunţ al teoremei momentelor statice geometrice asemănător cu enunţul teoremei date la paragraful 53 pentru sistemele materiale discrete.

Din ecuaţiile (5.13), (5.14) şi (5.15) se obţin expresiile vectorului de poziţie al centrului de masă al continuului omogen cu trei, cu două şi cu o singură dimensiune :

$$\bar{r}_c = \frac{\int_{(V)} \bar{r}\,\mathrm{d}V}{V}, \tag{5.16}$$

$$\bar{r}_c = \frac{\int_{(A)} \bar{r}\,\mathrm{d}A}{A}, \tag{5.17}$$

$$\bar{r}_c = \frac{\int_{(l)} \bar{r}\,\mathrm{d}s}{l}. \tag{5.18}$$

Se constată că acest centru coincide cu *centrul de greutate* al volumului, respectiv al ariei sau al arcului de curbă, conținut în continuul considerat.

e. *Expresii analitice.* Prin proiectarea vectorilor $\bar{r}_c$ și $\bar{r}$ pe axele unui sistem de referință cartezian $Oxyz$ se obțin expresiile coordonatelor x_c, y_c, z_c ale centrului de masă al unui continuu, deduse din expresiile vectoriale (5.10), (5.11) și (5.12).

Astfel, din (5.10) se deduc expresiile :

$$x_c = \frac{\iiint\limits_{(D)} \rho x \, dx\, dy\, dz}{\iiint\limits_{(D)} \rho \, dx\, dy\, dz}; \quad y_c = \frac{\iiint\limits_{(D)} \rho y \, dx\, dy\, dz}{\iiint\limits_{(D)} \rho \, dx\, dy\, dz}; \quad z_c = \frac{\iiint\limits_{(D)} \rho z \, dx\, dy\, dz}{\iiint\limits_{(D)} \rho \, dx\, dy\, dz}, \tag{5.19}$$

unde ρ este o funcție de coordonatele x, y, z ale punctului curent. Integralele se extind la întreg domeniul (D) al continuului. Dacă continuul este omogen, ρ dispare din expresiile (5.19), care, în acest caz, dau coordonatele centrului de greutate al volumului.

Din (5.11), în ipoteza că ecuația suprafeței plăcii se poate scrie sub forma :

$$z = f(x, y)^1,$$

se obțin expresiile :

$$x_c = \frac{\iint\limits_{(D)} \rho x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy}{\iint\limits_{(D)} \rho \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_{(D)} \rho y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy}{\iint\limits_{(D)} \rho \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy};$$

$$z_c = \frac{\iint\limits_{(D)} \rho z \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy}{\iint\limits_{(D)} \rho \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy}. \tag{5.20}$$

În aceste expresii, ρ este o funcție de coordonate x și y, iar integralele se extind la întreg domeniul (D) al plăcii.

Dacă placa este omogenă, ρ este constant și dispare din expresiile (5.20), care în acest caz servesc la determinarea centrului de greutate al ariei plăcii considerate.

În fine, din (5.12), dacă ecuațiile curbei, pe care se presupune distribuită masa continuului, sînt :

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t),^2$$

---

[1] Funcția $f(x, y)$ și derivatele ei parțiale de ordinul I în raport cu x și y sînt considerate continue.

[2] Funcțiile $f(t)$, $g(t)$ și $h(t)$ sînt uniforme, continue și admit derivate continue de ordinul I și care nu se anulează în același timp.

unde t este un scalar variabil, coordonatele centrului de masă sînt date de:

$$x_c = \frac{\int\limits_{(D)} \rho x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt}{\int\limits_{(D)} \rho \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt}; \quad y_c = \frac{\int\limits_{(D)} \rho y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt}{\int\limits_{(D)} \rho \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt};$$

$$z_c = \frac{\int\limits_{(D)} \rho z \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt}{\int\limits_{(D)} \rho \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt}, \tag{5.21}$$

unde ρ este o funcţie de scalarul t, iar integralele se extind la întreg domeniul curbei.

Dacă continuul este omogen, ecuaţiile (5.21), după simplificarea cu ρ, determină coordonatele centrului de greutate al arcului de curbă considerat.

B. APLICAŢII

§ 56. **Indicaţii metodice**

a. De obicei, pentru determinarea centrului de masă al unui sistem de puncte materiale se folosesc formulele stabilite la § 52, iar în cazul unui continuu material neomogen sau omogen se folosesc formulele de la § 55.

Operaţia determinării se rezumă la calcularea unor coordonate fie prin însumări, fie prin integrări. Uneori, calculele fiind lungi, se pot strecura erori. Pentru simplificarea calculelor şi mai ales pentru a da posibilitatea unui control permanent se recomandă următoarele:

1° Dacă sistemul material este simetric faţă de un punct, este evident că centrul de masă este chiar acest punct.

Dacă simetria este în raport cu o axă, aceasta va fi aleasă ca una din axele de coordonate şi conţine centrul de masă.

Dacă sistemul material este simetric faţă de un plan, acest plan va fi ales ca unul din planele sistemului de referinţă *Oxyz* şi conţine centrul de masă.

Deci, în primul rînd se vor folosi simetriile de care se bucură sistemul material pentru alegerea celor mai potrivite axe de coordonate.

2° În al doilea rînd, dacă sistemul material se compune din mai multe părţi, ale căror centre de masă sînt cunoscute, se pot concentra masele parţiale în centrele respective, *însă numai pentru calcularea poziţiei centrului de masă al întregului sistem.*

De asemenea, dacă un sistem material are goluri, se poate presupune că întregul sistem se compune din părţi existente, cu *mase pozitive*, şi din părţi lipsă, cu *mase negative.* Toate masele, pozitive şi negative, vor fi concentrate

în centrele părţilor respective, aceasta numai pentru calcularea centrului de masă al sistemului material, adică al întregului.

3° Pentru evitarea operaţiilor de calcul automat se va aplica, în raport cu axele sau planele sistemului de referinţă ales, teorema momentelor statice :

Momentul static al întregii mase, presupusă concentrată în centrul ei, este egal cu suma momentelor statice ale părţilor (pozitive sau negative) presupuse concentrate în centrele respective.

b. În paragrafele următoare sînt rezolvate diferite aplicaţii cu privire la determinarea centrelor de masă ale unor sisteme materiale, cu una, două şi trei dimensiuni. De asemenea, tot ca aplicaţii sînt stabilite şi cunoscutele[1] teoreme *Guldin-Pappus* (v. § 60).

§ 57. Sisteme unidimensionale

1° Să se determine centrul de masă al unei bare rectilinii neomogene OA de lungime l, ştiind că densitatea variază liniar de la ρ_0 în O la ρ_1 în A.

Rezolvare. Se alege axa Ox după bara OA (fig. 135). Fie M un punct curent de pe bară de abscisă x, MM' un element de bară cu lungimea Δx, şi $C(x_c)$ centrul de masă căutat.

Legea după care variază densitatea în funcţie de x este :

$$\rho = \rho_0 + \frac{\rho_1 - \rho_0}{l} x.$$

Masa totală a barei este :

$$\int_0^l \rho \, dx = \int_0^l \left(\rho_0 + \frac{\rho_1 - \rho_0}{l} x \right) dx = \frac{\rho_0 + \rho_1}{2} l.$$

Aplicînd teorema momentelor statice în raport cu O :

$$x_c \left(\frac{\rho_0 + \rho_1}{2} \right) l = \int_0^l x \left(\rho_0 + \frac{\rho_1 - \rho_0}{l} x \right) dx,$$

rezultatul este :

$$x_c = \frac{\rho_0 + 2\rho_1}{3(\rho_0 + \rho_1)} l.$$

În cazul particular al barei omogene :

$$\rho_0 = \rho_1, \quad x_c = \frac{l}{2}.$$

2° Să se determine centrul de masă al unui echer OAB, format din două bare omogene de lungimi $2a$ şi $2b$, de densităţi ρ_1 şi ρ_2, perpendiculare între ele (fig. 136).

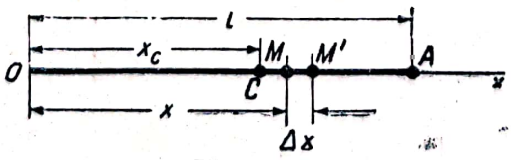


Fig. 135

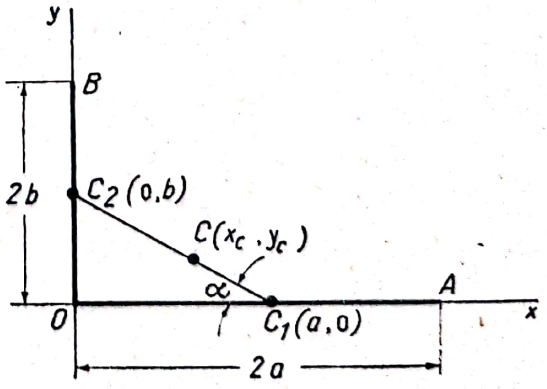


Fig. 136

[1] Din cursurile de analiză matematică.

Rezolvare. Se aleg axele Ox şi Oy după OA şi OB. Barele fiind omogene, centrele lor de masă sînt în C_1, şi C_2 mijloacele lor. Centrul de masă al echerului este undeva în $C\ (x_c, y_c)$ în planul axelor. Se presupun masele barelor concentrate în centrele respective: în $C_1\ (a, 0)$ masa $2a\rho_1$, în $C_2\ (0, b)$ masa $2b\rho_2$.

De asemenea, se presupune că masa echerului $2\ (a\rho_1 + b\rho_2)$ este concentrată în centrul C.

Aplicînd teorema momentelor statice în raport cu Oy, respectiv cu Ox:

$$2(a\rho_1 + b\rho_2)\ x_c = (2a\rho_1)\ a + (2b\rho_2) \cdot 0,$$

$$2(a\rho_1 + b\rho_2)\ y_c = (2a\rho_1) \cdot 0 + (2b\rho_2)\ b,$$

se determină:

$$x_c = \frac{\rho_1 a^2}{\rho_1 a + \rho_2 b}; \qquad y_c = \frac{\rho_2 b^2}{\rho_1 a + \rho_2 b}.$$

Observaţie. Deoarece:

$$\frac{x_c}{a} + \frac{y_c}{b} = 1,$$

rezultă că centrul C se află pe dreapta $C_1\ C_2$, şi cum:

$$\frac{CC_1}{CC_2} = \frac{\frac{y_c}{\sin\alpha}}{\frac{x_c}{\cos\alpha}} = \frac{y_c}{x_c}\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\rho_2 b^2}{\rho_1 a^2} \cdot \frac{a}{b} = \frac{\rho_2 b}{\rho_1 a},$$

centrul de masă C împarte segmentul C_1C_2 în părţi invers proporţionale cu masele presupuse concentrate la extremităţile lui.

3° Să se determine poziţia centrului de greutate al perimetrului unui triunghi oarecare (fig. 137).

Rezolvare. Dacă se presupun concentrate în centrele A_1, B_1, C_1 ale laturilor mărimile lor, a, b şi c, problema se reduce la determinarea centrului O al sistemului de mărimi din A_1, B_1, C_1.

Centrul sistemului B_1, C_1 este A_2 pe $B_1\ C_1$, astfel că:

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{c}{b},$$

adică se găseşte pe bisectoarea din A_1 a triunghiului median $A_1\ B_1\ C_1$. Cum centrul O se găseşte la fel şi pe celelalte bisectoare, el este la intersecţia bisectoarelor triunghiului median.

4° Să se determine centrul de masă al unei bare omogene avînd forma unui arc de cerc de rază r şi cu unghiul la centrul 2α măsurat în radiani (fig. 138).

Rezolvare. Bara fiind omogenă admite o axă de simetrie OA. O este centrul cercului, iar A mijlocul arcului.

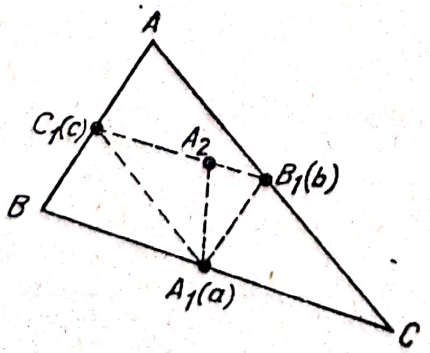


Fig. 137

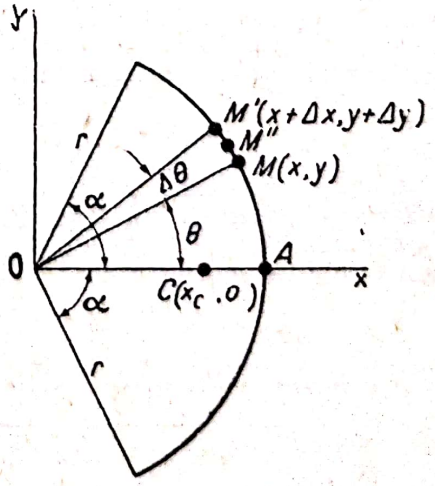


Fig. 138

Se alege sistemul de referinţă cu originea în O şi cu axa Ox după axa de simetrie, iar Oy perpendiculara în O pe OA. Deoarece centrul C se va găsi pe axa de simetrie, nu rămîne de determinat decît x_c, abscisa centrului.

Fie $M(x,y)$ un punct curent al arcului de cerc, $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ un punct infinit vecin şi Δm masa coardei elementare MM', presupusă concentrată în mijlocul ei M'':

$$\Delta m \approx \rho r \Delta\theta$$

unde:

ρ = densitatea liniară în M;

$\Delta\theta$ = unghiul sub care se vede din O arcul MM'.

Se aplică teorema momentelor statice în raport cu Oy şi la limită:

$$x_c \int_{-\alpha}^{+\alpha} \rho r \, d\theta = \int_{-\alpha}^{+\alpha} x \rho r \, d\theta;$$

cum ρ este acelaşi în toate punctele arcului, iar:

$$x = r \cos\theta;$$

după integrare, se găseşte:

$$x_c = \frac{r \sin\alpha}{\alpha}. \tag{5.22}$$

Observaţii. 1) Formula (5.22) este verificată pentru cazurile limită:

$$\alpha = 0, \text{ cînd } x_c = r$$

şi $\alpha = \pi$, cînd $x_c = 0$.

2) În cazul unei jumătăţi de cerc: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ şi $x_c = \frac{2r}{\pi}$.

3) În cazul unui sfert de cerc: $\alpha = \frac{\pi}{4}$ şi $x_c = \frac{2r\sqrt{2}}{\pi}$.

5° Să se determine centrul de masă al unui sistem omogen de bare avînd forma şi dimensiunile din figura 13 9.

Răspuns:

$$x_c = \frac{5a}{2(\pi + 2)},$$

$$y_c = \frac{7a}{2(\pi + 2)}.$$

6° Să se determine poziţia centrului de masă al sistemului omogen de bare avînd forma şi dimensiunile din figura 140.

Răspuns:

$$x_c = \frac{3\pi}{3\pi + 2} a;$$

$$y_c = \frac{2(\pi + 2)}{3\pi + 2} a.$$

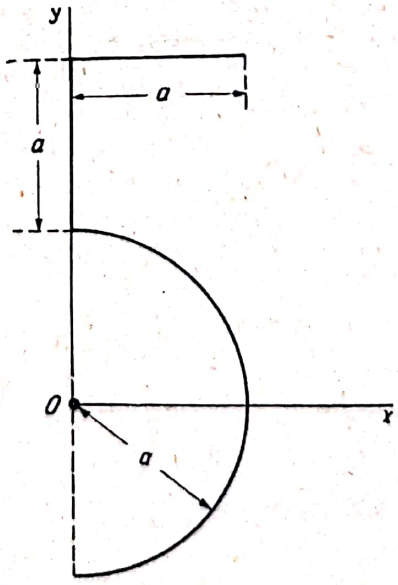


Fig. 139

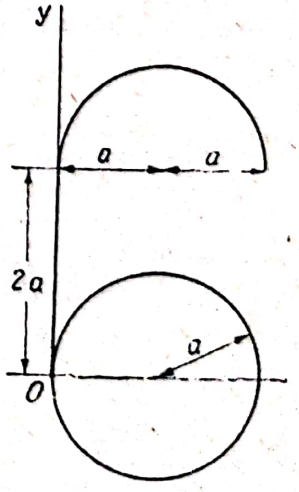


Fig. 140

§ 58. Sisteme bidimensionale

1° Să se determine centrul de masă al unei plăci plane omogene, de grosime neglijabilă, avînd forma unui dreptunghi.

Răspuns. Centrul se găseşte la intersecţia axelor de simetrie sau la intersecţia diagonalelor dreptunghiului.

2° Să se determine centrul de greutate al ariei unui triunghi oarecare (fig. 141).

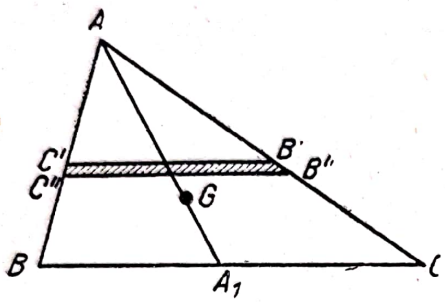


Fig. 141

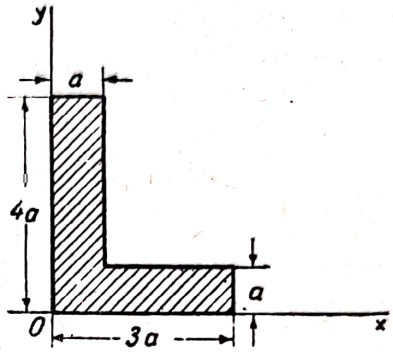


Fig. 142

Rezolvare. Se împarte aria triunghiului într-un mare număr de fîşii $C'B'C''B''$ foarte înguste, prin paralelele la una din laturi, de exemplu BC.

Fîşia este un trapez care, din cauza înălţimii foarte mici, poate fi asimilat cu un dreptunghi. Centrul de greutate al ariei dreptunghiului se găseşte pe mediana AA_1. Cum toate fîşiile au centrele de greutate pe această mediană, şi centrul de greutate G al ariei triunghiului este situat pe această mediană şi evident şi pe celelalte mediane, deci la intersecţia lor astfel ca:

$$\frac{AG}{AA_1} = \frac{2}{3}.$$

3° Să se determine centrul de masă al unei plăci omogene avînd forma şi dimensiunile arătate în figura 142.

Răspuns: În raport cu axele Oxy, coordonatele centrului sînt:

$$x_c = a \qquad y_c = 1{,}5\ a.$$

4° Să se determine centrul de greutate al ariei unui trapez oarecare (fig. 143).

Rezolvare. În primul rînd se demonstrează, ca la aplicaţia 2°, că centrul se află pe dreapta care uneşte mijloacele laturilor paralele. Apoi, aplicînd teorema momentelor statice, în raport cu una din laturile paralele (în fig. 143, baza mare), presupunînd trapezul format din două triunghiuri, se găseşte:

$$y_c = \frac{h}{3} \cdot \frac{B + 2b}{B + b}.$$

5° Să se determine centrul de masă al unei plăci omogene avînd forma unui sector circular de rază r şi cu unghiul la centru 2α, în radiani (fig. 144).

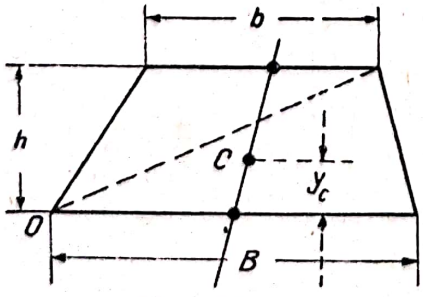


Fig. 143

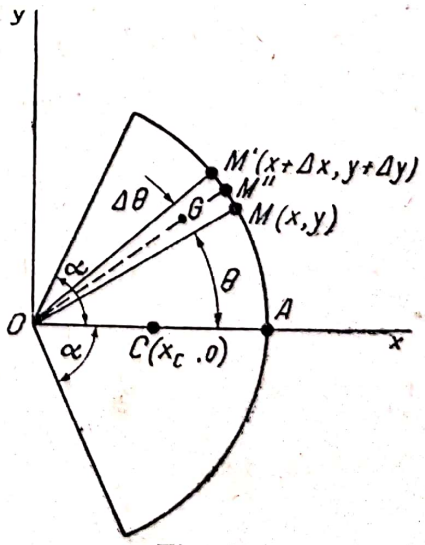


Fig. 144

Rezolvare. Se alege axa de simetrie OA a plăcii ca axă Ox, O fiind centrul cercului, axa Oy perpendiculara în O pe OA. Placa fiind omogenă, centrul ei de masă (centrul de greutate al ariei figurii) se va afla pe OA în $C\,(x_c, 0)$. Se împarte aria sectorului în sectoare infinitezimale, cu unghiul la centru $\Delta\theta$. Se consideră triunghiul elementar OMM'. Centrul de greutate al ariei acestui triunghi este în G pe raza OM'', astfel ca :

$$\frac{OG}{OM''} = \frac{2}{3}.$$

Coordonatele punctului G sînt : $\frac{2}{3}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$, $\frac{2}{3}\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)$, iar aria triunghiului elementar OMM' :

$$\Delta A \approx \frac{1}{2}\,\widehat{MM'} \cdot r = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta.$$

Centrul de greutate al ariei sectorului se găseşte aplicînd teorema momentelor statice în raport cu Oy şi la limită :

$$x_c \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{r^2\,d\theta}{2} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{2}{3}\,x\,\frac{r^2\,d\theta}{2} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{r^3\,d\theta}{3}\cos\theta = \frac{2r^3}{3}\sin\alpha,$$

de unde :

$$x_c = \frac{2r\,\sin\alpha}{3\alpha}. \tag{5.23}$$

Observaţii. 1) Formula (5.23) este verificată pentru cazul limită : $\alpha = \pi$, cînd $x_c = 0$, dar nu are sens pentru $\alpha = 0$.

2) Pentru cazul unui semicerc : $\alpha = \frac{\pi}{2}$ şi $x_c = \frac{4r}{3\pi}$.

3) Pentru un sfert de cerc : $\alpha = \frac{\pi}{4}$ şi $x_c = \frac{4r\sqrt{2}}{3\pi}$.

6° Să se determine centrul de greutate al ariei unui segment circular de raza r avînd unghiul la centru 2α, în radiani (fig. 145).

Rezolvare. Aria segmentului circular ABB' este diferenţa dintre aria sectorului circular $OB'AB$ şi aria triunghiului isoscel $OB'B$, iar centrul C se află pe OA, aleasă ca axă Ox. Se notează cu $C_1\,(x_1, 0)$ centrul de greutate al ariei sectorului şi cu $C_2\,(x_2, 0)$ centrul de greutate al ariei triunghiului, unde :

$$x_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{r\,\sin\alpha}{\alpha} \text{ şi } x_2 = \frac{2}{3}\,r\cos\alpha.$$

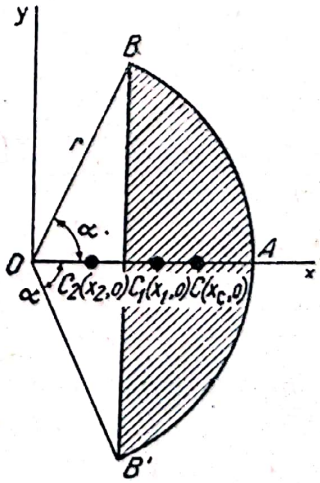


Fig. 145

Necunoscuta este abscisa x_c a punctului C, centrul de greutate al ariei segmentului. Se aplică teorema momentelor statice în raport cu axa Oy,

$$x_c\,(A_1 - A_2) = x_1 A_1 - x_2 A_2,$$

unde A_1 este aria sectorului, iar $(-A_2)$ aria negativă a triunghiului, ambele arii fiind presupuse concentrate în centrele de greutate respective.

Înlocuind şi efectuînd calculele, se găseşte:

$$x_c = \frac{2r \sin^3 \alpha}{3(\alpha - \sin\alpha \cos\alpha)}. \qquad (5.24)$$

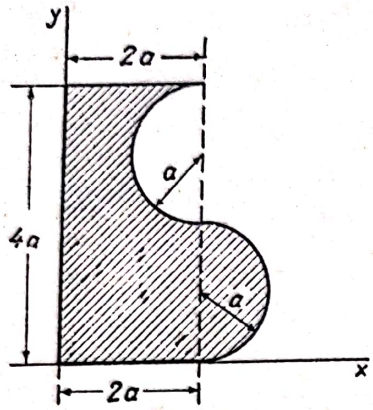


Fig. 146

În cazul $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (semicerc) se verifică rezultatul găsit: $x_c = \frac{4r}{3\pi}$.

7° Să se calculeze poziţia centrului de masă al unei plăci omogene avînd forma şi dimensiunile din figura 146.

Răspuns:

$$x_c = \frac{7a}{6}, \qquad y_c = \frac{16 - \pi}{8} a.$$

§ 59. Sisteme tridimensionale

1° Să se determine centrul de greutate al volumului unei piramide regulate, avînd ca bază un poligon cu n laturi, de arie A, şi înălţimea h.

Rezolvare. Se alege ca axă Ox perpendiculara dusă prin vîrful O pe bază. Aceasta trece prin centrele de greutate ale ariilor secţiunilor plane paralele cu baza.

Secţiunile la distanţele x şi $x + \Delta x$ intersectează piramida după poligoanele regulate, asemenea cu baza, de arii A_x şi A'_x, limitînd un trunchi de piramidă, al cărui volum se notează cu ΔV (fig. 147).

De la relaţiile:

$$\frac{A_x}{A} = \frac{x^2}{h^2}, \qquad A_x = \frac{A}{h^2} x^2$$

şi

$$A'_x = \frac{A}{h^2}(x + \Delta x)^2 = \frac{A}{h^2}[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2] \approx \frac{A}{h^2}(x^2 + 2x\Delta x) = A_x + \Delta A_x$$

se ajunge la:

$$\Delta V \approx A_x \Delta x.$$

Centrul de greutate al volumului elementar ΔV se va afla undeva pe linia centrelor ariilor bazelor.

Pentru determinarea centrului de greutate al volumului piramidei considerate se aplică teorema momentelor statice în raport cu planul Oyz dus prin O paralel cu baza.

Dacă x_c este abscisa centrului de greutate al volumului şi se neglijează infiniţii mici de ordin superior, se obţine la limită:

$$x_c \int_0^h A_x \, dx = \int_0^h x A_x \, dx$$

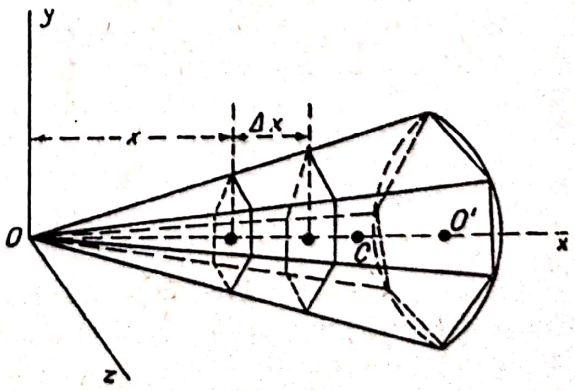


Fig. 147

sau :

$$x_c \int_0^h \frac{x^2 A}{h^2}\,dx = \int_0^h \frac{x^3 A}{h^2}\,dx,$$

de unde :

$$x_c = \frac{3h}{4},$$

adică : centrul de greutate al volumului piramidei regulate se află pe dreapta care unește vîrful cu centrul de greutate al ariei bazei și o împarte în raportul :

$$\frac{OC}{OO'} = \frac{3}{4}$$

sau este centrul de greutate al ariei secțiunii plane, paralelă cu baza, dusă la distanța $\frac{h}{4}$ de bază.

Observație. Dacă numărul laturilor n ale poligonului înscris într-un cerc de rază dată crește, în timp ce lungimile laturilor se micșorează, la limită, poligonul tinde către un cerc, iar piramida tinde către un con circular drept. În consecință, centrul de greutate al volumului conului se găsește în centrul de greutate al ariei secțiunii plane, paralelă cu baza dusă la distanța $\frac{h}{4}$ de bază.

2° Să se calculeze poziția centrului de greutate al volumului unui trunchi de con circular drept, avînd înălțimea h, iar razele bazelor R și r (fig. 148).

Rezolvare. Generatoarele trunchiului de con se întîlnesc în O situat pe linia centrelor $O'O''$. Se poate considera trunchiul de con ca diferența a două conuri cu vîrfurile în O, unul avînd ca bază cercul de rază R, iar celălalt, cercul de rază r.

Se calculează înălțimile celor două conuri, folosind asemănarea triunghiurilor $OO'A$ și $OO''B$:

$$OO'' = \frac{Rh}{R-r} \qquad OO' = \frac{rh}{R-r}.$$

Deoarece se cunosc volumele celor două conuri :

$$V = \pi R^2 \frac{OO''}{3} \qquad v = \pi r^2 \frac{OO'}{3}$$

și pozițiile centrelor lor de greutate se calculează poziția centrului de greutate al volumului trunchiului de con aplicînd teorema momentelor statice în raport cu planul bazei conului mare.

Se presupun volumele concentrate în centrele respective :

$$x_c(V - v) = C''O'' \cdot V - C'O'' \cdot v$$

sau :

$$x_c \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R-r} = \frac{Rh}{4(R-r)} \cdot \frac{\pi R^3 h}{3(R-r)} -$$

$$- \left[\frac{rh}{4(R-r)} + h\right] \frac{\pi r^3 h}{3(R-r)}.$$

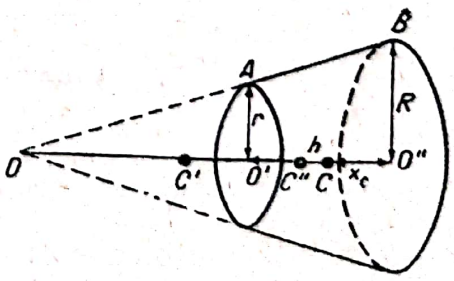


Fig. 148

După simplificări succesive:

$$x_c(R^3 - r^3) = \frac{R^4 h}{4(R-r)} - \frac{4R - 3r}{4(R-r)} r^3 h = \frac{R^4 - 4Rr^3 + 3r^4}{4(R-r)} h;$$

rezultatul final este:

$$x_c = \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{4(R^2 + Rr + r^2)} h.$$

Cazuri particulare. Pentru con: $r = 0$ și $x_c = \frac{h}{4}$;

pentru cilindru: $R = r$ și $x_c = \frac{h}{2}$.

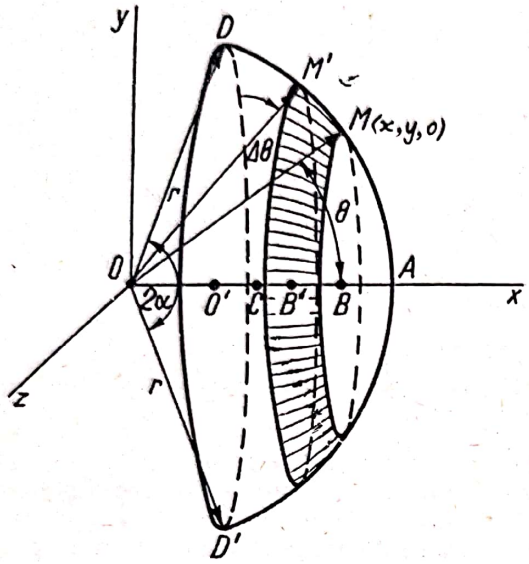


Fig. 149

3° Să se calculeze poziția centrului de greutate al volumului unui segment sferic de rază r.

Rezolvare. Se alege axa de simetrie OA ca axă Ox (fig. 149), iar unul din planele de simetrie ca plan xOy al sistemului de referință $Oxyz$, O fiind centrul sferei din care face parte segmentul. Planul xOy intersectează segmentul sferic după un segment circular având unghiul la centrul 2α.

Planele duse prin punctele infinit vecine $M(x, y, 0)$ și $M'(x + \Delta x, y + \Delta y, 0)$, perpendicular pe axa de simetrie, limitează volumul elementar ΔV:

$$\Delta V \approx \pi y^2 \Delta x.$$

Centrul de greutate al volumului elementar se va găsi între B și B' pe axa Ox. Dacă centrul de greutate al volumului segmentului sferic este în $C(x_c, 0, 0)$, se aplică teorema momentelor statice în raport cu planul yOz și la limită:

$$x_c \int_0^{\alpha} \pi y^2 \, dx = \int_0^{\alpha} \pi \, y^2 x \, dx.$$

Se înlocuiește:

$$x = r\cos\theta \quad \text{și} \quad y = r\sin\theta,$$

iar:

$$dx = -r\sin\theta \, d\theta,$$

deci:

$$x_c = \frac{\int_0^{\alpha} \sin^3\theta\cos\theta \, d\theta}{\int_0^{\alpha} \sin^3\theta \, d\theta} r = \frac{3\sin^4\alpha}{4(2 - 3\cos\alpha + \cos^3\alpha)} r. \qquad (5.25)$$

Observație. În cazurile speciale, formula (5.25) se verifică, astfel pentru:

$\alpha = 0$, $x_c = r$; $\alpha = \pi$, $x_c = 0$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (semisferă), $x_c = \frac{3}{8} r$.

4° Să se determine centrul de masă al unui nit omogen al cărui cap este o semisferă de rază R, iar tija un cilindru circular drept de rază r și înălțime h (fig. 150).

Răspuns. Centrul se află pe axa de simetrie la distanța :

$$x_c = \frac{3(2r^2h^2 - R^4)}{4(2R^3 + 3r^2h)}$$

de baza comună a celor două corpuri.

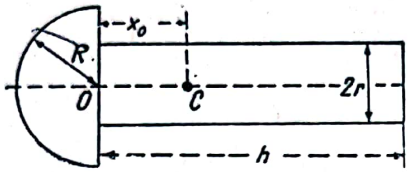


Fig. 150

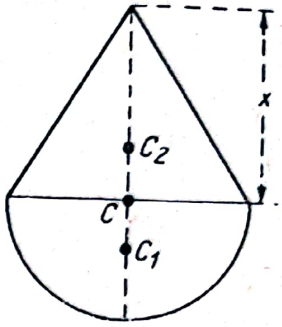


Fig. 151

5° O piesă (fig. 151) se obține prin sudarea unei semisfere de rază R și de densitate ρ_1, cu un con cu raza bazei R și densitatea ρ_2. Să se determine înălțimea x a conului, astfel încît centrul de masă al piesei să se afle în C, centrul bazei comune.

Răspuns : $x = R\sqrt{3\frac{\rho_1}{\rho_2}}$.

Observație. Dacă se așază piesa astfel încît partea sferică să vie în contact cu suprafața orizontală a unei mese, piesa rămîne în poziția în care a fost așezată (echilibru indiferent).

Dacă :

$$x < R\sqrt{3\frac{\rho_1}{\rho_2}},$$

axa de simetrie a piesei tinde, din orice poziție de așezare, spre poziția verticală (echilibru stabil).

Dacă :

$$x > R\sqrt{3\frac{\rho_1}{\rho_2}},$$

oricum ar fi așezată piesa, ea nu rămîne în această poziție (echilibru instabil), ci tinde spre poziția cu vîrful conului pe masă.

6° Să se determine centrul de greutate al volumului unui sector sferic de rază r (v. fig. 149).

Sectorul sferic se compune dintr-un segment sferic cu centrul în O și un con avînd aceeași bază cu segmentul, iar ca vîrf centrul O. Se cunosc atît volumele celor două corpuri :

a) segment sferic :

$$V_1 = \pi r^3 \int_0^{\alpha} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{\pi r^3}{3}(2 - 3\cos\alpha + \cos^3\alpha),$$

b) con :

$$V_2 = \frac{\pi r^3 \sin^2\alpha\cos\alpha}{3},$$

cît și pozițiile centrelor lor de greutate :

$$x_1 = \frac{3\sin^4\alpha}{4(2 - 3\cos\alpha + \cos^3\alpha)}r, \qquad x_2 = \frac{3r\cos\alpha}{4}.$$

Dacă se notează cu x_c abscisa centrului de greutate C al volumului sectorului sferic, pentru calcularea ei se aplică teorema momentelor statice în raport cu planul yOz:

$$x_c\,(V_1 + V_2) = x_1V_1 + x_2V_2.$$

Efectuînd calculele, se găsește:

$$x_c = \frac{3r}{8}\,(1 + \cos\alpha). \tag{5.26}$$

§ 60. Teoremele Guldin-Pappus

a. Se vor stabili ca aplicații:

1° **Teorema I.** *Aria suprafeței generată de un arc de curbă plană, prin rotația ei completă în jurul unei axe din planul ei, axă care nu taie curba, este egală cu produsul dintre lungimea arcului și lungimea cercului descris de centrul de greutate al arcului de curbă.*

Se alege axa de rotație ca axă Oy și o perpendiculară pe Oy, situată în planul curbei, ca axă Ox. Se consideră două puncte infinit vecine M și M' pe curbă, iar Δs coarda MM' (fig. 152).

Aria generată de coarda MM', prin rotația ei completă în jurul axei Oy, este aria laterală a unui trunchi de con:

$$\Delta A = 2\pi x \Delta s,$$

la limită:

$$A = 2\pi \int_{(l)} x\,ds;$$

integrala este simplă, iar domeniul de integrare, arcul de curbă.

Din aplicarea teoremei momentelor statice în raport cu axa Oy:

$$\int_{(l)} x\,ds = x_c \int_{(l)} ds = x_c\, l,$$

rezultă:

$$A = l \cdot 2\pi x_c. \qquad \text{c.c.t.d.}$$

2° **Teorema II.** *Volumul generat de o figură plană, închizînd o arie, prin rotația ei completă în jurul unei axe din planul figurii și care nu o taie, este egală cu produsul dintre aria închisă de figură și lungimea cercului descris de centrul de greutate al ariei figurii.*

Un element de arie:

$$\Delta A = \Delta x \Delta y$$

generează, în rotația lui completă în jurul axei Oy (fig. 153), un volum elementar,

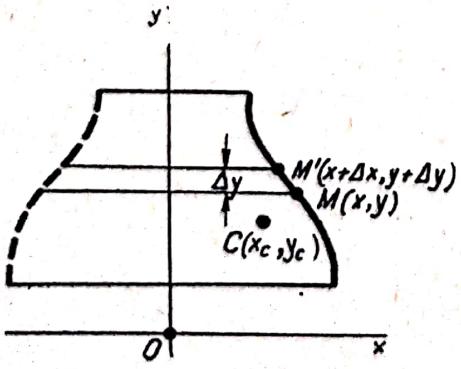


Fig. 152

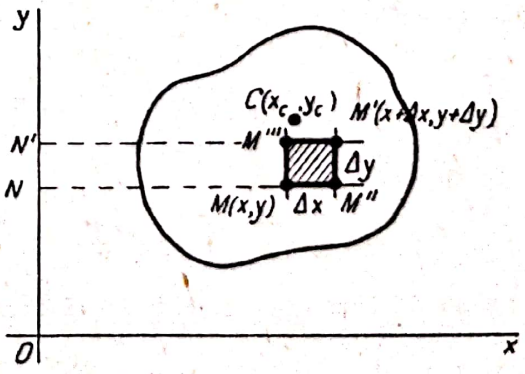


Fig. 153

diferența volumelor elementare generate de dreptunghiurile $M'M''NN'$ și $MM'''NN'$:

$$\Delta V = \pi(x + \Delta x)^2\Delta y - \pi x^2\Delta y$$
$$\Delta V = 2\pi x\Delta x\Delta y + \pi(\Delta x)^2\Delta y$$
$$\Delta V \approx 2\pi x\Delta x\Delta y.$$

La limită:

$$V = 2\pi\int_{(A)} x\,dx\,dy = 2\pi\int_{(A)} x\,dA,$$

iar integrala este dublă, domeniul de integrare fiind aria A închisă de figura plană.

Aplicînd teorema momentelor statice în raport cu axa Oy:

$$\int_{(A)} x\,dA = x_c\int_{(A)} dA = x_c\,A,$$

se găsește:

$$V = A \cdot 2\pi\,x_c, \qquad \text{c.c.t.d.}$$

b. *Observații.* Teoremele lui Guldin-Pappus au o dublă întrebuințare: în primul rînd permit calcularea unor arii și volume de rotație atunci cînd se cunosc centrele de greutate ale unor arce de curbă plană sau ale ariilor unor figuri plane care se rotesc; în al doilea rînd permit determinarea pozițiilor centrelor de greutate ale unor arce de curbă plană sau ale ariilor unor figuri plane, atunci cînd se cunosc ariile sau volumele generate prin rotația completă a acestor arce sau figuri. Astfel:

1° Să se calculeze aria și volumul unui tor.

Răspuns: Torul este figura geometrică generată prin rotirea unui cerc în jurul unei axe din planul lui (fig. 154).

Aplicînd cele două teoreme ale lui Guldin-Pappus se găsesc:

$$A = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 Rr$$

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 Rr^2.$$

2° Să se calculeze capacitatea unui vas avînd forma și dimensiunile din figura 155.

Răspuns: Folosind rezultatul aplicației 7° (§ 58) și aplicînd teorema II, se obține:

$$V = 8a^2 \cdot 2\pi\,\frac{7a}{6} = \frac{56}{3}\,\pi a^3.$$

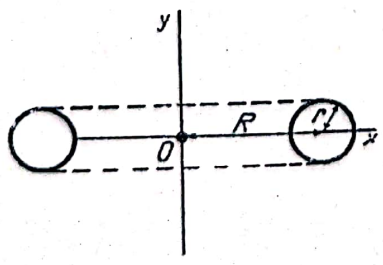


Fig. 154

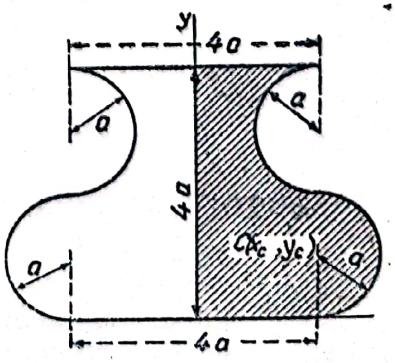


Fig. 155

3° Să se determine, folosind teoremele lui Guldin-Pappus, centrul de greutate al arcului şi centrul de greutate al ariei unei jumătăţi de cerc (fig. 156).

Răspuns: Deoarece se cunoaşte aria sferei, din:

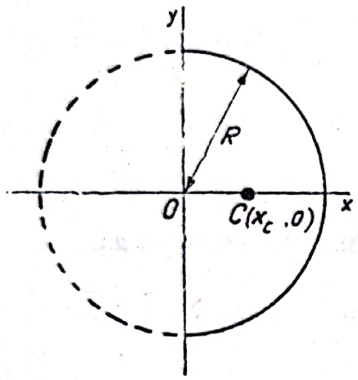


Fig. 156

$$4\pi R^2 = \pi R \cdot 2\pi x_c$$

se deduce:

$$x_c = \frac{2R}{\pi}.$$

La fel şi pentru centrul de arie, din:

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi x_c,$$

se deduce:

$$x_c = \frac{4R}{3\pi}.$$

PARTEA A DOUA

STATICA

CAPITOLUL VI

INTRODUCERE

A. GENERALITĂȚI

§ 61. Interacțiuni

a. Mișcarea mecanică a corpurilor, sisteme materiale, este influențată de acțiunile reciproce ale lor. Interacțiunile ascultă de legi care exprimă relații între mărimile de care depind. În formularea legilor din mecanică se ține seama numai de acele aspecte ale interacțiunii corpurilor care se traduc prin relații între mase, distanțe, unghiuri, timp, viteze etc.

În general, acțiunile reciproce se prezintă sub aspectul de *acțiuni la distanță* și *acțiuni de contact.*

b. Ca exemplu de acțiune la distanță se poate da atracția reciprocă a corpurilor care ascultă de *legea gravitației universale*:

Două corpuri, asimilate cu două puncte materiale C_1 *și* C_2 (fig. 157), *având masele* m_1 *și* m_2, *se atrag reciproc cu o forță direct proporțională cu produsul maselor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre cele două puncte.*

Legea a fost stabilită de Newton în anul 1681. După concepția lui Newton, interacțiunile nu depind de mediul înconjurător și se transmit *instantaneu*, adică cu viteză infinită[1]. Dacă se notează cu $|\bar{F}|$ modulul comun al forțelor de atracție, legea se exprimă prin relația:

$$|\bar{F}| = k\frac{m_1 m_2}{d^2}, \qquad (6.1)$$

unde k este constanta universală (Gauss) și are aceeași valoare:

$$k = 6{,}685 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{cm}^3}{\text{gs}^2},$$

oricare ar fi corpurile care se atrag.

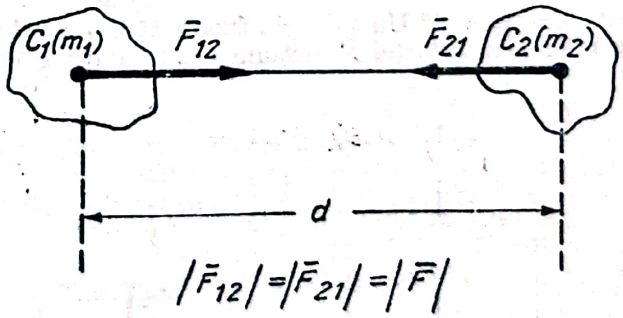


Fig. 157

[1] Această concepție este astăzi depășită prin introducerea noțiunii de *cîmp material*, sediul unor fenomene fizice de natură gravitațională, electrică, magnetică etc. Cîmpul material este un *mediu continuu*, diferit de particulele materiale, însă în interacțiune cu ele, forțele transmițîndu-se cu viteză finită.

Astfel, pentru două sfere omogene, egale, cu masele de $1\ t = 10^6\ g$, distanța dintre centrele lor fiind de $1\ m = 10^2\ cm$, forța de atracție este abia de 6,685 dyn, adică mai puțin ca $7 \cdot 10^{-3}$ gf.

În general, forța de atracție reciprocă a două corpuri la suprafața Pământului este extrem de mică în comparație cu forța cu care Pământul le atrage. În exemplul ales, raportul este aproximativ $\frac{7 \cdot 10^{-3}\ gf}{1\ tf} = 7 \cdot 10^{-9}$.

Calculînd forța de atracție a Pământului asupra unui corp de masă m situat la suprafața Pământului și egalînd-o cu greutatea corpului (în ipoteza că Pământul este fix):

$$m\,|\,\bar{\gamma}\,| = k\frac{mM}{R^2},$$

unde:

$\bar{\gamma}$ este accelerația gravitației cu modulul $\approx 10\ \frac{m}{s^2} = 10^3\ \frac{cm}{s^2}$;

M — masa Pământului;

R — raza Pământului, $\approx 6{,}4 \cdot 10^8$ cm,

se găsește:

$$M = 6 \cdot 10^{27}\ g \text{ și } \rho = 5{,}5\ \frac{g}{cm^3},$$

unde ρ este densitatea medie a Pământului.

Din cele arătate rezultă că interacțiunile la distanță, de natură gravitațională, ale corpurilor la suprafața Pământului sînt neglijabile, cu excepția atracției pământești, care este apreciabilă datorită imensei mase a Pământului.

c. Dimpotrivă, interacțiunile de contact ale corpurilor nu sînt neglijabile, ele joacă un rol important în mecanică.

Ca și în cazul acțiunilor reciproce la distanță, și *interacțiunile de contact a două corpuri ascultă de principiul egalității acțiunii și reacțiunii.*

Se poate afirma că studiul acestor interacțiuni este fundamental pentru tehnica inginerească.

Nici un pod, furnal, motor sau avion nu se poate construi fără temeinica cunoaștere a interacțiunilor de contact între corpul considerat și celelalte corpuri sau mediul înconjurător.

d. *Exemplu.* 1° Un solid (în figura 158, *a* o valiză) este menținut în repaus sub acțiunea greutății $\bar{G}$ și a forței $\bar{F}$ (acțiunea musculară a omului).

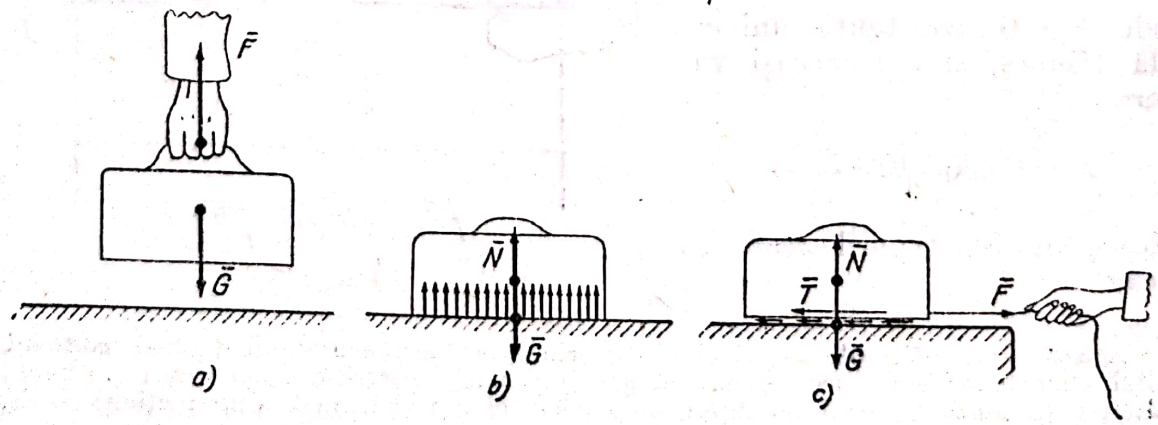


Fig. 158

Aceste forţe nu depind una de cealaltă şi nici de starea de repaus sau de mişcare a solidului asupra căruia acţionează. Ele fac parte din categoria *forţelor active.*

În figura 158, *b* acelaşi solid se găseşte în repaus pe suprafaţa plană şi orizontală a mesei.

Deoarece solidul rămîne în repaus pe masă înseamnă că greutatea $\bar{G}$ este echilibrată de reacţiunea mesei faţă de apăsarea solidului. În fiecare element de arie al suprafeţei plane de contact apar reacţiuni elementare perpendiculare (*normale*) pe suprafaţă. Toate aceste reacţiuni, care sînt paralele, se reduc la o rezultantă unică $\bar{N}$, *reacţiunea normală*, care echilibrează pe G, ambele forţe fiind aplicate solidului :

$$\bar{N} + \bar{G} = 0.$$

Atît reacţiunile elementare cît şi rezultanta lor $\bar{N}$ sînt forţe *pasive, nepreexistente*, ele nu există în situaţia din figura 158, *a*, ci apar de îndată ce solidul greu este aşezat pe masă.

Dacă în situaţia de repaus (fig. 158, *b*) se mai aplică solidului şi o forţă activă $\bar{F}$, paralelă cu masa, ca în figura 158, *c*, această forţă tinde să imprime solidului o mişcare accelerată pe suprafaţa mesei. Experienţa dovedeşte că dacă $|\bar{F}|$ creşte continuu de la valoarea zero, solidul rămîne mai departe în repaus atît timp cît $|\bar{F}|$ nu depăşeşte o anumită limită $|\bar{F}_1|$.

Explicaţia constă în faptul că în fiecare element de arie a suprafeţei de contact apar reacţiuni elementare, tangente la suprafaţă, care se opun mişcării solidului pe suprafaţa mesei.

Aceste reacţiuni elementare se reduc la o rezultantă unică $\bar{T}$, *reacţiunea tangenţială* a mesei, care echilibrează forţa $\bar{F}$ atît timp cît modulul acesteia din urmă nu a depăşit limita $|\bar{F}_1|$, adică :

$$\bar{T} + \bar{F} = 0, \text{ dacă } |\bar{F}| \leqslant |\bar{F}_1|.$$

Atît reacţiunile elementare cît şi rezultanta lor T sînt forţe *pasive, nepreexistente*, ele nu există în situaţia din figura 158, *b*, ci apar de îndată ce acţionează forţa musculară $\bar{F}$ asupra solidului.

Aceste reacţiuni elementare tangenţiale, deci şi rezultanta lor $\bar{T}$, sînt datorite *frecării* dintre solid şi suprafaţa de contact a mesei.

Cele două forţe pasive $\bar{N}$ şi $\bar{T}$ sînt componentele reacţiunii totale $\bar{R}'$ a mesei :

$$\bar{N} + \bar{T} = \bar{R}'$$

şi sînt aplicate solidului.

Forţele active, aplicate tot solidului, greutatea $\bar{G}$ şi forţa musculară $\bar{F}$, dau o rezultantă $\bar{R}$:

$$\bar{G} + \bar{F} = \bar{R}.$$

Solidul rămîne mai departe în repaus atît timp cît :

$$\bar{R}' + \bar{R} = 0.$$

Este important de insistat asupra deosebirii dintre reacţiunea normală $\bar{N}$ care echilibrează în orice moment greutatea $\bar{G}$ — *în ipoteza că solidul şi masa sînt rigide* — şi reacţiunea tangenţială $\bar{T}$, care *poate* echilibra forţa $\bar{F}$ *doar* atît timp cît $|\bar{F}|$ nu depăşeşte limita $|\bar{F}_1|$.

2° Tot în categoria forţelor de contact sînt considerate şi rezistenţele la înaintarea unui corp solid într-un mediu fluid. Experienţele au dovedit că aceste rezistenţe sînt *funcţii de viteza relativă* dintre solid şi mediu, precum şi de alţi factori, cum sînt : forma solidului, forma şi mărimea suprafeţei de contact etc.

Dacă solidul este în mişcare faţă de fluid, rezistenţa fluidului se consideră o forţă *pasivă*, în schimb, dacă fluidul se mişcă în raport cu solidul, forţa datorită mişcării fluidului şi aplicată solidului se consideră *activă*.

3° Un alt exemplu de forţă de contact, întîlnită în mecanică, este *forţa elastică*, ce îşi are originea în elasticitatea corpurilor deformate şi este proporţională cu deformaţia.

Forţa elastică este o forţă *activă*.

§ 62. Forţele şi mişcarea mecanică

Se presupune existenţa unui solid rigid omogen, avînd forma unei sfere, liber să ocupe orice poziţie în spaţiu, în raport cu un reper fix, acţionat de un sistem oarecare de forţe $\bar{F}_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

În general, reducînd sistemul de forţe în centrul de masă C al solidului, se găseşte torsorul de componente:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i, \qquad \bar{M} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i, \tag{6.2}$$

unde $\bar{r}_i$ este vectorul de poziţie în raport cu un reper cu originea în C al unui punct de pe suportul forţei $\bar{F}_i$.

Se ştie că sînt şase cazuri distincte de reducere:

1° *Torsor oarecare* (fig. 159, *a*), compus dintr-o forţă $\bar{R}$ aplicată în C şi un cuplu de forţe de moment $\bar{M}$; direcţiile celor doi vectori nu sînt perpendiculare şi nu se confundă.

2° *Torsor minimal* (fig. 159, *b*) compus dintr-o forţă $\bar{R}$ aplicată în C şi un cuplu de forţe de moment $\bar{M}$; direcţiile celor doi vectori se confundă.

3° *Torsor formal* (fig. 159, *c*), compus dintr-o forţă $\bar{R}$ aplicată în C şi un cuplu de forţe cu momentul $\bar{M}$ perpendicular pe direcţia forţei $\bar{R}$. Se ştie că acest torsor se poate reduce la o forţă egală în direcţie, sens şi modul cu $\bar{R}$, dar cu originea într-un alt punct al solidului (sau solidar cu el).

4° *Cuplu* (fig. 159, *d*), compus dintr-o pereche de forţe egale, paralele, de sensuri opuse, acţionînd în două puncte ale solidului. Momentul $\bar{M}$ al cuplului este perpendicular pe planul forţelor cuplului.

5° *Rezultantă unică* (fig. 159, *e*) $\bar{R}$, cu suportul trecînd prin centrul de masă.

6° *Echilibru* (fig. 159, *f*). Sistemul de forţe se echilibrează:

$$\bar{R} = 0 \text{ şi } \bar{M} = 0. \tag{6.3}$$

În acest ultim caz, lucrurile se petrec ca şi cum solidul ar fi complet izolat de celelalte corpuri şi se mişcă în virtutea inerţiei, adică:

α) dacă, în raport cu un reper presupus fix, solidul era în repaus înainte de aplicarea sistemului de forţe în echilibru, el rămîne mai departe în repaus şi după aplicarea sistemului de forţe;

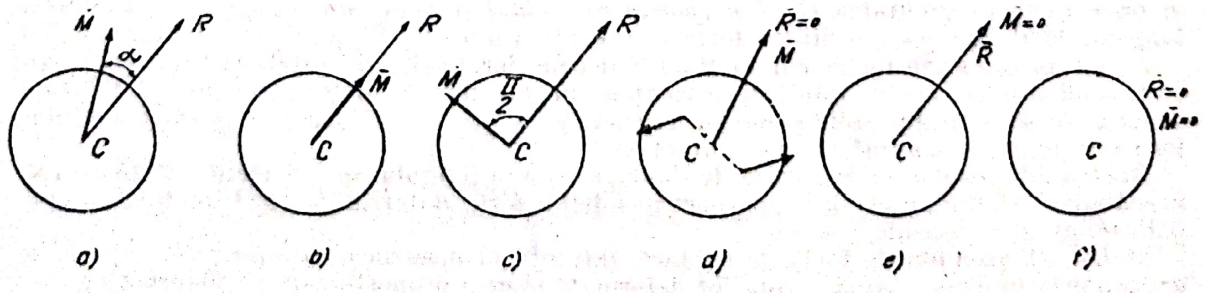


Fig. 159

β) dacă solidul avea, înainte de aplicarea sistemului de forţe, o anumită mişcare, el îşi menţine mai departe mişcarea şi după aplicarea forţelor.

Acesta este cazul staticii; primele cinci cazuri sînt asociate cu mişcări care nu pot fi imediat intuite, ele pot fi studiate numai în cadrul dinamicii solidului rigid.

§ 63. Grade de libertate

În general, solidele nu sînt libere. Unele sînt îngrădite în mişcările lor, iar altele sînt fixe în raport cu sistemul de referinţă. Îngrădirile sînt cauzate de *legăturile* solidului considerat cu alte solide. Legăturile din practică au aspecte şi caracteristici variate.

Înainte de a cerceta îngrădirile aduse unui solid de legăturile lui se vor analiza *gradele de libertate* ale unui punct material şi ale unui sistem de puncte materiale.

Definiţie. *Un sistem mecanic*[1] *a cărui poziţie, în raport cu un reper fix, este determinată prin* p *parametri scalari, independenţi între ei, are* p *grade de libertate.*

1° *Punct material liber.* Poziţia unui punct M, în raport cu un triedru $Oxyz$, este determinată prin cele trei coordonate ale lui (fig. 160). Dacă punctul este liber, cei trei parametri (x, y, z) sînt independenţi, iar punctul liber are *trei grade de libertate.*

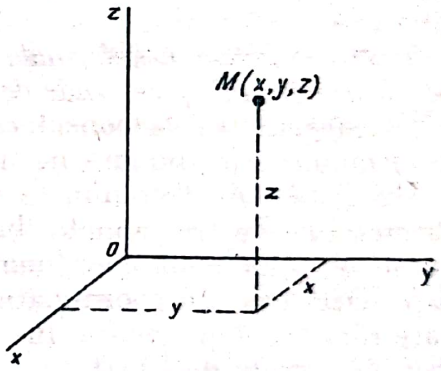


Fig. 160

2° *Punct material obligat să rămînă pe o suprafaţă.* Suprafaţa poate fi reprezentată, în raport cu triedrul $Oxyz$, prin ecuaţia:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (6.4)$$

sau prin ecuaţiile:

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v),$$
$$z = h(u, v), \qquad (6.5)$$

unde x, y, z sînt coordonatele unui punct curent, iar u şi v, doi parametri scalari independenţi.

Faptul că un punct M este obligat să rămînă pe suprafaţă se exprimă printr-o relaţie între coordonatele lui. Deci punctul nu mai are decît *două grade de libertate.* Acest lucru apare mai clar dacă se foloseşte reprezentarea parametrică (6.5) a suprafeţei, care arată că poziţia punctului este determinată prin cei doi parametri independenţi u şi v.

3° *Punct material obligat să rămînă pe o curbă.* Curba poate fi reprezentată, în raport cu triedrul $Oxyz$, prin ecuaţiile:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0 \qquad (6.6)$$

[1] Sistem de solide care au legături mecanice între ele.

sau :

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \tag{6.7}$$

unde t este un parametru scalar.

Deci, între coordonatele x, y z ale unui punct M de pe curbă există două relaţii, iar punctul are *un singur grad de libertate*, ceea ce reiese evident din ecuaţiile parametrice (6.7).

4° *Un punct material fixat într-un punct nu are nici un grad de libertate.*

5° *Un sistem deformabil de* n *puncte materiale libere are, evident,* 3n *grade de libertate*, cîte trei grade de libertate pentru fiecare punct material liber.

6° *Un sistem nedeformabil de două puncte materiale are cinci grade de libertate.* Un sistem deformabil de două puncte are şase grade de libertate. Dacă sistemul este nedeformabil, distanţa dintre puncte nu variază. Dacă x, y, z şi x', y', z' sînt cele şase coordonate ale celor două puncte, între aceşti parametri există o relaţie dată de condiţia :

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = d^2,$$

d fiind distanţa invariabilă între cele două puncte.

Condiţia precedentă permite determinarea unui singur parametru în funcţie de ceilalţi cinci care rămîn independenţi. Deci sistemul are cinci grade de libertate.

7° *Orice sistem nedeformabil de* n *puncte materiale* (n > 2) *sau orice solid rigid are cel mult şase grade de libertate.*

La început, se va considera un sistem de trei puncte. Dacă sistemul este deformabil, el se bucură de nouă grade de libertate.

Un sistem de trei puncte devine nedeformabil dacă laturile triunghiului format cu cele trei puncte, luate două cîte două, au lungimi invariabile. În acest fel, celor nouă coordonate ale celor trei puncte le sînt impuse trei condiţii. Deci trei din coordonate pot fi determinate în funcţie de celelalte şase, care rămîn independente, în consecinţă sistemul nedeformabil de trei puncte are şase grade de libertate.

Fie M_1, M_2, M_3 (fig. 161) sistemul nedeformabil al primelor trei puncte materiale, la care se adaugă punctul M_4. Punctul M_4 aduce trei grade de libertate care, adăugate la cele şase ale sistemului, dau nouă grade de libertate. Dar sistemul $M_1M_2M_3M_4$ este deformabil. Pentru a-l transforma într-unul nedeformabil este necesar şi suficient ca distanţele M_4M_1, M_4M_2 şi M_4M_3 să fie invariabile. Dacă numai M_4M_1 ar fi constant, M_4 s-ar putea deplasa pe suprafaţa unei sfere cu raza M_4M_1 şi cu centrul în M_1. Dacă şi M_4M_2 ar fi constant, M_4 ar putea descrie un cerc, intersecţia sferei precedente cu sfera de rază M_4M_2, şi cu centrul în M_2. Dacă şi M_4M_3 este constant, sistemul celor patru puncte devine nedeformabil. În acest fel, M_4 şi-a pierdut toate cele trei grade de libertate cu care a venit, iar sistemul nedeformabil al celor patru puncte are tot şase grade de libertate.

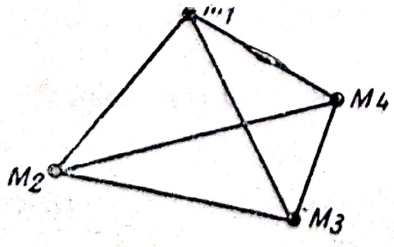


Fig. 161

Scanned with OKEN Scanner

De aici înainte, oricîte puncte s-ar mai adăuga sistemului, acesta rămîne tot cu şase grade de libertate, deoarece pentru ca sistemul să fie nedeformabil este necesar şi suficient ca distanţele punctului nou la M_1, M_2 şi M_3 să fie invariabile. Deci cele trei grade de libertate cu care vine fiecare punct sînt anihilate de cele trei condiţii necesare şi suficiente.

Extinzînd concluziile, se poate afirma că orice solid rigid liber—şi, în general, orice sistem material nedeformabil liber — *are cel mult şase grade de libertate.*

§ 64. Legături, reacţiuni, forţe de legătură, eliberare de legături

În problemele mecanicii aplicate, toate legăturile unui corp sînt legături materiale.

De pildă, se presupune că un corp solid (C), care este acţionat de un sistem oarecare de forţe date, mai este legat şi de corpul (C') pe o suprafaţă de contact (S) (fig. 162).

Din cauza forţelor date, cele două corpuri se acţionează reciproc pe suprafaţa (S). Deci, în toate punctele suprafeţei (S) acţionează asupra fiecărui corp, din partea celuilalt, cîte un sistem de forţe. Fiecărei forţe, dintr-unul din sisteme, îi corespunde o forţă direct opusă, din celălalt sistem. Aceasta *în virtutea principiului egalităţii acţiunii şi reacţiunii.*

Evident, cele două sisteme de forţe de pe suprafaţa (S) nu se echilibrează, deoarece ele acţionează asupra unor corpuri diferite (C), respectiv (C').

Dacă se studiază mişcarea sau repausul corpului (C), corpul (C') reprezintă o legătură a corpului (C) cu mediul înconjurător.

În acest caz, forţele cu care (C') reacţionează asupra lui (C) sînt datorite legăturii şi se numesc *forţe de legătură* sau, mai simplu, *reacţiuni.*

În unele probleme de mecanică teoretică pot apărea condiţii cum sînt : un punct material este obligat să rămînă pe o suprafaţă sau pe o curbă, fixă sau variabilă, sau să rămînă în permanenţă într-un punct fix.

Dacă suprafaţa, curba sau punctul sînt figuri geometrice, condiţiile impuse sînt condiţii geometrice.

În aceste cazuri se poate extinde noţiunea de legătură şi asupra condiţiilor geometrice, prin introducerea noţiunii de *forţă de legătură* în baza următorului *principiu* :

Principiul forţelor de legătură. *Dacă libertatea de deplasare a unui punct material este îngrădită prin condiţii geometrice, aceste condiţii se pot înlocui prin forţe numite forţe de legătură.*

Deci, atît în cazul unor legături fizice cît şi în cazul unor condiţii geometrice, acestea pot fi înlocuite prin forţe de legătură.

Prin această *operaţie*, bazată, în primul caz, pe principiul acţiunii şi reacţiunii, în cel de-al doilea caz, pe principiul forţelor de legătură, punctul material sau solidul *poate fi considerat liber.* Operaţia se numeşte *eliberarea punctului material sau a solidului de legături.*

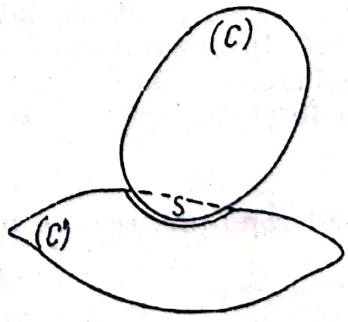


Fig. 162

Spre deosebire de forţele active (date), forţele de legătură, forţe pasive, au caracteristici necunoscute.

Aceste necunoscute se pot determina, în statică, scriind condiţiile necesare şi suficiente pentru ca punctul material sau solidul să rămînă în repaus, iar în dinamică, studiind mişcarea punctului material sau mişcarea solidului cu ajutorul ecuaţiilor de mişcare.

§ 65. Problemele staticii

a. O dată punctul material eliberat de legături, prin introducerea forţelor de legătură, se pot studia următoarele trei tipuri generale de probleme de statică, ce se încadrează în problemele generale de mecanică (v. § 11).

1° **Problema directă.** *Cunoscîndu-se poziţia de repaus (echilibru) a unui punct material acţionat de forţe, să se determine forţele.*

2° **Problema inversă.** *Cunoscîndu-se forţele care acţionează asupra unui punct material, să se determine poziţiile în care trebuie aşezat punctul material pentru ca el să rămînă în repaus în aceste poziţii (poziţii de echilibru).*

3° **Problema mixtă.** *Cunoscîndu-se unele din caracteristicile poziţiei de repaus a unui punct material şi ale forţelor care îl acţionează, să se determine caracteristicile necunoscute.*

b. *Observaţii.* 1° De obicei, în problemele directe, se cunosc scalarii care determină poziţia punctului în raport cu un reper, adică *parametrii de poziţie.* Necunoscute sînt caracteristicile forţelor.

2° În problemele inverse, necunoscutele sînt parametrii poziţiei sau ale poziţiilor de repaus.

3° Problemele punctului material cu legături fac parte, în general, din tipul general mixt, astfel încît între necunoscutele problemei se află caracteristici atît ale poziţiilor de repaus cît şi ale forţelor.

4° Condiţia necesară şi suficientă ca punctul material să rămînă în repaus se reduce la ecuaţia vectorială :

$$\bar{R} = 0$$

sau la ecuaţiile scalare :

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \tag{6.8}$$

condiţii pentru parametrii de poziţie şi pentru valorile proiecţiilor forţelor date şi de legătură, faţă de cele trei axe ale sistemului de referinţă.

5° În cazul staticii solidului rigid, problemele generale au enunţuri asemănătoare, iar pentru determinarea necunoscutelor (parametrii de poziţie şi forţe de legătură) se aplică condiţiile necesare şi suficiente de echilibru :

$$\bar{R} = 0 \qquad \text{şi} \qquad \bar{M} = 0$$

sau condiţiile scalare în raport cu axele triedrului $Oxyz$:

$$\begin{aligned} X &= 0 \qquad Y = 0 \qquad Z = 0 \\ M_x &= 0 \qquad M_y = 0 \qquad M_z = 0. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

6° În general, cele trei ecuaţii scalare (6.8) în cazul punctului material şi cele şase ecuaţii (6.9) în cazul solidului rigid permit determinarea a trei, respectiv a şase necunoscute ale problemei. Însă deseori se întîlnesc probleme în care numărul necunoscutelor scalare depăşeşte numărul ecuaţiilor de echilibru. În aceste condiţii, necunoscutele formează un sistem denumit *static nedeterminat*. Nedeterminarea nu se poate ridica cu mijloacele mecanicii solidului rigid. Asemenea probleme, care au o importanţă deosebită în construcţii, se rezolvă complet cu mijloacele mecanicii aplicate (rezistenţa materialelor, statica construcţiilor etc.). Ţinînd seama de deformaţii şi de relaţiile lor cu forţele, se completează ecuaţiile (6.9) cu cele necesare pentru ridicarea nedeterminării statice.

B. STATICA PUNCTULUI MATERIAL

§ 66. Punctul material liber

a. Se pot compune uşor probleme de statica punctului material liber dacă se presupune că punctul este acţionat de diferite forţe, unele date, altele necunoscute, şi se cere determinarea necunoscutelor prin rezolvarea ecuaţiilor de echilibru (6.8). Asemenea probleme, cu un caracter artificial, sînt simple exerciţii de calcul. Pentru a compune aplicaţii este necesar ca forţele să reprezinte *acţiunile*, fie la distanţă, fie de contact, ale diferitelor corpuri.

În afară de acţiunea la distanţă a Pămîntului, reprezentată prin greutăţile corpurilor, se dau aici două exemple de acţiuni de contact asupra punctului material liber.

b. *Exemple.* 1° O mică bilă suspendată de unul din capetele unui resort, celălalt fiind fixat (fig. 163), poate fi asimilată cu un punct material liber atît timp cît resortul permite ca bila să ocupe orice poziţie din spaţiu. Resortul, dacă este lungit sau scurtat, acţionează printr-o forţă elastică $\bar{F}$. Modulul forţei elastice este proporţional cu deformaţia, faţă de lungimea liberă $O'O = l_0$ a resortului. Direcţia forţei este după axa resortului. Forţa este *atractivă* dacă resortul este lungit, $l > l_0$, şi *repulsivă* dacă resortul este scurtat, $l < l_0$. Valoarea forţei în raport cu axa resortului se determină cu ecuaţia:

$$F = -k(l - l_0), \tag{6.10}$$

unde k este constanta caracteristică a resortului, măsurată, de exemplu, în $\frac{N}{m}$, $\frac{kgf}{cm}$, $\frac{gf}{mm}$ etc. Astfel, dacă constanta resortului este $\frac{20\ gf}{mm}$, înseamnă că resortul acţionează cu o forţă de 20 gf pentru fiecare milimetru de deformaţie.

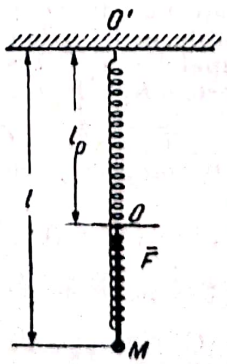


Fig. 163

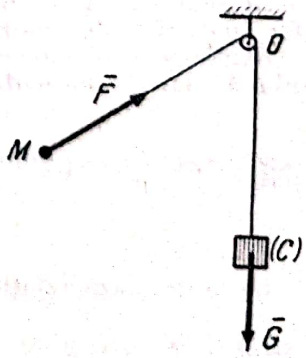
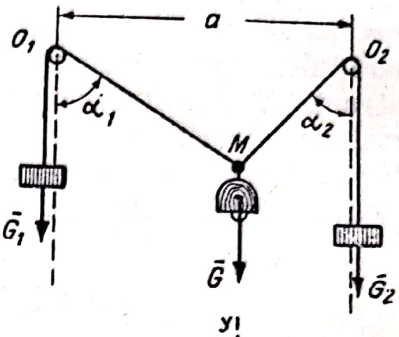


Fig. 164

2° Punctul material M, acţionat de atracţia pe care Pămîntul

o exercită asupra unui corp (C), prin mijlocirea unui fir petrecut peste un scripete O, foarte mic (fără frecări), poate fi considerat liber atît timp cît firul îi permite să ocupe orice poziţie din spaţiu (fig. 164). Modulul forţei $\bar{F}$ este egal cu acela al greutăţii corpului (C), direcţia ei este îndreptată după fir, cu sensul spre punctul O (scripetele).

Observaţie. Dacă punctul material M este legat printr-un fir de lungime constantă de punctul O, el nu mai poate fi considerat ca liber, deoarece firul îl împiedică să iasă din domeniul sferei cu centrul în O şi raza OM. Reacţiunea firului nu este o forţă activă, preexistentă, ea depinde de acţiunile altor corpuri asupra punctului material.



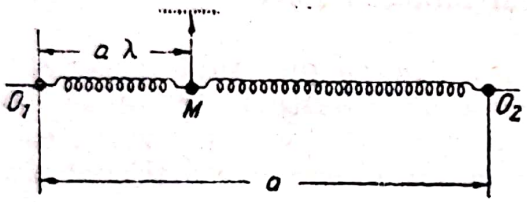


Fig. 165

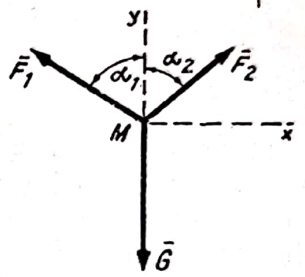


Fig. 166

c. Aplicaţii. 1° Un indicator M (punct material) trebuie menţinut în repaus într-o poziţie determinată prin parametrul λ pe dreapta, care trece prin punctele fixe O_1 şi O_2, cu ajutorul a două resorturi care au capetele fixe în O_1 şi O_2 (fig. 165). Să se calculeze relaţia dintre lungimile libere l_1 şi l_2 ale resorturilor, ştiind că au aceeaşi constantă k.

Rezolvare. Problema este de tipul direct. Dacă ambele resorturi sînt întinse, condiţia de echilibru al forţelor elastice (6.10) este:

$$k\ (a\lambda - l_1) = k\ [a\ (1 - \lambda) - l_2].$$

Deci:

$$l_2 = l_1 + a\ (1 - 2\lambda).$$

Se observă că relaţia este valabilă oricum ar acţiona resorturile.

2° O lampă de greutate $\bar{G}$ este suspendată într-un punct M situat în acelaşi plan vertical cu punctele O_1 şi O_2. Punctele fixe O_1 şi O_2 se găsesc pe aceeaşi orizontală la distanţa a între ele. Poziţia punctului M este determinată prin unghiurile date α_1 şi α_2. De două fire, legate de M şi trecute peste doi scripeţi mici din O_1 şi O_2, atîrnă corpurile de greutăţi $\bar{G}_1$ şi $\bar{G}_2$ (fig. 166). Să se determine greutăţile, astfel ca lampa să rămînă în repaus în poziţia indicată.

Rezolvare. Problema este de tipul direct, deoarece se cunoaşte poziţia de repaus a punctului M, iar necunoscute sînt forţele $\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$ care o acţionează. Condiţia de echilibru este:

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{G} = 0$$

unde:

$$|\bar{F}_1| = |\bar{G}_1| \text{ şi } |\bar{F}_2| = |\bar{G}_2|.$$

Se proiectează relaţia vectorială pe axele Mx şi My:

$$-G_1 \sin\alpha_1 + G_2 \sin\alpha_2 = 0;$$

$$G_1 \cos\alpha_1 + G_2 \cos\alpha_2 - G = 0,$$

iar soluțiile sistemului sînt :

$$G_1 = G\frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad G_2 = G\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

3° Cu aceleași elemente se poate rezolva o problemă de tipul invers:
Se cunosc greutățile $\bar{G}_1$ și $\bar{G}_2$ și se cere poziția în care ar trebui să fie suspendată lampa pentru ca ea să rămînă în repaus.

Rezolvare. În acest caz, α_1 și α_2 sînt necunoscute și se obțin din aceleași ecuații de echilibru. Rezultatul :

$$\cos\alpha_1 = \frac{G^2+G_1^2-G_2^2}{2GG_1}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{G^2+G_2^2-G_1^2}{2GG_2},$$

trebuie să fie discutat cu privire la posibilitățile de realizare a echilibrului, deoarece fracțiile trebuie să fie cuprinse între 0 și + 1.

4° Un punct material M, de masă m, este atras, după legea atracției universale, de două puncte fixe M_1 și M_2, de mase m_1 și m_2, situate la distanța a între ele. Se cere poziția în care trebuie așezat punctul M pentru ca el să rămînă în repaus (fig. 167).

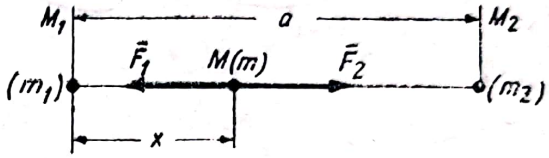


Fig. 167

Rezolvare. Este evident că poziția de repaus nu poate fi în afara dreptei M_1M_2, deoarece numai dacă M se află pe linia centrelor atractive cele două forțe care trebuie să se echilibreze pot avea aceeași direcție. De asemenea M trebuie căutat între M_1 și M_2, căci altfel forțele nu s-ar putea echilibra.

Dacă se notează cu x necunoscuta care determină poziția de repaus a punctului M, forțele care îl acționează sînt $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$, cu modulele :

$$|\bar{F}_1| = k\frac{m_1m}{x^2}, \quad |\bar{F}_2| = k\frac{m_2m}{(a-x)^2}.$$

Condiția necesară și suficientă pentru repaus :

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0$$

echivalează cu ecuația scalară :

$$\frac{m_1}{x^2} = \frac{m_2}{(a-x)^2},$$

de unde :

$$x = \frac{a}{1 \pm \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}}.$$

Observație. Numai soluția cu semnul + (plus) la numitor corespunde poziției de repaus.

§ 67. Punctul material cu legături

a. Din observarea mișcărilor unor solide cu legături, întîlnite în viața practică sau în tehnică și care pot fi asimilate cu un punct material, se deduc următoarele tipuri de legături ;

1° Punctul material M este *legat* de punctul fix O printr-o bară OM rigidă (fig. 168, *a*). În acest fel, punctul M este silit să rămînă la distanţa invariabilă OM de punctul fix. El mai are *două grade de libertate*, deoarece se poate deplasa pe suprafaţa unei sfere cu centrul în O şi cu raza OM, pe care nu o poate părăsi în nici una din cele două părţi ale suprafeţei. Legătura este *bilaterală*.

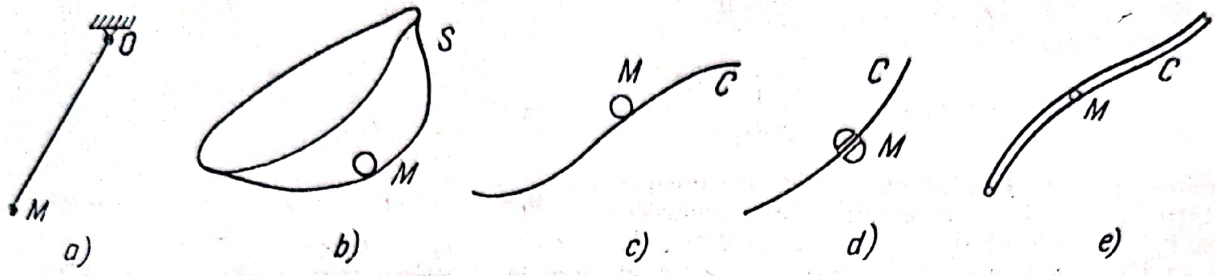


Fig. 168

Dacă legătura între M şi O este făcută printr-un fir flexibil şi neextensibil, punctul nu poate părăsi suprafaţa sferei în afara ei. Legătura prin fir permite punctului să ocupe orice poziţie în interiorul sferei. Legătura prin fir este *unilaterală*.

2° Punctul material este *rezemat* pe suprafaţa interioară sau exterioară a unui corp avînd forma din figura 168, *b*. Punctul material nu poate trece de pe o suprafaţă pe cealaltă traversînd corpul, dar poate părăsi suprafaţa, în partea în care se află.

Legătura este unilaterală (fig. 168, *b*).

Legătura ar fi bilaterală dacă corpul ar avea forma unui vas cu fund dublu, iar punctul s-ar afla între cele două suprafeţe.

3° Punctul material M este rezemat pe o bară rigidă curbă (fig. 168, *c*).

4° Punctul material M este legat de o bară rigidă curbă, ca în cazul unei mărgele străbătute de o sîrmă (fig. 168, *d*).

5° Un alt exemplu de legătură este al unei mici bile care se poate deplasa în interiorul unui tub rigid (fig. 168, *e*).

b. Exemplele pot fi şi mai mult schematizate şi grupate în următoarele tipuri:

— legătură unilaterală sau bilaterală cu o suprafaţă (S) fixă;
— legătură cu o curbă (C) fixă;
— o legătură fixă, punctul material neputînd părăsi un punct fix.

Acestor legături le corespund respectiv: două grade, un grad sau nici un grad de libertate.

O legătură care nu variază cu timpul se numeşte *staţionară* sau *scleronomă*. Legătura care variază cu timpul se numeşte *nestaţionară* sau *reonomă*.

Dacă suprafaţa sau curba este *aspră*, legătura este *cu frecare*.

Dacă se poate admite că frecarea dintre suprafaţa, respectiv curba de contact şi punctul material este neglijabilă, legătura se numeşte *ideală*.

În aplicaţii se întîlnesc mai des *legături scleronome cu frecare*.

§ 68. Caracteristicile forţelor de legătură

a. *Punct material rezemat pe o suprafaţă* (S). Fie M o poziţie a punctului material pe suprafaţa (S) (fig. 169), iar $\bar{R}$ rezultanta forţelor active aplicate punctului.

Pentru a elibera punctul material de legătură cu (S) se aplică în M o forţă de legătură *necunoscută* $\bar{R}'$ (reacţiunea suprafeţei).

Pentru ca punctul material să rămînă în repaus în M, este necesar şi suficient ca forţele date şi de legătură să se echilibreze, adică :

$$\bar{R} + \bar{R}' = 0. \qquad (6.11)$$

Cu scopul determinării unora din caracteristicile forţei de legătură $\bar{R}'$, în funcţie de caracteristicile suprafeţei (S), se va descompune $\bar{R}$, după normala Mn şi după planul tangent (P) la suprafaţă, în componentele $\bar{R}_n$ şi $\bar{R}_t$, adică :

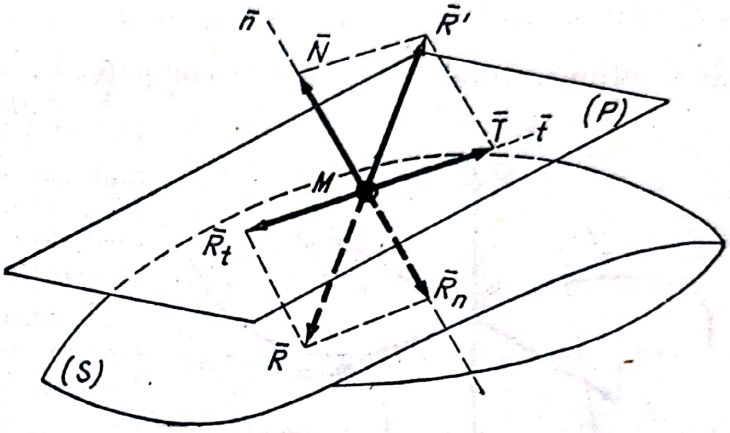


Fig. 169

$$\bar{R} = \bar{R}_n + \bar{R}_t. \qquad (6.12)$$

Tendinţa componentei R_n este de a desprinde punctul de suprafaţă în direcţia normalei Mn. Legătura se opune printr-o forţă $\bar{N}$, astfel încît :

$$\bar{N} + \bar{R}_n = 0. \qquad (6.13)$$

Deci, reacţiunea suprafeţei $\bar{R}'$ are o componentă $\bar{N}$ cu următoarele caracteristici :

— punctul de aplicaţie în M;
— direcţia după normala Mn la suprafaţă;
— modulul necunoscut, depinzînd de $\bar{R}_n$,
— sensul necunoscut dacă legătura este *bilaterală*, fiind de sens contrar lui $\bar{R}_n$, iar dacă legătura este *unilaterală*, sensul lui $\bar{N}$ este întotdeauna acela după care legătura permite desprinderea punctului.

Componenta $\bar{N}$ se mai numeşte şi forţă de legătură (reacţiune) *normală*.

Tendinţa componentei $\bar{R}_t$ a forţei active $\bar{R}$ este să deplaseze punctul material pe suprafaţa (S).

În general, suprafaţa de contact se opune prin frecare la această deplasare. Se poate spune că reacţiunea $\bar{R}'$ a suprafeţei mai are şi o componentă tangentă la suprafaţă, $\bar{T}$, datorită frecării şi care are următoarele caracteristici :

— punctul de aplicaţie în M;
— suportul în planul tangent (P);
— direcţia, sensul şi modulul, toate necunoscute, depinzînd de $\bar{R}_t$.

Forța de frecare este întotdeauna opusă tendinței de mișcare sau mișcării punctului material pe suprafață.

Experiența arată că $\bar{T}$ are modulul limitat, neputînd să echilibreze întotdeauna pe $\bar{R}_t$.

Deoarece $\bar{N}$ primește denumirea de *reacțiune normală*, iar $\bar{T}$ de *reacțiune tangențială*, $\bar{R}'$ se numește *reacțiune totală* a suprafeței (S).

Uneori, pentru simplificarea problemelor, se presupune că suprafața de contact este fără frecare. În asemenea cazuri (legături ideale):

$$\bar{T} = 0,$$

iar reacțiunea totală se reduce la componenta normală $\bar{N}$.

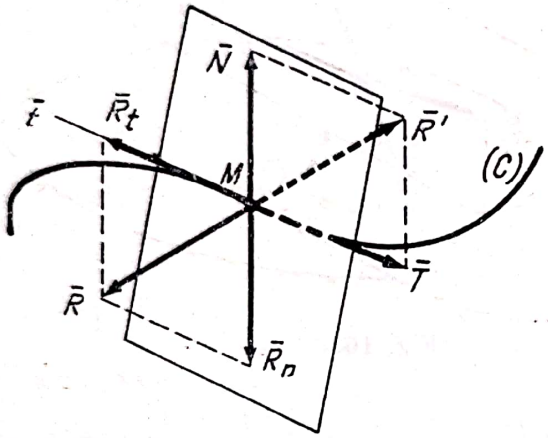


Fig. 170

b. *Punct material rezemat pe o curbă.* Fie M o poziție oarecare a punctului material care se reazemă pe o curbă invariabilă (C) (bară curbă rigidă) și $\bar{R}$ rezultanta forțelor active aplicate punctului (fig. 170).

Eliberarea punctului material de legătură cu (C) se face introducînd în M forța de legătură *necunoscută* $\bar{R}'$ (reacțiunea curbei). Pentru ca punctul material să rămînă în repaus în M, este necesar și suficient ca:

$$\bar{R} + \bar{R}' = 0. \qquad (6.14)$$

Pentru determinarea unora din caracteristicile forței de legătură $\bar{R}'$ în funcție de caracteristicile curbei (C) se va descompune $\bar{R}$, după tangenta Mt la curbă și după normala din planul $(Mt, \bar{R})$, adică:

$$\bar{R} = \bar{R}_t + \bar{R}_n. \qquad (6.15)$$

Tendința *componentei tangențiale* $\bar{R}_t$ a forței active $\bar{R}$ este să deplaseze punctul pe curbă.

În general, frecarea se opune la această deplasare printr-o *forță de legătură tangențială* T și care are următoarele caracteristici:

— punctul de aplicație în M;

— direcția după tangenta în M la curbă;

— sensul necunoscut, fiind opus tendinței de mișcare sau mișcării punctului material pe curbă;

— modulul necunoscut, depinzînd de $|\bar{R}_t|$, dar *limitat*, neputînd să o echilibreze întotdeauna.

Tendința *componentei normale* $\bar{R}_n$ este să depărteze punctul material de curba (C).

În cazul legăturii printr-o bară rigidă (C), aceasta se opune tendinței forței $\bar{R}_n$ prin *reacțiunea normală* $\bar{N}$, în măsură să echilibreze întotdeauna pe $\bar{R}_n$, adică:

$$\bar{N} + \bar{R}_n = 0. \qquad (6.16)$$

Scanned with OKEN Scanner

De aici se deduc următoarele caracteristici ale *componentei normale* $\bar{N}$ *a reacțiunii:*

— punctul de aplicație în M;

— direcția *necunoscută*, după una din normalele în M, adică situată în planul normal din M la curba strîmbă (C);

— dacă curba este plană, iar $\bar{R}_n$ se află în planul curbei, direcția este cunoscută;

— sensul și modulul necunoscute, în funcție de $\bar{R}_n$.

c. *Punct material fixat într-o poziție dată.* Oricare ar fi acțiunea $\bar{R}$ a forțelor date, forța de legătură $\bar{R}'$ satisface, în orice moment, condiția de echilibru:

$$\bar{R} + \bar{R}' = 0, \tag{6.17}$$

deoarece punctul material nu poate fi desprins de punctul dat.

Deci, legătura fixă a punctului material cu un punct dat se poate înlocui printr-o forță cu originea în punctul dat, avînd celelalte caracteristici, *direcția*, *sensul* și *modulul*, necunoscute.

d. În fiecare din cele trei cazuri analizate, forțele de legătură au unele din caracteristicile lor cunoscute: de obicei, punctul de aplicație, uneori și direcția.

Celelalte caracteristici ale forțelor de legătură rămîn necunoscute, deoarece ele depind de rezultanta forțelor active $\bar{R}$.

Pentru determinarea caracteristicilor necunoscute se va folosi condiția de echilibru pentru toate forțele aplicate punctului material, atît active cît și de legătură.

De preferință se va proiecta ecuația vectorială pe un sistem de axe rectangulare, obținîndu-se un număr de două sau trei ecuații scalare, după cum sistemul este în plan sau în spațiu.

e. *Cazurile speciale* ale legăturilor punctului material M de un punct fix O, prin mijlocirea unei bare rigide OM sau printr-un *fir flexibil și neextensibil*, se pot încadra în cazurile a) și b). Astfel:

Legătura prin bară rigidă (fig. 171) se încadrează în legătura *bilaterală* a punctului material M cu suprafața sferei de rază egală cu lungimea OM a barei și cu centrul în O.

Dacă se neglijează *rezistența mediului*, care ar constitui *reacțiunea tangențială*, întreaga reacțiune s-ar reduce la *reacțiunea normală* $\bar{N}$, cu următoarele caracteristici: punctul de aplicație în M, direcția după bară (normala la suprafața sferei), sensul și modulul necunoscute.

În cazul particular în care bara se poate deplasa într-un singur plan, suprafața sferică se înlocuiește printr-un cerc, iar reacțiunea are punctul de aplicație în M, direcția după bară, sensul și modulul fiind necunoscute.

Legătura prin fir se deosebește de legătura prin bară rigidă doar prin faptul că, fiind unilaterală, se cunoaște și sensul reacțiunii care este spre centrul O al sferei (S), respectiv al cercului (C).

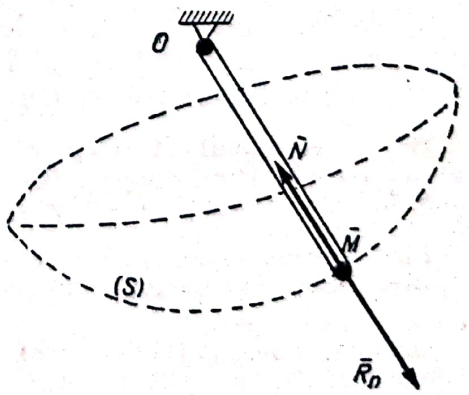


Fig. 171

Scanned with OKEN Scanner

§ 69. Frecarea de alunecare. Legile lui Coulomb[1]

a. În continuarea explicațiilor date la § 61, *e*, 1° și § 68, se consideră un corp asimilat cu un punct material M, care se reazemă cu frecare pe suprafața (S) a unui solid. Se presupune că asupra punctului material acționează forța $\bar{R}$, avînd componentele:

$\bar{R}_n$ dirijată după normala în M la suprafață;

$\bar{R}_t$ situată în planul tangentei (P) la suprafață (fig. 172).

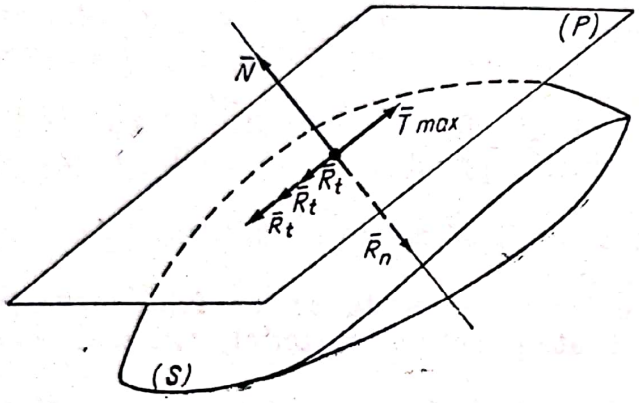
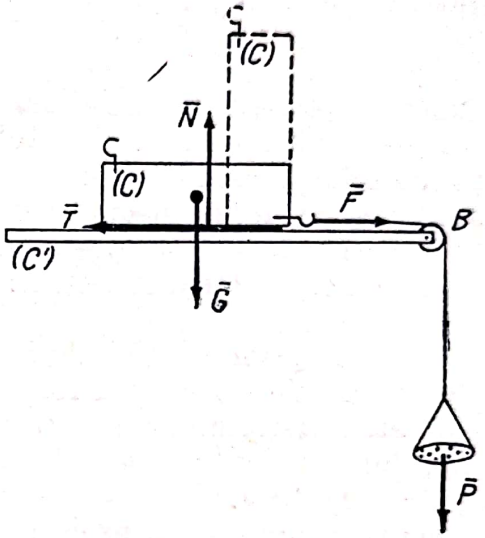


Fig. 172



Fgi 173

Se știe că suprafața de reazem (S), ca orice legătură, se poate înlocui printr-o forță $\bar{R}'$, reacțiunea suprafeței, avînd componentele $\bar{N}$ și $\bar{T}$.

De asemenea, în ipoteza că suprafața de reazem este rigidă, se știe că $\bar{N}$ echilibrează întotdeauna pe $\bar{R}_n$, pe cînd forța de frecare $\bar{T}$ este limitată.

În adevăr, dacă, păstrînd pe $\bar{R}_n$ constant, se mărește treptat modulul lui $\bar{R}_t$, se constată că repausul inițial se menține pînă în momentul cînd $\bar{R}_t$ atinge o valoare limită. Această acțiune limită este echilibrată de forța maximă de frecare $\bar{T}_{max}$. Dacă $\bar{R}_t$ depășește limita, forța de frecare nu se mai poate mări, echilibrul se rupe, iar punctul se deplasează pe suprafață.

b. Factorii de care depinde forța limită $\bar{T}_{max}$, precum și legile frecării la alunecare au fost stabilite de *Coulomb*, în secolul al XVIII-lea, cu ajutorul unui aparat numit *tribometru*.

Un model simplificat al aparatului se compune dintr-o placă plană (C') așezată orizontal, un solid paralelipipedic (C) de greutate G. Solidul poate fi acționat, prin mijlocirea unui fir petrecut peste un mic scripete B, de greutatea alicelor așezate de experimentator pe un taler (fig. 173).

Pentru experiențele statice[2] se așază încet, cu atenție, alice pe taler pînă în momentul în care solidul (C) pornește din repaus.

---

[1] *Ch. A. Coulomb* (1736—1806), inginer și om de știință francez. Printre multiplele sale descoperiri sînt și legile forțelor electrostatice.

[2] Pentru experiențele dinamice, vezi § 130, apl. 1°.

Se determină greutatea cea mai mică P_{min}, a alicelor şi a talerului, care a provocat pornirea.

Se poate scrie relaţia :

$$| \bar{T}_{max} | = P_{min}.$$

Se calculează raportul :

$$\frac{|\bar{T}_{max}|}{|\bar{N}|} = \frac{P_{min}}{G}. \qquad (6.18)$$

Se reia experienţa după ce se aşază pe solid un corp de greutate oarecare, astfel ca greutatea totală să fie G'. Evident, reacţiunea normală se modifică şi ea : $| \bar{N}' | = G'$.

Experienţa determină :

$$| \bar{T}'_{max} | = P'_{min},$$

iar calculul, după mai multe determinări, arată pe baza relaţiei (6.18), că :

$$\frac{P_{min}}{G} = \frac{P'_{min}}{G'} = \frac{P''_{min}}{G''} = \text{constant} = \mu_0,$$

unde s-a notat cu μ_0 valoarea constantă a rapoartelor.

In consecinţă :

$$| \bar{T}_{max} | = \mu_0 | \bar{N} |, \qquad (6.19)$$

adică :

Legea I. *Modulul forţei limită de frecare la alunecare în stare statică (frecare de repaus) este proporţional cu modulul reacţiunii normale de pe suprafaţa de contact.*

Factorul de proporţionalitate se numeşte *coeficient de frecare.*

Experienţele cu solidul în mişcare au dovedit că legea se aplică şi în dinamică. Singura deosebire este că diferă coeficienţii de frecare.

S-a notat cu μ_0 coeficientul de frecare la alunecare în repaus şi cu μ coeficientul de frecare la alunecare în mişcare. De obicei : $\mu_0 > \mu$.

Pentru cunoaşterea mai adîncă a acestor coeficienţi, Coulomb a variat experienţele sale : a schimbat natura şi aşezarea solidului (C) (fig. 173), a modificat prelucrarea suprafeţei de contact sau a pus diferite substanţe între (C) şi (C').

Pe baza acestor experienţe a enunţat şi celelalte trei legi :

Legea a II-a. *Coeficientul de frecare* (μ_0 sau μ) *nu depinde de reacţiunea normală* $\bar{N}$ *şi nici de mărimea ariei suprafeţei comune de contact.*

Legea a III-a. *Coeficientul de frecare* (μ_0 sau μ) *depinde de natura suprafeţelor solidelor în contact, de felul prelucrării lor şi de natura substanţelor puse între cele două solide pe suprafaţa comună de contact.*

Legea a IV-a. *Coeficientul de frecare la alunecare în mişcare* (μ) *nu depinde de viteza relativă dintre cele două solide.*

Scanned with OKEN Scanner

c. *Observaţii şi completări.* 1° Se dau cîteva valori numerice extrase din *Manualul inginerului:*

	μ_0	μ	
Oţel pe oţel	0,15	0,07	uns cu seu
		0,15	uns cu ulei
Oţel pe gheaţă	0,027	0,014	
Bronz pe bronz	—	0,20	puţin uns
Bronz pe fontă	—	0,21	puţin uns
Fontă pe fontă sau bronz	—	0,15	puţin uns
Fontă pe fontă sau bronz	—	0,31	cu apă
Stejar pe stejar (paralel cu fibrele)	0,62	0,48	
Stejar pe stejar (perpendicular pe fibrele solidului alunecător)	0,54	0,34	
Curea de piele pe tambur de stejar (paralel cu fibrele)	0,47	puţin uns 0,27	uscat

2° *Explicaţii asupra frecării la alunecare.* Fenomenul este complex; experienţele şi observaţiile permit următoarele explicaţii sumare:

a) Suprafeţele în contact au asperităţi care se întrepătrund şi care astfel se opun la deplasarea relativă a celor două solide.

b) În timpul mişcării relative, întrepătrunderea asperităţilor se face într-o mai mică măsură decît în timpul repausului şi de aceea, de obicei, $\mu < \mu_0$.

3° *Critica legilor lui Coulomb.*

α) Cu privire la *legea a II-a.* Dacă A este aria suprafeţei comune de contact, iar p presiunea (forţa raportată la unitatea de arie plană) într-un punct oarecare de pe suprafaţa de contact, nu este sigur că totdeauna forţa N se repartizează uniform pe suprafaţa de contact, adică p este constant. Experienţele au arătat că în punctele în care p este mai mare, coeficientul de frecare este mai mare decît în punctele în care p este mai mic.

β) Cu privire la *legea a IV-a.* Experienţe mai noi au dovedit că coeficientul de frecare în mişcare depinde de mărimea vitezei relative, descrescînd o dată cu creşterea vitezei. În practică se admite totuşi ca la viteze mai mici de 15 m/s să se considere coeficientul μ independent de viteză.

Cu toate criticile justificate, legile lui Coulomb sînt folosite, cu mici corecţii, şi astăzi în mecanica aplicată, însă numai pentru *frecarea uscată.*

d. Unghi de frecare, con de frecare

1° *Punct pe o suprafaţă.* Din cele arătate reiese că forţa de frecare $\bar{T}$ la alunecare depinde de componenta tangenţială $\bar{R}_t$ a acţiunii $\bar{R}$.

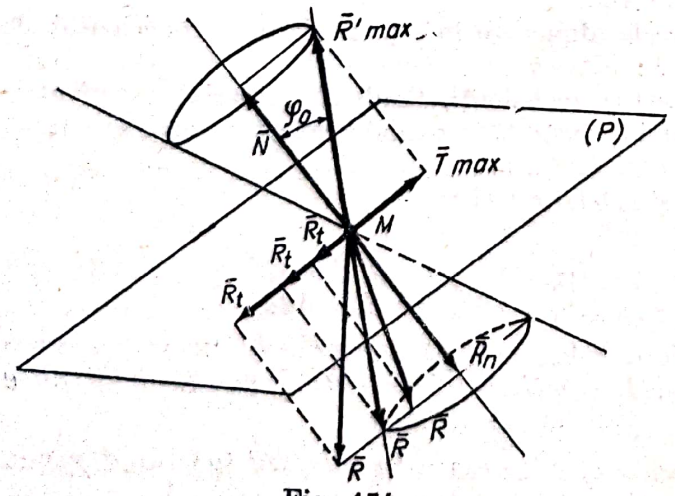


Fig. 174

$\bar{T}$ are aceeaşi direcţie cu $\bar{R}_t$, iar sensul opus. Modulul $|\bar{T}|$ creşte în aceeaşi măsură în care creşte şi $|\bar{R}_t|$, pînă la valoarea limită (6.19), după care echilibrul se rupe.

Reacţiunea totală $\bar{R}'$ a suprafeţei (S) care este reprezentată prin planul (P) tangent la (S) (fig. 174) este:

$$\bar{R}' = \bar{N} + \bar{T}. \qquad (6.20)$$

Dacă se menţin $\bar{R}_n$ respectiv $\bar{N}$ constante şi se măreşte, treptat, de la zero, modulul lui $\bar{R}_t$, se

constată că $\bar{R}'$ se depărtează de normala la (S), iar $|\bar{R}'|$ se mărește din cauză că $|\bar{T}|$ se mărește în aceeași măsură cu $|\bar{R}_t|$.

La limită:

$$\bar{R}'_{max} = \bar{N} + \bar{T}_{max}, \tag{6.21}$$

iar unghiul pe care-l formează cu normala atinge valoarea limită:

$$\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{|\bar{T}_{max}|}{|\bar{N}|} = \operatorname{arc\,tg}\, \mu_0. \tag{6.22}$$

φ_0 se numește *unghiul de frecare la alunecare.*

În continuare, dacă se menține $|\bar{R}_n|$ constant, iar $|\bar{R}_t|$ la valoarea corespunzătoare echilibrului limită:

$$\bar{R}_t + \bar{T}_{max} = 0, \tag{6.23}$$

și se rotește suportul lui $\bar{R}_t$ în jurul normalei, suportul forței de frecare $\bar{T}_{max}$ se va roti și el. La fel, și suporturile reacțiunii totale maxime $\bar{R}'_{max}$ și cel al acțiunii $\bar{R}$ la limita echilibrului se vor roti în jurul normalei. Suporturile acestor forțe, care sînt egale și direct opuse, generează o suprafață conică cu vîrful în M și avînd normala ca axă. Dacă coeficientul de frecare μ_0 este același după toate tangentele la (S), adică dacă frecarea este *izotropă*, suprafața este un con circular drept. Această suprafață poartă numele de *con de frecare.*

Conul de frecare se poate construi în orice punct al suprafeței (S), pe care este rezemat punctul material M cu ajutorul normalei la suprafață și al unghiului maxim de frecare φ_0.

O dată construit conul de frecare, este ușor de verificat grafic care este situația echilibrului.

Dacă suportul acțiunii totale:

$$\bar{R} = \bar{R}_n + \bar{R}_t$$

se află în interiorul suprafeței conice, componenta $\bar{R}_t$ nu a atins valoarea maximă a forței de frecare și echilibrul se menține.

Dacă suportul acțiunii totale se află pe suprafața conică, echilibrul este la limită, pe punctul de a se rupe, iar dacă suportul lui $\bar{R}$ este în afara suprafeței, echilibrul este rupt, deoarece $\bar{R}_t$ a depășit forța maximă, pe care frecarea o poate opune.

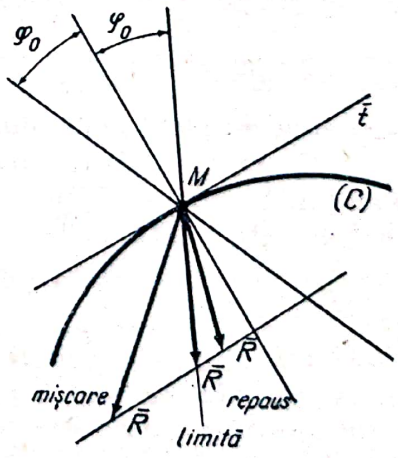


Fig. 175

Observație. Dacă se secționează întreaga construcție cu un plan care trece prin normala în M la (S) (fig. 175), se obține: o curbă (C), două drepte care formează, cu normală în M la curba plană (C), de o parte și de alta a ei, unghiul de frecare φ_0, și tangenta în M la curba (C).

Raționînd la fel, se trag următoarele concluzii: dacă suportul lui $\bar{R}$ se găsește între cele două drepte extreme, punctul M rămîne

în repaus : dacă suportul lui $\bar{R}$ coincide cu una din cele două drepte, echilibrul este la limită și este rupt dacă suportul lui $\bar{R}$ se găsește în afara unghiului $2\varphi_0$ format de cele două drepte.

Această construcție permite rezolvarea grafică a unor probleme de echilibru cu frecare în plan.

2° *Punct pe o curbă strîmbă.* La o curbă strîmbă, într-un punct curent M, se pot duce o infinitate de normale; de aceea nu se poate construi conul de frecare cu axa normală la curba (C). În schimb, tangenta la curbă este unică [1].

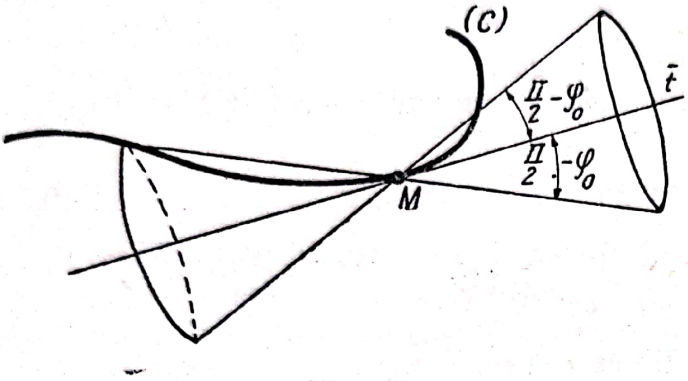


Fig. 176

Se construiește conul cu tangenta ca axă și cu generatoarele înclinate de unghiul complementar $\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)$ unghiului de frecare φ_0 (fig. 176). Acest con se numește *conul complementar de frecare.* Dacă suportul acțiunii totale $\bar{R}$ este situat în afara suprafeței conice, punctul rămîne în repaus. Dacă suportul este în interiorul suprafeței, echilibrul este rupt, iar dacă suportul coincide cu una din generatoarele conului complementar de frecare, echilibrul este la limită.

e. *Concluzii.* 1° Frecarea de alunecare poate fi considerată ca o legătură tangențială a unui solid, asimilat cu un punct material, cu un alt solid (suprafață, curbă).

2° Frecarea de alunecare se înlocuiește printr-o forță de legătură (reacțiune) cu următoarele caracteristici :

— punctul de aplicație în punctul material;

— direcția tangentă la suprafață sau la curbă;

— sensul opus mișcării sau tendinței de mișcare;

— modulul nedeterminat :

$$|\bar{T}| \leqslant \mu_0 |\bar{N}|;$$

valoarea maximă corespunde cazului de echilibru la limită.

3° Coeficientul de frecare în repaus μ_0 sau în mișcare μ se determină experimental. În dinamică, pînă la anumite viteze, se consideră μ constant, și astfel se folosește relația la limită :

$$|\bar{T}| = \mu |\bar{N}|.$$

4° Unghiul și conul de frecare ușurează înțelegerea și rezolvarea problemelor de statica punctului material cu legături normale și tangențiale. În unele probleme, folosirea unghiului de frecare conduce la soluții grafice simple.

[1] Dacă M nu este un punct singular.

§ 70. Indicații metodice pentru rezolvarea problemelor

Se presupune că problema tratează cazul unui punct material supus la un număr de forțe date și la un număr oarecare de legături. Pentru rezolvare se pot folosi următoarele indicații metodice:

a) Se scoate în evidență aspectul fizic al problemei.

b) Se notează datele problemei: forțe cunoscute, poziții de repaus cunoscute, coeficienți de frecare etc.

c) Se analizează legăturile punctului material, pentru a cunoaște care sînt legăturile normale și care sînt cele datorite frecării.

d) Se scot în evidență caracteristicile cunoscute ale forțelor de legătură: punct de aplicație, direcție, sens.

e) Se scot în evidență caracteristicile necunoscute ale forțelor de legătură sau parametrii necunoscuți ai poziției de repaus.

f) Se alege, pentru rezolvarea analitică, sistemul de referință cel mai potrivit pentru simplificarea calculelor. Deseori se alege originea sistemului de referință în punctul material. În general este preferabil să se aleagă astfel axele încît ecuațiile de proiecții să fie cît mai simple.

g) O dată ce legăturile punctului material sînt înlocuite prin forțe de legătură, punctul poate fi considerat eliberat de legături și acționat de toate forțele active și cele de legătură.

h) Se scrie condiția de echilibru a acestor forțe, ecuația vectorială:

$$\bar{R} + \bar{R}' = 0,$$

unde $\bar{R}$ este rezultanta forțelor active și $\bar{R}'$ a celor de legătură.

i) Se proiectează forțele pe axele alese (trei în spațiu, două în plan) și se obțin ecuații scalare de forma:

$$X + X' = 0 \qquad Y + Y' = 0 \qquad Z + Z' = 0,$$

în care X, Y, Z sînt valorile proiecțiilor rezultantei forțelor active, iar X', Y', Z' sînt valorile proiecțiilor rezultantei forțelor de legătură necunoscute. În aceste ecuații mai apar și parametrii poziției de repaus în raport cu sistemul de referință.

j) Se scriu inecuațiile de forma:

$$|\bar{T}| \leqslant \mu_0 |\bar{N}|$$

pentru forțele de frecare.

k) Se rezolvă sistemul de ecuații și inecuații. Evident inecuațiile complică rezolvarea sistemului. Uneori, se presupune că repausul este la limită și se transformă inecuațiile în ecuații.

Desigur că procedeul ușurează mult calculele; în schimb, îngreuiază și chiar denaturează interpretarea fizică a rezultatelor. De aceea se recomandă rezolvarea corectă a sistemului de ecuații și de inecuații.

l) În general, problemele de statică, în care există și legături cu frecare, sînt *nedeterminate*, deoarece forțele de frecare, în cazul repausului, au modulele nedeterminate cuprinse între zero și valoarea limită maximă.

Mai sînt și alte probleme nedeterminate în statică, în care, deși nu intervin legături tangențiale, legăturile normale sînt astfel încît forțele respective nu pot fi determinate prin condițiile de echilibru din statică.

Această situație se prezintă în cazul punctului cu *legături multiple* și se pot analiza cazurile posibile. Se notează cu:

m — numărul necunoscutelor scalare ale forțelor de legătură normale[1];

n — numărul ecuațiilor scalare de echilibru static;

p — numărul gradelor de libertate rămase punctului material.

Cazul 1° Dacă $p \neq 0$, deoarece legăturile nu au suprimat toate gradele de libertate ale punctului material, sistemul punct-legături se numește *mecanism*.

[1] Legăturile tangențiale nu suprimă libertatea de deplasare a punctului material, deoarece forțele de frecare au valori limitate.

Cele p grade de libertate rămase depind de p parametri scalari, potrivit definiției date la § 63.

α) În general, dacă:

$$m + p = n,$$

sistemul este *static determinat.*

β) Dacă:

$$m + p > n,$$

sistemul este *static nedeterminat.* De obicei, nu pot fi determinate toate necunoscutele scalare ale forțelor de legătură.

Cazul 2° Dacă:

$$p = 0,$$

legăturile împiedică orice deplasare a punctului material.

α) Dacă:

$$m = n,$$

sistemul este *static determinat.*

β) Dacă:

$$m > n,$$

sistemul este *static nedeterminat.*

În acest caz, sistemul are mai multe legături decît sînt necesare pentru anularea tuturor gradelor de libertate.

Necunoscutele scalare ale forțelor de legătură nu pot fi determinate numai cu ajutorul ecuațiilor de echilibru date de mecanica solidului rigid[1].

m) Ca încheiere, după tratarea problemei, se va trece la interpretarea fizică a rezultatelor și se vor căuta explicații asupra cauzelor care au condiționat completa sau incompleta ei rezolvare.

§ 71. Aplicații

1° Un punct material M de greutate $\bar{G}$ este agățat prin firele inegale O_1M și O_2M de punctele fixe O_1 și O_2 situate pe aceeași orizontală.

Cunoscînd poziția de repaus a punctului material prin unghiurile α_1 și α_2 (fig. 177), să se calculeze forțele de legătură.

Rezolvare.

a) Problema găsește unele aplicații, de exemplu, în cazul suspendării unui solid într-o anumită poziție. Pentru a alege firele (cablurile) care să reziste, este necesar să se determine reacțiunile firelor (forțele de legătură). Problema este de tipul general direct.

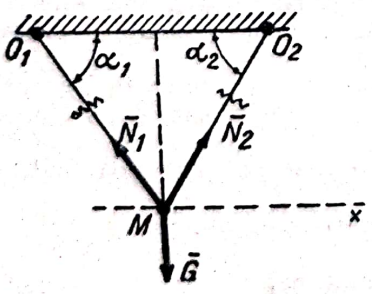


Fig. 177

b) Datele problemei sînt greutatea $\bar{G}$ și unghiurile α_1 și α_2.

c) Punctul material are două legături prin fire, legături normale și nu are legături tangențiale.

d) Forțele de legătură sînt $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$. Caracteristicile cunoscute ale lor sînt: punctul de aplicație și direcțiile.

e) Caracteristicile necunoscute sînt valorile forțelor de legătură, în total *două necunoscute scalare.*

f) Axe convenabile sînt orizontala Mx și verticala My.

g) Punctul eliberat de legături este acționat de forța dată $\bar{G}$ și de forțele necunoscute $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$.

h) Condițiile scalare de echilibru se obțin proiectînd ecuația vectorială de echilibru:

$$\bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{G} = 0,$$

[1] Ecuațiile suplimentare necesare se obțin în rezistența materialelor pe baza unor *condiții de echilibru elastic.*

pe cele două axe:

$$(Mx) \quad -N_1\cos\alpha_1 + N_2\cos\alpha_2 = 0$$

$$(My) \quad N_1\sin\alpha_1 + N_2\sin\alpha_2 - G = 0.$$

i) Soluţiile:

$$N_1 = \frac{G\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad N_2 = \frac{G\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$$

determină nu numai modulele forţelor de legătură, ci arată prin semnele plus (+) că sensurile au fost bine alese.

j) *Discuţie.* Deoarece legăturile suprimă cele două grade de libertate ale unui punct obligat să rămînă într-un plan rezultă $p = 0$, iar numărul necunoscutelor scalare ale forţelor de legătură $m = 2$.

Deoarece $n = 2$, adică $m = n$, sistemul este *static determinat.*

k) În practică este necesar să se economisească materialele de construcţii, adică, în cazul problemei, să se utilizeze cabluri cît mai scurte şi, dacă se poate, cît mai subţiri. Însă, dacă sînt scurtate cablurile, unghiurile α_1 şi α_2 se micşorează, iar reacţiunile cresc foarte mult. Astfel, de exemplu, pentru:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 10°, \quad \sin\alpha = 0{,}17365,$$

şi

$$N_1 = N_2 = \frac{G}{2\sin\alpha} \approx 2{,}88\,G.$$

Pe măsură ce sînt scurtate, cablurile trebuie să fie mai groase.

Soluţia optimă se poate găsi prin folosirea unei condiţii de minim de material[1].

2° Un punct material M de greutate $\bar{G}$ este legat printr-un fir MO de punctul fix O. În afară de greutatea $\bar{G}$, punctul mai este acţionat de o forţă dată orizontală $\bar{F}$ (fig. 178).

Să se calculeze reacţiunea firului şi poziţia în care trebuie aşezat firul pentru ca el să rămînă în repaus sub acţiunea forţelor active şi de legătură.

Rezolvare. Se procedează ca la aplicaţia 1°.

În primul rînd se constată că problema este de tipul general mixt, apoi că, deoarece $p = 1$, sistemul este un mecanism.

Pe de altă parte, cum $m = 1$, $n = 2$, iar $m + p = n$, ecuaţiile de echilibru permit calcularea atît a reacţiunii $\bar{N}$ cît şi a parametrului θ care determină poziţia de repaus.

Prin proiectarea pe axele Ox, Oy (fig. 178) a ecuaţiei de echilibru:

$$\bar{N} + \bar{F} + \bar{G} = 0,$$

se obţin cele două ecuaţii scalare:

$$\text{pe } (Ox) \quad G - N\cos\theta = 0 \quad \text{pe } (Oy) \quad F - N\sin\theta = 0,$$

care rezolvate dau:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{F}{G} \quad N = \sqrt{F^2 + G^2} \quad \text{etc.}$$

3° Un punct material M de greutate $\bar{G}$ este suspendat prin trei fire de punctele fixe O_1, O şi O_2 situate pe aceeaşi orizontală, O fiind la mijlocul distanţei O_1O_2. Firele O_1M şi O_2M sînt egale. Cunoscînd poziţia de repaus prin unghiurile α (fig. 179), să se calculeze forţele de legătură.

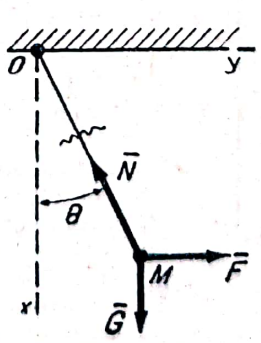


Fig. 178

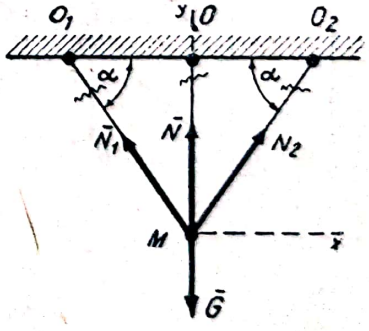


Fig. 179

[1] Problema se rezolvă cu cunoştinţe elementare de rezistenţa materialelor; se găseşte $\alpha = 45°$.

Rezolvare. Problema face parte din tipul general direct şi evident punctul material are o legătură mai mult decît cele necesare pentru anularea celor două grade de libertate ale unui punct într-un plan ceea ce se verifică şi prin calcul, deoarece : $m = 3$, $n = 2$, $p = 0$, iar $m > n$, astfel că sistemul este static nedeterminat.

Precedînd ca la aplicaţia 1°, se obţin ecuaţiile :

$$-N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\alpha = 0 \text{ şi } N_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha + N - G = 0,$$

adică :

$$N_1 = N_2 \text{ şi } 2N_1 \sin\alpha + N = G,$$

două ecuaţii cu trei necunoscute.

În practică, se obişnuieşte să se sporească numărul legăturilor; de exemplu, un candelabru într-o sală de spectacole este suspendat prin mai multe cabluri, pentru o mai mare siguranţă.

În asemenea cazuri, numărul de ecuaţii date de statică sînt insuficiente pentru determinarea reacţiunilor legăturilor[1].

4° O lampă de greutate $\bar{G}$ este atîrnată prin trei fire, de greutăţi neglijabile, de punctele A_1, A_2, şi A_3. A_1 şi A_2, situate pe aceeaşi orizontală, sînt simetrice faţă de planul vertical (V) care trece prin A_3 şi prin punctul O de suspensie al lămpii. Se notează cu 2α unghiul A_1OA_2, cu β unghiul bisectoarei unghiului A_1OA_2 cu verticala punctului O şi cu γ unghiul dintre OA_3 şi verticală.

Să se calculeze reacţiunile celor trei fire (fig. 180).

Rezolvare. În aplicaţia 3°, suspendarea era făcută prin trei fire situate în acelaşi plan, iar problema era static nedeterminată.

În aplicaţia de faţă, cele trei fire concurente nu sînt în acelaşi plan.

Se constată că cele trei grade de libertate sînt suprimate prin legături ($p = 0$), că numărul necunoscutelor scalare ale forţelor de legătură este $m = 3$, iar numărul ecuaţiilor scalare de echilibru este $n = 3$. Deoarece $m = n$, sistemul este static determinat.

Se aleg ca axe de proiecţii orizontala Ox, verticala Oy din planul (V) al punctului O şi Oz perpendiculara în O pe acelaşi plan.

Proiectînd ecuaţia de echilibru :

$$\bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{N}_3 + \bar{G} = 0$$

pe cele trei axe alese şi rezolvînd ecuaţiile scalare, se găseşte :

$$N_1 = N_2 = \frac{G \sin\gamma}{2 \cos\alpha \sin(\beta + \gamma)},$$

$$N_3 = \frac{G \sin\beta}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

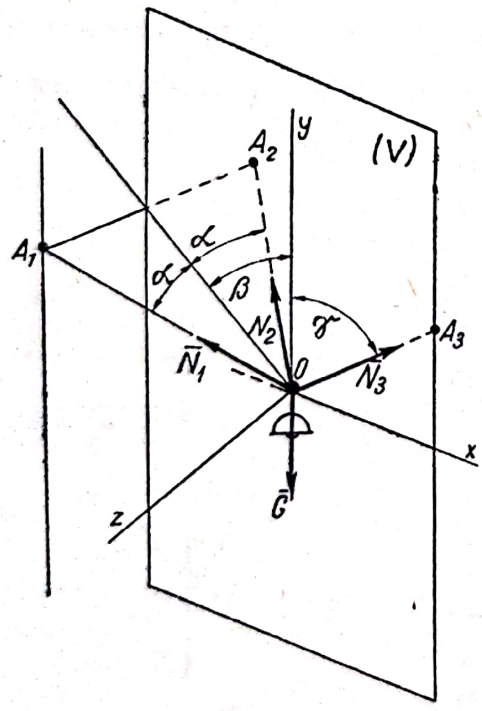


Fig. 180

5° Un solid, asimilat cu un punct material, stă rezemat pe un plan înclinat, aspru. Planul poate fi rotit în jurul unei axe din planul orizontal, proiectată în O pe figura 181.

Dacă se cunoaşte μ_0, coeficientul de frecare la alunecare în repaus între solid şi planul înclinat, se cere să se calculeze unghiul α_{max} de înclinare a planului faţă de cel orizontal pentru care solidul mai rămîne în repaus.

[1] Aplicaţia este complet rezolvată în rezistenţa materialelor.

Rezolvare. Se notează cu $\bar{G}$ greutatea punctului material M. Punctul are o legătură normală, care se înlocuieşte prin reacţiunea $\bar{N}$, şi o legătură tangenţială, care se înlocuieşte prin forţa de frecare $\bar{T}$, care se opune la alunecarea punctului pe plan în jos.

După eliberarea punctului de legături se scrie ecuaţia vectorială:

$$\bar{N} + \bar{T} + \bar{G} = 0,$$

care, proiectată pe axele Ox şi Oy (fig. 181), dă:

$$(Ox)\quad T - G \sin \alpha = 0 \qquad (Oy)\quad N - G \cos \alpha = 0,$$

de unde:

$$T = G \sin \alpha \text{ şi } N = G \cos \alpha.$$

Dar T, valoarea forţei de frecare, nu poate depăşi orice limită, deoarece:

$$|\bar{T}| \leqslant \mu_0 |\bar{N}|,$$

adică:

$$T = G \sin \alpha \leqslant \mu_0 G \cos \alpha,$$

de unde:

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant \mu_0,$$

iar unghiul maxim:

$$\alpha_{max} = \operatorname{arc\,tg}\, \mu_0 = \varphi_0,$$

adică, dacă α nu depăşeşte unghiul de frecare φ_0, punctul rămîne în repaus.

Observaţie. Aplicaţia poate servi la determinarea experimentală a unghiului φ_0 dintre corp şi planul înclinat. Este suficient să se rotească foarte încet planul pînă în poziţia în care solidul nu mai rămîne în repaus. Se măsoară α_{max} al acestei poziţii.

6° Să se rezolve grafic aplicaţia 5°.

Rezolvare. Se construiesc în punctul M, de o parte şi de alta a perpendicularei pe planul înclinat, unghiurile φ_0 (fig. 182). Dacă suportul forţei $\bar{G}$ coincide cu una din laturile extreme ale unghiurilor construite, echilibrul este la limită. Cum direcţia forţei $\bar{G}$ este verticală, trebuie rotit planul astfel încît:

$$\alpha = \varphi_0.$$

7° Un solid, asimilat cu un punct material, de greutate $\bar{G}$, este rezemat pe un plan înclinat de unghiul α faţă de planul orizontal. Dacă μ_0 este coeficientul de frecare în repaus, să se afle pentru $|\bar{G}| = 100$ kgf, $\alpha = 30°$, $\mu_0 = 0{,}3$, dacă solidul rămîne sau nu în repaus; în cazul că nu rămîne, să se calculeze valoarea forţei $\bar{F}$ (fig. 183) pentru a-l *menţine* şi apoi să se calculeze valoarea minimă a forţei pentru a *deplasa* solidul pe planul înclinat în sus.

Rezolvare. Pentru repaus trebuie ca $\operatorname{tg} \alpha \leqslant \mu_0$.

Numeric, deoarece:

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}59 > 0{,}3,$$

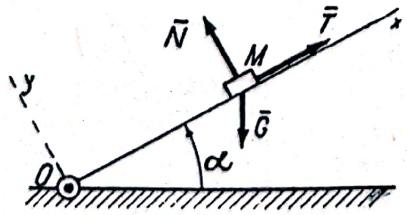


Fig. 181

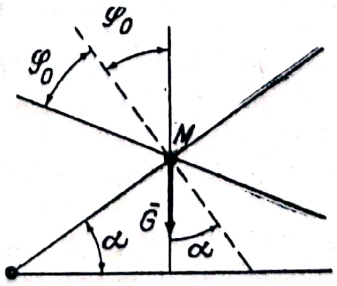


Fig. 182

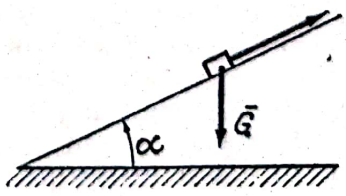


Fig. 183

solidul nu rămîne în repaus. Pentru a-l menţine este necesară forţa:

$$F \geqslant G(\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha) = 24 \text{ kgf}.$$

Pentru a-l deplasa pe plan în sus trebuie ca:

$$F > G(\mu_0 \cos \alpha + \sin \alpha) = 76 \text{ kgf}.$$

Deci, pentru menţinerea solidului pe plan condiţiile sînt:

$$24 \text{ kgf} = G(\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha) \leqslant F \leqslant G(\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha) = 76 \text{ kgf}.$$

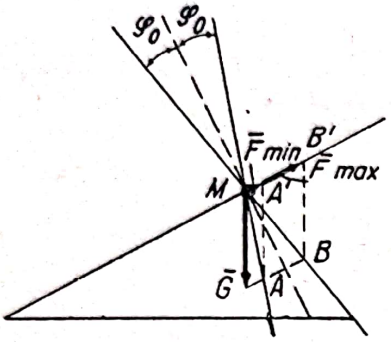


Fig. 184

8° Să se rezolve grafic exemplul numeric precedent.

Rezolvare. Se construiesc unghiurile de frecare $\varphi_0 = \text{arctg } 0{,}3 \approx 16°42'$, în punctul M, de o parte şi de alta a perpendicularei din M pe planul înclinat (fig. 184).

Se construieşte la o scară oarecare forţa $\bar{G}$ pe verticala punctului M. Cum suportul forţei $\bar{G}$ este în afara unghiului de frecare, punctul nu rămîne în repaus. Paralela dusă din vîrful lui $\bar{G}$ taie laturile unghiurilor de frecare în A şi B. Paralelele din A şi B la suportul forţei $\bar{G}$ întîlnesc linia planului înclinat în A' şi B'. MA' şi MB' reprezintă, la scara aleasă, modulul forţei minime şi cel al forţei maxime pentru care punctul rămîne în repaus pe planul înclinat.

CAPITOLUL VII

STATICA SOLIDULUI

A. LEGĂTURILE NORMALE

§ 72. Exemple de legături concrete. Scheme

a. Elementele unei maşini, ale unei construcţii sau ale unei instalaţii sînt corpuri solide legate între ele. Aceste legături, variate şi complexe, îngrădesc sau opresc mişcările relative ale solidelor.

Pentru un studiu teoretic al legăturilor este util ca ele să fie grupate după unele caracteristici esenţiale comune.

Astfel, legăturile se pot grupa după numărul gradelor de libertate pe care, fiecare din ele, le suprimă unui solid, sau după felul deplasărilor pe care legăturile le permit solidului, de pildă, translaţii sau rotaţii, în raport cu solidele de legătură care se presupun fixe.

b. *Exemple.* 1° La suportul unui stilou de birou (fig. 185) cele două părţi (C) şi (C') sînt legate pe o suprafaţă sferică de contact. Legătura permite solidului (C) să se rotească oricum, în raport cu solidul (C'), în jurul punctului fix O.

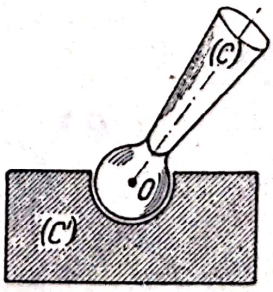


Fig. 185

Legătura suprimă solidului (C) trei din cele şase grade de libertate pe care le avea. Această legătură se numeşte articulaţie şi, deoarece contactul se face pe

o suprafaţă sferică, *articulaţia* este denumită *sferică*. Alte exemple de articulaţie sferică sînt : articulaţia cardanică [1], legătura braţului cu umărul etc.

Experienţa arată că legătura se opune, în primul rînd, la desprinderea solidului (C) de punctul fix şi, în al doilea rînd, prin frecare, la mişcări de rotaţii în raport cu punctul fix. Dacă se face abstracţie de frecare, articulaţia sferică se poate asimila cu legătura într-un punct O fix al solidului (C) cu solidul (C'), presupus de asemenea fix (fig. 189).

2° La suportul unei lămpi de birou (fig. 186), legătura dintre cele două părţi (C) şi (C') se face pe o suprafaţă cilindrică.

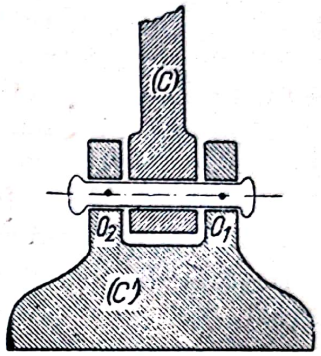


Fig. 186

Legătura permite solidului (C) să se rotească în jurul axei fixe O_1O_2. Legătura suprimă solidului (C) cinci din cele şase grade de libertate şi se numeşte *articulaţie cilindrică*. Este una din legăturile cele mai des întîlnite; uşile, ferestrele, arborii motoarelor etc. sînt tot atîtea solide legate prin articulaţii cilindrice. Experienţa arată că legătura se opune la desprinderea solidului (C) de axa fixă, respectiv de cele două puncte fixe O_1 şi O_2, iar prin frecare, la rotirea solidului (C) în raport cu axa O_1O_2. Dacă se face abstracţie de frecare, articulaţia cilindrică poate fi asimilată cu legătura în două puncte fixe O_1 şi O_2 ale solidului (C) cu solidul (C') fix (fig. 191).

3° În cazul unui cui bătut în zid, al unei grinzi fixate în perete, al unui stîlp de clădire etc., se constată o legătură cu un număr foarte mare de puncte fixe de contact între solidele (C) şi (C'). Legătura suprimă solidului (C) toate cele şase grade de libertate, nepermiţîndu-i nici un fel de deplasare în raport cu (C'). O asemenea *legătură rigidă* se numeşte *încastrare*. Teoretic, o încastrare poate fi asimilată cu o legătură, între solidele (C) şi (C'), prin trei puncte fixe O_1, O_2 şi O_3, nesituate pe aceeaşi dreaptă (fig. 187 şi 192).

4° O roată de automobil (C) se reazemă pe asfaltul unei străzi (fig. 188). Practic, contactul se face pe o mică regiune a unei suprafeţe (S), asimilabilă cu o suprafaţă plană. Legătura nu suprimă decît un singur grad de libertate, lăsînd solidului (C) cinci grade de libertate. Deplasările cele mai caracteristice pe care legătura le permite solidului (C) sînt : *alunecarea* cu toate punctele suprafeţei de contact pe solidul (C'), rotirea în jurul unei axe normale pe suprafaţa de contact (S) *(pivotare)*, rotirea în jurul unei axe tangente la suprafaţa de contact (S) *(rostogolire)*. Această legătură se numeşte *reazem* şi

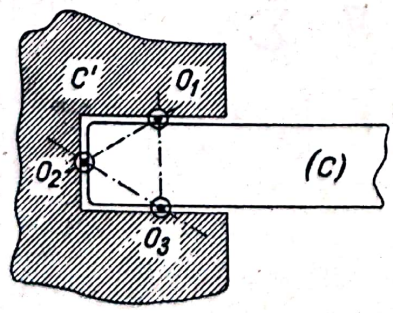


Fig. 187

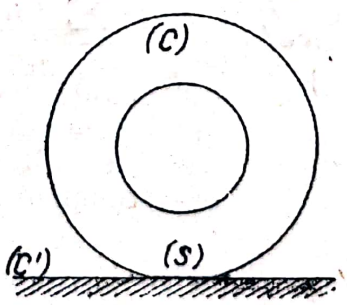


Fig. 188

[1] Vezi manualul : G. Manea. *Organe de maşini*. Editura tehnică, 1956.

este cea mai obișnuită legătură din natură, tehnică și din viața practică. Lampa pe masă, cărțile în bibliotecă, roțile locomotivei pe șine, capul de cruce al locomotivei pe glisieră, pistonul în cilindru, sertarul în raport cu masa etc. sînt exemple de legături prin reazem.

Se observă că din cele șase exemple date, primele trei sînt de legături *unilaterale*, iar ultimele trei sînt de legături *bilaterale*.

Experiența arată că legătura prin reazem se opune la pătrunderea solidului (C) în (C'), prin suprafața de contact (S), sau la desprinderea solidului (C) de suprafața (S) (la legăturile unilaterale această desprindere este posibilă). Legătura se mai opune, prin frecare, la toate formele posibile de deplasare, fără ca prin aceasta să reducă numărul gradelor de libertate, deoarece forțele de frecare nu pot depăși anumite limite.

În acest fel, apar frecările la : *alunecare*, *pivotare* și *rostogolire*, care vor fi analizate în cadrul legăturilor cu frecare (v. §§ 78—82).

Dacă se face abstracție de frecări, contactul poate fi redus la un singur punct, în care caz legătura se numește *reazem simplu* (fig. 194).

5° În afară de cele patru tipuri de legături, solidul mai poate avea și legături prin fire. Un punct oarecare al solidului este legat prin fire și este obligat să se deplaseze în funcție de aceste legături. Forțele de legătură care sînt aplicate punctului sînt, în același timp, aplicate și solidului. În consecință, această legătură, analizată la statica punctului material, nu aduce nimic deosebit în legăturile solidului.

§ 73. Articulația sferică

a. Solidul (C) este articulat în punctul fix O al solidului (C'). Prin această legătură solidul pierde trei grade de libertate.

Pentru a cunoaște caracteristicile forțelor de legătură se presupune că solidul (C) este acționat de un sistem oarecare de n forțe cunoscute. Notînd cu $\bar{F}_i$ una din forțele sistemului și cu $\bar{r}_i$ vectorul de poziție al unui punct oarecare al suportului ei și reducînd sistemul de forțe în raport cu punctul fix O, se găsește torsorul de componente :

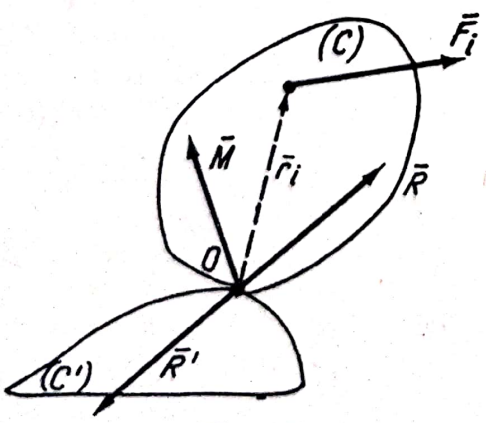


Fig. 189

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i, \qquad \bar{M} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i. \qquad (7.1)$$

Tendința forței $\bar{R}$, de a desprinde solidul din articulație, este anihilată de forța de legătură, notată cu $\bar{R}'$ (fig. 189). Deci, în orice moment :

$$\bar{R} + \bar{R}' = 0. \qquad (7.2)$$

Tendința cuplului de moment $\bar{M}$ este să imprime solidului, în repaus, o rotație în raport cu punctul fix O.

Deoarece s-a neglijat frecarea din articulație, legătura nu se opune acțiunii cuplului de forțe.

Deci : *legătura prin articulație sferică, redusă la un punct, se poate înlocui printr-o forță* $\bar{R}'$, *avînd doar punctul de aplicație cunoscut, iar direcția, sensul și modulul necunoscute.*

Caracteristicile necunoscute ale forței de legătură pot fi determinate din ecuația (7.2) sau din ecuațiile scalare (7.3), deduse prin proiectarea forțelor pe axele triedrului $Oxyz$:

$$X + X' = 0, \quad Y + Y' = 0, \quad Z + Z' = 0, \quad (7.3)$$

unde X, Y, Z reprezintă suma valorilor proiecțiilor forțelor date pe cele trei axe, iar X', Y', Z', valorile proiecțiilor forței de legătură necunoscută, pe aceleași axe.

Condiția vectorială necesară și suficientă ca solidul (C) avînd o legătură prin articulație sferică cu (C') să rămînă în repaus sub acțiunea forțelor date și de legătură este :

$$\bar{M} = 0, \quad (7.4)$$

iar condițiile scalare echivalente sînt :

$$M_x = 0, \; M_y = 0, \; M_z = 0, \quad (7.5)$$

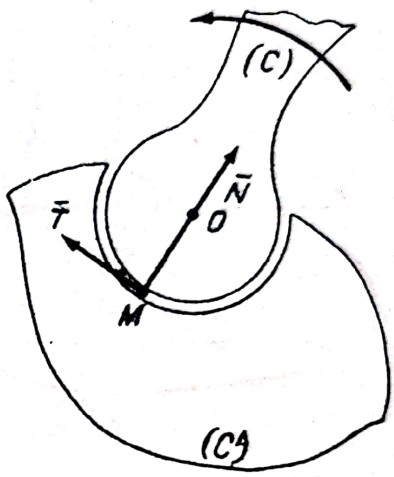


Fig. 190

adică suma momentelor forțelor date în raport cu O, respectiv și în raport cu fiecare din axele Ox, Oy și Oz, să fie nulă.

Deoarece momentele forței $\bar{R}'$, care trece prin O, sînt nule în raport cu toate axele care trec prin O, în ecuațiile (7.4) și (7.5) nu intervine forța $\bar{R}'$, ci numai forțele date și unghiurile lor cu axele triedrului. Aceste unghiuri depind de trei parametri, care determină poziția solidului C, în raport cu triedrul $Oxyz$.

În consecință, ecuațiile (7.5) servesc la :

1° determinarea celor trei parametri de poziție, astfel încît solidul, așezat în poziția determinată, să rămînă în repaus sub acțiunea forțelor date și a legăturilor ;

2° dacă parametrii de poziție sînt cunoscuți, ecuațiile reprezintă tot atîtea condiții pe care trebuie să le satisfacă forțele date.

b. *Observație.* Revenind la articulația sferică concretă (fig. 190), se poate presupune că legătura dintre (C) și (C') se face în toate punctele de contact M, de pe suprafața sferică.

În fiecare punct M apar cele două componente ale reacțiunii : una $\bar{N}$, normală pe suprafața sferică, și cealaltă $\bar{T}$, datorită frecării, tangentă la suprafață. Dacă se face abstracție de frecare, rămîn numai reacțiunile normale, care toate trec prin același punct O, prin care trece și rezultanta lor $\bar{R}'$. De aceea, legătura fără frecare se poate numi legătură *normală*, iar $\bar{R}'$, forță de legătură (reacțiune) normală.

Scanned with OKEN Scanner

§ 74. Articulaţia cilindrică

a. S-a arătat la § 72 că o articulaţie cilindrică poate fi asimilată teoretic, dacă se neglijează frecarea, cu două articulaţii sferice, în două puncte fixe O_1 şi O_2 (fig. 191). Sistemul de forţe date se reduce în unul din punctele fixe, de exemplu O_1, la torsorul de componente $\bar{R}$ şi $\bar{M}$.

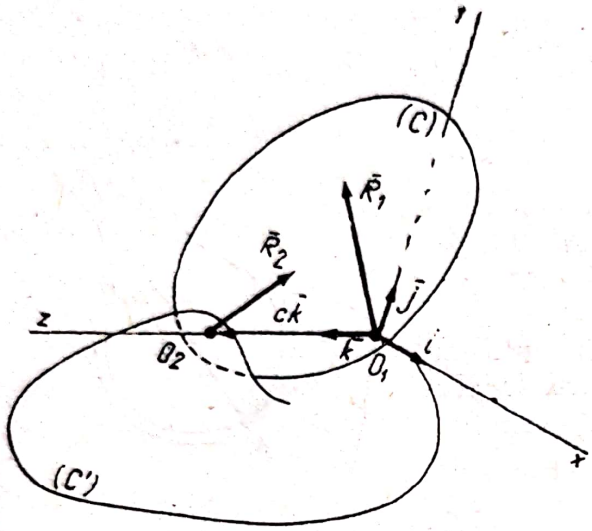


Fig. 191

Tendinţa forţei $\bar{R}$ este de a desprinde solidul din legătură. Acţiunea forţei $\bar{R}$ este totdeauna anihilată de legătură, respectiv de cele două reacţiuni $\bar{R}_1$ şi $\bar{R}_2$ din O_1 şi O_2, deci:

$$\bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R} = 0. \qquad (7.6)$$

Cuplul de moment $\bar{M}$ tinde să rotească solidul (C) în raport cu punctul O_1. Dacă se neglijează momentele antagoniste ale forţelor de frecare, condiţia ca solidul (C) să nu se rotească este:

$$\overline{O_1O_2} \times \bar{R}_2 + \bar{M} = 0. \qquad (7.7)$$

Condiţiile vectoriale de echilibru (7.6) şi (7.7) se pot exprima prin şase ecuaţii scalare deduse din proiectarea vectorilor pe cele trei axe ale triedrului O_1xyz. Se alege ca axă O_1z, axa O_1O_2 a articulaţiei cilindrice, iar celelalte axe astfel încît să formeze cu O_1z un triedru tridreptunghic.

Se notează cu:

$$\begin{aligned}
\bar{R}_1 &= X_1\bar{i} + Y_1\bar{j} + Z_1\bar{k},\\
\bar{R}_2 &= X_2\bar{i} + Y_2\bar{j} + Z_2\bar{k},\\
\bar{R} &= X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k},\\
\overline{O_1O_2} &= c\bar{k},\\
\bar{M} &= M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k},
\end{aligned} \qquad (7.8)$$

iar ecuaţiile scalare de echilibru sînt:

$$\begin{aligned}
&X_1 + X_2 + X = 0, \quad && Y_1 + Y_2 + Y = 0, \quad && Z_1 + Z_2 + Z = 0, \qquad (7.9)\\
&M_x - cY_2 = 0, && M_y + cX_2 = 0, && M_z = 0.
\end{aligned}$$

Necunoscutele X_1, Y_1 şi Y_2, X_2 se pot calcula:

$$X_1 = -X + \frac{M_y}{c}, \qquad Y_1 = -Y - \frac{M_x}{c}, \qquad (7.10)$$

$$X_2 = -\frac{M_y}{c}, \qquad Y_2 = \frac{M_x}{c}.$$

Pentru necunoscutele Z_1 şi Z_2 nu există decît o singură ecuaţie, cea de-a treia din (7.9). Condiţia ca suma momentelor în raport cu axa Oz să fie nulă nu poate conţine reacţiunile necunoscute, deoarece momentele lor sînt nule în raport cu această axă.

Deoarece lipseşte o singură ecuaţie[1] pentru determinarea necunoscutelor Z_1 şi Z_2, sistemul este *simplu static nedeterminat.*

[1] Ecuaţia suplimentară necesară se poate obţine printr-o condiţie de echilibru elastic în rezistenţa materialelor.

b. *Observații.* 1° Se poate aplica și aici regula de la § 70; astfel m, numărul necunoscutelor scalare ale forțelor de legătură, este 6, p, numărul gradelor de libertate rămase solidului, este 1. În adevăr, fiecare punct fix ar răpi solidului cîte trei grade de libertate, însă cele două puncte, fiind la distanță invariabilă între ele, amîndouă nu răpesc solidului decît cinci grade de libertate, astfel că solidul este un *mecanism*, cu un singur grad de libertate.

Cum n, numărul ecuațiilor scalare de echilibru, este 6 și:

$$m + p > n,$$

$$m + p - n = 1,$$

sistemul este un mecanism simplu static nedeterminat.

2° Ultima ecuație din (7.9) servește la calcularea parametrului poziției în care trebuie așezat solidul (C), pentru ca toate forțele, date și de legătură, să se echilibreze.

3° Dacă poziția de echilibru este cunoscută, această ecuație reprezintă o condiție *numai pentru forțele date* pentru ca solidul să rămînă în repaus în poziția dată.

§ 75. Încastrarea

a. Legătura care nu permite solidului (C) nici un fel de deplasare față de (C') a fost numită încastrare. Se precizează că legătura este *unică*, deoarece suprimarea celor șase grade de libertate ale unui solid se poate realiza și cu ajutorul a mai multor legături simultane, de pildă, cu o articulație cilindrică și un reazem simplu.

Încastrarea a fost asimilată (§ 72) cu o legătură prin trei puncte fixe O_1, O_2, și O_3 necoliniare. Dacă încastrarea ar fi echivalentă cu trei articulații sferice necoliniare, sistemul forțelor de legătură ar fi triplu static nedeterminat. În realitate, o încastrare se face printr-un număr foarte mare de puncte situate pe suprafața de legătură a solidelor (C) și (C'). Dacă s-ar introduce în fiecare punct cîte o forță de legătură, sistemul ar avea un număr foarte mare de necunoscute. Teoretic, încastrarea este considerată în ansamblu ca legătura care suprimă toate gradele de libertate ale solidului (C) față de (C'). Dacă O este un punct al încastrării (fig. 192) și $(\bar{R}, \bar{M})$ este torsorul din acest punct al forțelor date, iar $(\bar{R}', \bar{M}')$ este torsorul forțelor de legătură în raport cu același punct, este necesar și suficient ca:

$$\bar{R} + \bar{R}' = 0 \text{ și } \bar{M} + \bar{M}' = 0. \quad (7.11)$$

Deci *o încastrare se poate înlocui printr-un torsor de componente* $\bar{R}', \bar{M}'$, *necunoscute, la care nu se cunoaște decît centrul de reducere, un punct comun fix al solidelor legate prin încastrare.*

Torsorul încastrării echilibrează orice sistem de forțe date. Din condițiile de echilibru (7.11) se deduce, în funcție de torsorul forțelor date $(\bar{R}, \bar{M})$, torsorul încastrării $(\bar{R}', \bar{M}')$.

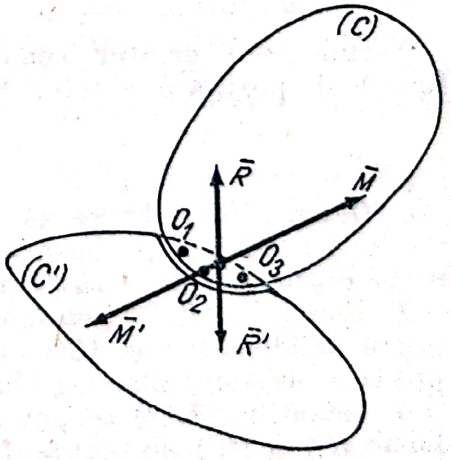


Fig. 192

În raport cu axele unui triedru $Oxyz$, necunoscutele forțelor de legătură din încastrare sînt reprezentate, în ansamblu, prin valorile X', Y', Z', M'_x, M'_y, M'_z, care pot fi determinate prin cele șase ecuații scalare de echilibru.

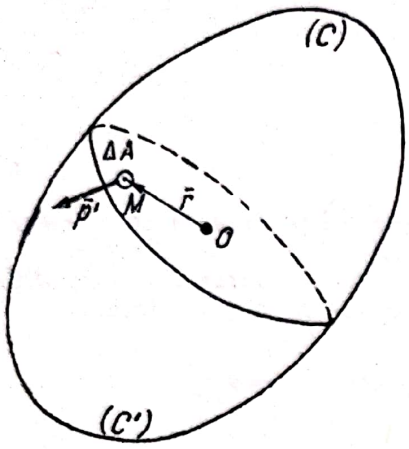


Fig. 193

b. Această determinare a torsorului reacțiunilor este datorită unei schematizări extreme, prin concentrarea proprietăților încastrării asupra punctului fix, centrul de reducere, atît al forțelor date cît și al tuturor reacțiunilor.

Un model mai apropiat de încastrarea reală se poate concepe cu două solide rigide (C) și (C') (fig. 193), sudate între ele, în toate punctele unei suprafețe plane de contact (un domeniu continuu de arie A). Se notează cu O, centrul de greutate al ariei, cu $\bar{r}$ vectorul de poziție în raport cu O al unui punct curent M al suprafeței de contact și cu $\bar{p}'$ *reacțiunea unitară* din M a solidului (C'). Dacă ΔA este o arie elementară din jurul punctului M, $\bar{p}'\Delta A$ este reacțiunea pe elementul de arie ΔA.

Dacă se reduce întreg sistemul de reacțiuni elementare în centrul O, se găsește torsorul reacțiunilor, de componente: $\Sigma\bar{p}'\Delta A$, $\Sigma\bar{r}\times\bar{p}'\Delta A$; sumele se referă la toate punctele domeniului, de arie A, a suprafeței de contact.

Dacă se trece la limită, componentele devin: $\int_{(A)}\bar{p}'\mathrm{d}A$, $\int_{(A)}\bar{r}\times\bar{p}'\mathrm{d}A$. Notate prin $\bar{R}'$, respectiv $\bar{M}'$, ele reprezintă, în ansamblu, torsorul reacțiunilor.

Condițiile de echilibru (7.11) devin în acest caz:

$$\bar{R}+\int_{(A)}\bar{p}'\mathrm{d}A=0,$$

$$\bar{M}+\int_{(A)}\bar{r}\times\bar{p}'\mathrm{d}A=0. \tag{7.12}$$

Necunoscuta acestor ecuații este reacțiunea unitară $\bar{p}'$ care variază în funcție de poziția punctului M și de orientarea suprafeței de contact, adică:

$$\bar{p}'=\bar{p}'(\bar{r}).$$

c. *Observații.* 1° Legea de distribuție a reacțiunilor unitare nu se poate stabili teoretic, ci pe baza unor ipoteze deduse din încercările care se fac în laboratoarele de rezistența materialelor, organe de mașini etc.

2° Ecuațiile (7.12) pot fi utile și în rezistența materialelor, dacă se consideră solidele (C) și (C') ca două părți ale unui același solid, separate printr-o secțiune plană închipuită în solid.

3° Ecuațiile (7.12) se pot extinde și pentru cazul contactului dintre solidele (C) și (C') pe o suprafață curbă oarecare, de exemplu, sferică, cilindrică, conică etc., ținînd seama de orientarea elementelor de suprafață.

Scanned with OKEN Scanner

§ 76. Reazemul simplu

a. S-a arătat la § 72 că legătura prin reazem a unui solid (C) cu un solid fix (C') se poate reduce teoretic la reazemul într-un singur punct de contact O (fig. 194), punctul de tangenţă al suprafeţelor solidelor (C) şi (C').

Această schematizare se bazează pe neglijarea frecărilor şi pe ipoteza rigidităţii solidelor. Studiul reacţiunilor într-un reazem simplu se va face presupunînd că legătura este bilaterală. În acest scop se reduce sistemul forţelor date, aplicat solidului (C), la torsorul din O de componente $\bar{R}$, $\bar{M}$. Se descompune fiecare din cele două componente în cîte alte două componente, după normala comună On la suprafeţele celor două solide şi după planul tangent în O la aceleaşi suprafeţe, adică :

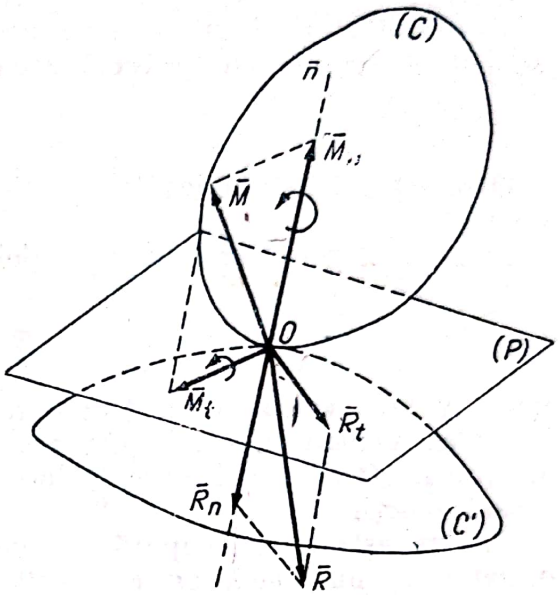


Fig. 194

$$\bar{R} = \bar{R}_n + \bar{R}_t, \quad \bar{M} = \bar{M}_n + \bar{M}_t. \tag{7.13}$$

b. Analizînd tendinţele forţelor $\bar{R}_n$, $\bar{R}_t$ şi ale cuplurilor de momente $\bar{M}_n$ şi $\bar{M}_t$, se constată următoarele :

1° *Forţa* $\bar{R}_n$ tinde să deplaseze solidul (C) după On prin suprimarea reazemului din O. Legătura se opune şi anihilează totdeauna acţiunea componentei $\bar{R}_n$ prin reacţiunea $\bar{N}$, direct opusă, deci avînd direcţia normalei comune din punctul de reazem la suprafeţele celor două solide.

2° *Forţa* $\bar{R}_t$ tinde să deplaseze solidul (C) prin alunecarea lui pe suprafaţa solidului (C'). Dacă se neglijează frecarea, legătura nu se opune acţiunii componentei $\bar{R}_t$.

3° *Cuplul de moment* $\bar{M}_n$, tinde să rotească solidul (C) în jurul normalei comune la suprafeţele solidelor în punctul de contact. Dacă axa de rotaţie rămîne fixă, mişcarea poartă numele de *pivotare*. Experienţa dovedeşte că, deoarece (C) se reazemă pe o suprafaţă de contact aspră, apare un *cuplu de frecare de pivotare*, care se opune acţiunii cuplului de moment $\bar{M}_n$. Dacă se neglijează frecarea, se presupune că reazemul simplu nu se opune acţiunii acestui cuplu.

4° *Cuplul de moment* $\bar{M}_t$, aplicat solidului (C) care are cu solidul (C') o legătură bilaterală de reazem, tinde să *rostogolească* solidul (C) pe suprafaţa solidului (C').

Practica arată că şi în cazul rostogolirii apare un *cuplu de frecare la rostogolire*, care se opune tendinţei cuplului de moment $\bar{M}_t$.

Dacă se neglijează frecarea, se presupune că reazemul simplu nu se opune nici la această acţiune.

c. **În concluzie,** legătura unui solid (C) care are un reazem simplu cu solidul (C'), dacă se neglijează frecările, se poate înlocui printr-o forţă de

legătură (reacțiune) $\bar{N}$, aplicată solidului (C) și care are următoarele caracteristici:

— punctul de aplicație în punctul de contact al suprafețelor celor două solide;

— direcția după normala comună în punctul de contact la cele două suprafețe;

— sensul și modulul necunoscute, în funcție de componenta $\bar{R}_n$ și care se pot determina cu ajutorul ecuației de echilibru:

$$\bar{R}_n + \bar{N} = 0. \tag{7.14}$$

Observații. 1° Dacă legătura este unilaterală, se cunoaște și sensul forței de legătură.

2° Dacă $\bar{n}$ este versorul normalei comune din O, expresia reacțiunii se poate scrie:

$$\bar{N} = N\bar{n},$$

unde N este valoarea reacțiunii în raport cu axa On (fig. 194).

Astfel, pentru determinarea reacțiunii este suficientă o singură ecuație algebrică. O dată valoarea N determinată, se cunoaște atît modulul cît și sensul reacțiunii $\bar{N}$.

3° Cunoașterea anticipată a sensului reacțiunii $\bar{N}$, în cazul reazemelor unilaterale, nu joacă alt rol decît de verificare.

§ 77. Legăturile normale în plan

În tehnică se întîlnesc exemple de solide cu forme particulare și acționate în așa fel încît ceea ce se petrece într-o secțiune plană (P) se petrece întocmai în toate secțiunile plane paralele cu (P). Mai sînt și cazuri cînd solidul se aseamănă cu o placă plană care nu se poate deplasa decît în propriul ei plan, în care se găsesc și forțele aplicate solidului.

În asemenea cazuri și problema legăturilor se poate simplifica:

a. Cele două tipuri de articulații, sferică și cilindrică, se contopesc într-una singură denumită simplu *articulație*. Astfel, placa plană (C) are *o articulație fixă* în punctul O al plăcii fixe (C') (fig. 195). Se poate suprima legătura, înlocuind-o printr-o forță $\bar{R}'$, la care nu este cunoscut decît punctul de aplicație O. În raport cu un sistem de referință Oxy, expresia complexă a forței de legătură:

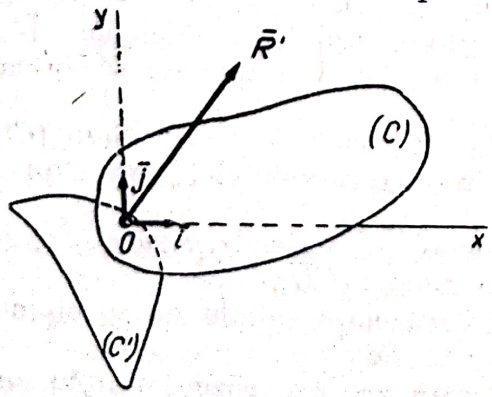


Fig. 195

$$\bar{R}' = X'\bar{i} + Y'\bar{j}$$

scoate în evidență cele două necunoscute X', Y', de care depinde reacțiunea dintr-o articulație plană.

Se observă că placa plană (C) se mai bucură de un singur grad de libertate, posibilitatea de a se roti, în plan, în jurul punctului fix al articulației.

În plan, condițiile de echilibru pentru sistemul de forțe date și de legătură aplicat plăcii (C), pentru ca ea să rămînă în rapaus, se exprimă prin ecuațiile scalare:

$$\left.\begin{aligned} X + X' &= 0 \\ Y + Y' &= 0 \\ M_o &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.15)$$

Deoarece reacțiunea $\bar{R}'$ trece prin O, în ecuația de momente, în raport cu O, nu apar necunoscutele X' și Y'. Această ecuație reprezintă o condiție fie pentru celelalte forțe, fie pentru parametrul care determină poziția de echilibru a plăcii (C).

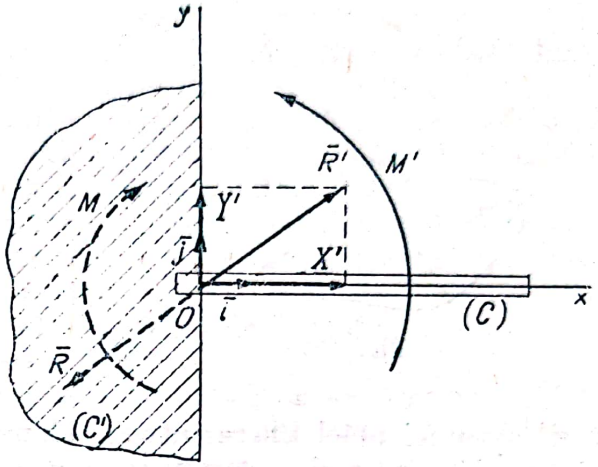


Fig. 196

b. *Încastrarea în plan.* Încastrarea în plan, la fel ca cea din spațiu, împiedică orice deplasare a solidului (C) față de solidul (C'), de care este legat (fig. 196).

Dacă $(\bar{R}, \bar{M})$ este torsorul forțelor date în raport cu un punct O al încastrării, oricare ar fi forțele din plan și oricum ar acționa, ele sînt totdeauna echilibrate de forțele de legătură. Deci, torsorului forțelor date i se opune torsorul forțelor de legătură $(\bar{R}', \bar{M}')$. Condițiile de echilibru sînt ecuațiile vectoriale (7.11).

Se observă că, deoarece toate forțele date sînt situate în același plan, torsorul lor este formal, adică $\bar{M}$ este perpendicular pe $\bar{R}$. Evident, și torsorul $(\bar{R}', \bar{M}')$ este formal.

Pentru calcularea torsorului $(\bar{R}', \bar{M}')$ se alege un sistem de axe rectangulare Oxy în planul încastrării și se notează:

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j}, \qquad \bar{R}' = X'\bar{i} + Y'\bar{j},$$
$$\bar{M} = M\bar{k}, \qquad \bar{M}' = M'\bar{k},$$

obținîndu-se din ecuațiile (7.11) următoarele ecuații scalare:

$$X + X' = 0, \quad Y + Y' = 0, \quad M + M' = 0. \qquad (7.16)$$

Observație. De obicei se presupun necunoscutele X', Y' și M', pozitive. În figura 196, atît X', Y' cît și M', reprezentat printr-o săgeată curbă, corespund orientării presupuse. Dacă din calcule vor rezulta alte semne, se va modifica în consecință orientarea vectorilor $\bar{R}'$ și $\bar{M}'$.

c. *Reazemul simplu.* În plan, o placă (C) se reazemă pe o placă (C'). Reazemul se numeşte simplu dacă curbele care limitează cele două plăci sînt tangente între ele, într-un punct O (fig. 197).

Punctul O nu este un punct fix pe nici una din curbe. Placa (C) nu pierde, prin această legătură, decît un singur grad de libertate, din cele

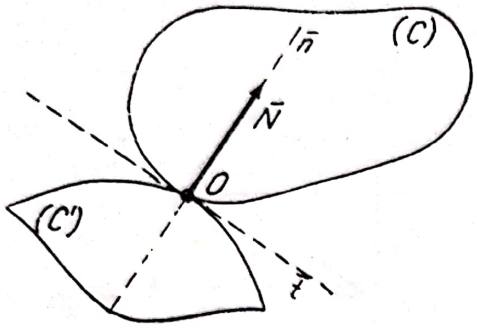


Fig. 197

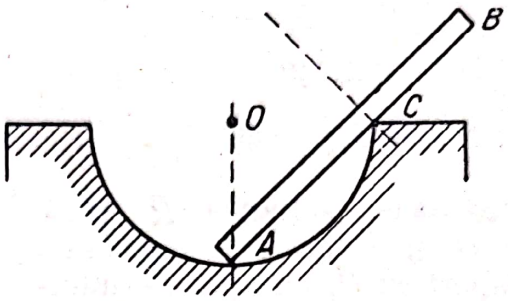


Fig. 198

trei, ale unei plăci libere într-un plan fix. Deplasările permise de legătură sînt: *alunecarea* şi *rostogolirea* plăcii (C) pe curba de contur a plăcii fixe (C'). Atît timp cît frecările sînt neglijabile, reacţiunea legăturii se reduce la o forţă $\bar{N}$ cu următoarele caracteristici:

— punctul de aplicaţie în punctul de tangenţă O;
— direcţia după normala comună, în O, la cele două curbe;
— sensul şi modulul necunoscute.

În rest, se repetă concluziile şi observaţiile de la reazemul simplu în spaţiu.

În privinţa construcţiei normalei comune în punctul O de contact al celor două plăci plane, evident, dacă ambele curbe de contur nu au singularităţi, normala comună se poate construi fără greşeală. Se ivesc însă situaţii, cum sînt cele din figura 198, în care nu se poate construi normala la ambele curbe. Astfel, bara AB se reazemă cu un vîrf A pe o placă fixă avînd un contur circular şi cu muchia AB într-un vîrf C al plăcii. În asemenea cazuri, în baza principiului egalităţii acţiunii şi reacţiunii, se consideră ca normală comună normala la curba care în punctul de contact nu prezintă singularitate. Astfel, normala comună în A este dirijată după direcţia razei OA, iar în C perpendiculara pe muchia AB.

B. LEGĂTURILE CU FRECARE

§ 78. Modificarea ipotezelor

a. Studiul legăturilor unui solid s-a început prin analiza unor exemple concrete luate din practică. S-au scos în evidenţă unele caracteristici comune, ceea ce a permis gruparea celor mai des întîlnite legături. Cele trei grupe cuprind: articulaţii, încastrări şi reazeme.

Legăturile concrete fiind complexe, pentru simplificarea studiului s-a presupus că: *solidele sînt rigide, frecările sînt neglijabile*, şi în consecinţă *contactul a două suprafeţe se poate reduce la un punct.*

Evident, toate aceste ipoteze au dus la schematizarea legăturilor. S-au numit legăturile fără frecare ca şi forţele respective: *legături şi forţe de legătură normale.*

În acest fel s-au determinat unele caracteristici ale forţelor de legătură normale.

Rezultatele obţinute, prin admiterea acestor ipoteze, nu reprezintă legăturile concrete decît într-o *primă şi insuficientă aproximaţie.*

Observarea atentă a legăturilor dintre solide arată că: *solidele care se interacţionează prin contact se deformează, suprafaţa de contact rezultată din deformaţii este neregulată, contactul este cu frecare* etc.

Pentru ca studiul teoretic al legăturilor solidelor să cuprindă din ce în ce mai bine fenomenul concret este necesar să se modifice treptat ipotezele iniţiale în funcţie de rezultatele experienţelor.

De pildă, se poate începe studiul cu următoarele ipoteze:

1° *solidele în contact suferă deformaţii mici*;

2° *suprafaţa comună de contact este plană, limitată de un cerc de rază* r;

3° *distribuţia forţelor de legătură normale pe suprafaţa de contact este uniformă;*

4° *frecarea este izotropă, adică coeficientul de frecare la alunecare* (μ) *este acelaşi, oricare ar fi direcţia de alunecare etc.*

Într-o etapă următoare, după confruntarea teoriei cu experienţa, se pot face alte ipoteze, cum sînt:

5° *suprafaţa comună de contact este cilindrică sau sferică;*

6° *distribuţia forţelor de legătură normale pe suprafaţa de contact se face după o lege anumită;*

7° *frecarea nu este izotropă, adică coeficientul de frecare variază după o lege care traduce cît mai fidel fenomenul real.*

b. În cele ce urmează se dă modul de calcul al reacţiunilor în cazul unui solid (C), acţionat de un sistem oarecare de forţe, rezemat pe un solid (C').

Contactul se face pe o suprafaţă plană (S), de arie A. Forţele date, aplicate solidului (C), se reduc în O, centrul de greutate al ariei suprafeţei de contact, la un torsor ($\bar{R}$, $\bar{M}$).

La fel ca în cazul reazemului simplu (§ 76), se descompune torsorul din O în componente după normala comună On şi planul (S):

$$\bar{R} = \bar{R}_n + \bar{R}_t, \qquad \bar{M} = \bar{M}_n + \bar{M}_t.$$

Tendinţele forţelor $\bar{R}_n$, $\bar{R}_t$ şi ale cuplurilor de momente $\bar{M}_n$ şi $\bar{M}_t$ au fost analizate în § 76, *b*.

Pentru calculul forţelor de legătură (reacţiunilor) în punctele suprafeţei de contact se notează cu:

$\bar{p}'$ — *reacţiunea unitară* a solidului (C') în jurul punctului curent M (fig. 199);

$\bar{r}$ — vectorul de poziţie al punctului M în raport cu reperul cu originea în O;

$\bar{n}'$ şi $\bar{t}'$ — componentele reacţiunii unitare $\bar{p}'$, prima după normala la planul (S) şi cea de-a doua din planul (S):

$$\bar{p}' = \bar{n}' + \bar{t}', \tag{7.17}$$

componenta tangenţială $\bar{t}'$ fiind datorită frecării.

Calculînd torsorul reacţiunilor elementare în raport cu centrul O, se găsesc:

$$\int_{(A)} \bar{p}'\,dA = \bar{R}' \quad \text{şi} \quad \int_{(A)} \bar{r} \times \bar{p}'\,dA = \bar{M}', \tag{7.18}$$

cele două componente ale torsorului care, ţinînd seama de (7.17), se descompun în cîte alte două componente, după normală şi din planul (S):

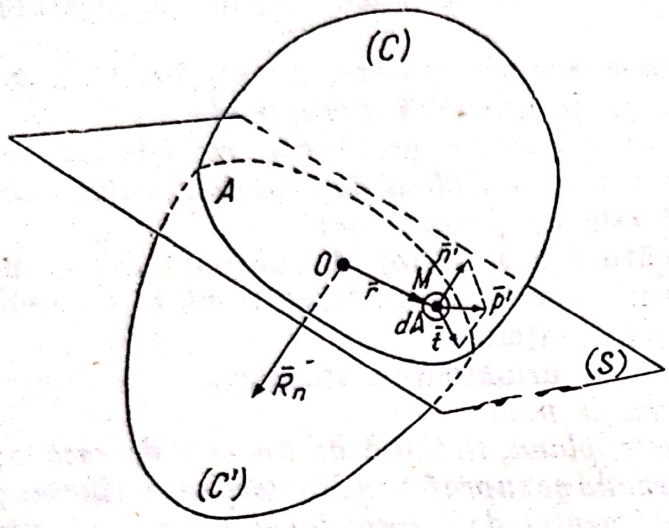


Fig. 199

$$\int_{(A)} \bar{n}'\,dA, \quad \int_{(A)} \bar{t}'\,dA \qquad \text{(pentru } \bar{R}'\text{)},$$

$$\int_{(A)} \bar{r} \times \bar{t}'\,dA, \int_{(A)} \bar{r} \times \bar{n}'\,dA \qquad \text{(pentru } \bar{M}'\text{)}.$$

Condiţiile necesare şi suficiente pentru echilibru:

$$\bar{R}' + \bar{R} = 0 \quad \text{şi}$$

$$\bar{M}' + \bar{M} = 0,$$

sînt echivalente cu condiţiile (7.19):

$$\int_{(A)} \bar{n}'\,dA + \bar{R}_n = 0, \qquad \int_{(A)} \bar{t}'\,dA + \bar{R}_t = 0,$$

$$\int_{(A)} \bar{r} \times \bar{t}'\,dA + \bar{M}_n = 0, \qquad \int_{(A)} \bar{r} \times \bar{n}'\,dA + \bar{M}_t = 0. \tag{7.19}$$

În continuare, rezolvarea problemei, adică determinarea reacţiunilor, depinde de ipotezele privind repartiţia reacţiunilor unitare $\bar{n}'$ şi $\bar{t}'$ în funcţie de $\bar{r}$.

O analiză a ipotezelor simple de calcul se face în cazul particular următor:

c. Sistemul de forţe aplicat solidului (C) se reduce în O numai la forţa $\bar{R}_n$. Deoarece solidul rămîne în repaus sub acţiunea forţelor date $(\bar{R}_n)$ şi a celor de legătură, condiţiile de echilibru deduse din (7.19) sînt:

$$\int_{(A)} \bar{n}'\,dA + \bar{R}_n = 0, \qquad \int_{(A)} \bar{t}'\,dA = 0,$$

$$\int_{(A)} \bar{r} \times \bar{t}'\,dA = 0, \qquad \int_{(A)} \bar{r} \times \bar{n}'\,dA = 0. \tag{7.20}$$

Cum nu există tendinţa de alunecare a solidului (C) pe (S), nu apar forţe de frecare, deci $\bar{t}' = 0$.

În consecinţă, nu rămîn decît prima şi ultima ecuaţie din (7.20). Oricare ar fi ipoteza asupra distribuţiei lui $\bar{n}'$, aceste ecuaţii trebuie să fie satisfăcute.

Scanned with OKEN Scanner

Din multiplele ipoteze, pentru care ecuațiile sînt satisfăcute, se poate alege, de pildă, cea mai simplă, aceea a distribuției uniforme ($\bar{n}' = \bar{c}$). Continuînd calculele, în baza ei se găsește:

$$\bar{N} = \int_{(A)} \bar{n}' dA = \bar{n}' \int_{(A)} dA = \bar{n}' A = -\bar{R}_n, \tag{7.21}$$

unde s-a notat cu $\bar{N}$ reacțiunea totală normală pe (S).

Pentru a afla punctul ei de aplicație O', adică vectorul de poziție $\bar{r}_0$ al acestui punct, în raport cu O, se aplică teorema momentelor în raport cu O:

$$\bar{r}_0 \times \bar{N} = \int_{(A)} \bar{r} \times \bar{n}' dA = 0, \tag{7.22}$$

de unde:

$$\bar{r}_0 = 0,$$

deoarece $\bar{N}$ nu poate fi coliniar cu $\bar{r}_0$.

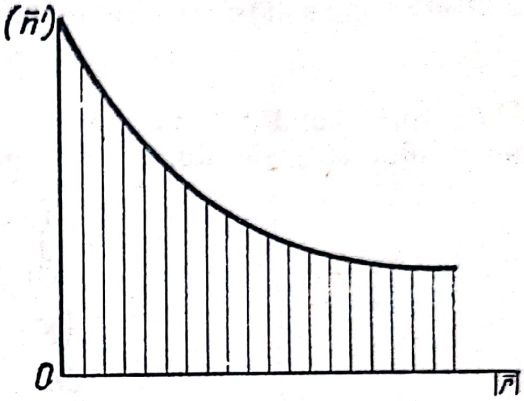


Fig. 200

Deci și în ipoteza distribuției uniforme a reacțiunilor unitare normale, rezultanta lor este direct opusă acțiunii $\bar{R}_n$, adică, în acest exemplu, din punctul de vedere al calculului reacțiunii normale $\bar{N}$, lucrările se petrec *ca și cum* contactul dintre cele două solide *s-ar* face într-un singur punct O.

Faptul că ipoteza a permis stabilirea unui rezultat logic nu înseamnă că ea este și verificată de practică. Ca dovadă, în tehnică, unde se întîlnesc des legături prin reazem pe o suprafață plană de contact, se folosesc diferite ipoteze, toate deduse din experiență. Astfel, diagrama din figura 200 dă variația reacțiunii unitare normale $\bar{n}'$ pentru un pivot care se reazemă pe suprafața plană, mărginită de un cerc de rază r, a crapodinei.

Și această ipoteză, ca și aceea a distribuției uniforme, confirmă rezultatul teoretic ($\bar{r}_0 = 0$), adică faptul că, *pentru calculul reacțiunii normale*, se poate presupune contactul solidelor, într-un singur punct.

§ 79. Frecarea de alunecare

a. Se consideră un alt caz particular al exemplului tratat în § 78, *b*: solidul (C), rezemat pe solidul (C'), pe suprafața plană (S), de arie A, este acționat de un sistem de forțe care se reduce în O la forța $\bar{R}$ cu o direcție oarecare (fig. 201).

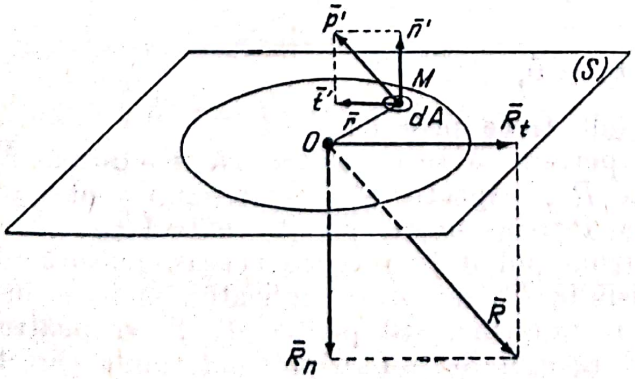


Fig. 201

Se notează cu $\bar{R}_n$ componenta normală pe planul (S), cu $\bar{R}_t$ componenta din plan a forței $\bar{R}$; $\bar{n}'$ și $\bar{t}'$ au aceleași semnificații ca în exemplul din § 78.

Componenta $\bar{R}_n$ este echilibrată de reacțiunea normală:

$$\bar{N} = \int_{(A)} \bar{n}' dA = -\bar{R}_n.$$

Componenta $\bar{R}_t$ tinde să producă alunecarea solidului (C) pe suprafaţa de contact(S), care se opune prin forţa de frecare:

$$\int_{(A)} \bar{t}' \mathrm{d}A = \bar{T}.$$

Pentru ca solidul (C) să nu alunece este necesar ca:

$$\bar{T} + \bar{R}_t = 0.$$

În fine, condiţiile necesare şi suficiente pentru ca solidul (C) rezemat pe solidul (C') să rămînă în repaus se completează cu ecuaţiile:

$$\int_{(A)} \bar{r} \times \bar{n}' \mathrm{d}A = 0.$$

$$\int_{(A)} \bar{r} \times \bar{t}' \mathrm{d}A = 0. \tag{7.23}$$

La ecuaţiile precedente se adaugă inecuaţia:

$$| \bar{t}' | \leqslant \mu | \bar{n}' |, \tag{7.24}$$

unde μ este coeficientul de frecare la alunecare în punctul curent M.

b. În ipoteza distribuţiei uniforme $(\bar{n}' = \bar{c})$ şi a frecării izotrope, constantă pe orice direcţie în planul (S), presupunînd că forţele de frecare sînt toate paralele cu direcţia forţei $\bar{R}_t$, calculele dau următoarele rezultate:

$$| \bar{N} | = | \bar{n}' | A = | \bar{R}_n |, \qquad | \bar{T} | \leqslant \mu | \bar{N} |, \tag{7.25}$$

$$\int_{(A)} \bar{r} \times \bar{n}' \mathrm{d}A = \bar{r}_0 \times \bar{N} = 0, \quad \bar{r}_0 = 0, \tag{7.26}$$

$$\int_{(A)} \bar{r} \times \bar{t} \mathrm{d}A = \bar{r}_1 \times \bar{T} = 0, \tag{7.27}$$

unde $\bar{r}_0$ şi $\bar{r}_1$ determină, în raport cu reperul cu centrul în O, poziţiile punctelor de aplicaţie ale forţelor $\bar{N}$ şi $\bar{T}$.

Din (7.27) rezultă fie că:

$$\bar{r}_1 = 0,$$

fie că suportul reacţiunii tangenţiale trece prin O.

În general, ipotezele teoretice permit să se considere că reacţiunile $\bar{N}$ şi $\bar{T}$ sînt direct opuse forţelor date $\bar{R}_n$, respectiv $\bar{R}_t$, ca şi cum contactul dintre solidele (C) şi (C') s-ar face într-un singur punct, centrul O.

c. Evident, în aplicaţii, concluziile pot fi folosite în aceeaşi măsură în care şi ipotezele făcute sînt admisibile. În mecanica aplicată, unde se întîlnesc, în mod curent, distribuţii neuniforme, atît pentru $\bar{n}'$ cît şi pentru μ, fenomenul este complex, iar reacţiunile nu se pot determina corect decît în funcţie de ipoteze cît mai apropiate de realitate.

Scanned with OKEN Scanner

§ 80. Frecarea de pivotare

Solidul (C) este rezemat de solidul (C') pe suprafaţa (S) de contact. Torsorul forţelor date, aplicate solidului, se reduce, în centrul de greutate O al ariei suprafeţei de contact, la rezultanta $\bar{R}_n$ şi la cuplul de moment $\bar{M}_n$.

Tendinţa acestui torsor este să imprime solidului (C) o mişcare de pivotare. Deoarece suprafaţa de contact este aspră, acestei tendinţe i se opune frecarea de pivotare prin cuplul de moment $\bar{M}_p$.

Pentru simplificare, se presupune că rezemarea se face pe aria unui cerc de rază r_1 (fig. 202).

Se descompune reacţiunea unitară $\bar{p}'$, dintr-un punct oarecare M în componentele $\bar{n}'$ şi $\bar{\imath}'$, ca la § 79, cu deosebirea că direcţia componentei $\bar{\imath}'$ este perpendiculară pe raza OM. Sensul componentei $\bar{\imath}'$ este opus sensului după care cuplul de moment $\bar{M}_n$ tinde să rotească solidul (C).

Calculînd torsorul din O al reacţiunilor elementare $\bar{p}'dA$, se găseşte:

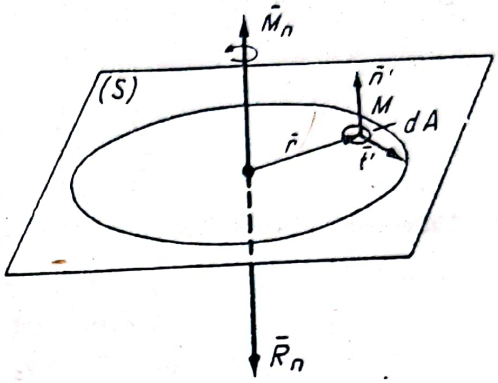


Fig. 202

$$\bar{R}' = \int_{(A)} \bar{p}'\,dA = \int_{(A)} \bar{n}'\,dA + \int_{(A)} \bar{\imath}'\,dA = \bar{N} + \bar{T}, \tag{7.28}$$

$$\bar{M}' = \int_{(A)} \bar{r} \times \bar{p}'\,dA = \int_{(A)} \bar{r} \times \bar{n}'\,dA + \int_{(A)} \bar{r} \times \bar{\imath}'\,dA = \bar{M}_r + \bar{M}_p, \tag{7.29}$$

unde $\bar{M}_r$ şi $\bar{M}_p$ sînt componentele momentului rezultant al reacţiunilor după planul (S) şi după normala din O pe (S).

Condiţiile de echilibru sînt:

$$\bar{N} + \bar{R}_n = 0 \qquad \bar{T} = 0 \tag{7.30}$$

$$\bar{M}_r = 0 \qquad \bar{M}_p + \bar{M}_n = 0 \tag{7.31}$$

la care se adaugă inecuaţia: $|\bar{\imath}'| \leqslant \mu\,|\bar{n}'|$.

În continuare se pot face şi aici ipotezele de calcul $\bar{n}' = \bar{c}$, $\mu = \text{const.}$

În aceste condiţii, rezultatele exprimate prin relaţiile (7.21) şi (7.22) de la § 78 şi consecinţele lor se aplică de asemenea. Rămîne să se calculeze $\bar{T}$ şi $\bar{M}_p$. În primul rînd se exprimă versorul $\bar{u}$ al direcţiei componentei $\bar{\imath}'$:

$$\bar{u} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} \times \frac{\bar{n}'}{|\bar{n}'|}$$

apoi, pentru echilibrul la limită:

$$\bar{T} = \int_{(A)} \bar{\imath}'\,dA = \int_{(A)} \bar{u}\,\mu\,|\bar{n}'|\,dA = \int_{(A)} \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} \times \frac{\bar{n}'}{|\bar{n}'|}\,\mu\,|\bar{n}'|\,dA = -\,\mu\bar{n}' \times \int_{(A)} \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}\,dA = 0,$$

ceea ce nu reprezintă decît o verificare.

În fine:

$$\bar{M}_p = \int_{(A)} \bar{r} \times \bar{\imath}'\,dA = \int_{(A)} \bar{r} \times \bar{u}\,\mu\,|\bar{n}'|\,dA = \int_{(A)} \bar{r} \times \left(\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} \times \frac{\bar{n}'}{|\bar{n}'|}\right) \mu\,|\bar{n}'|\,dA =$$

$$= \mu \int_{(A)} \frac{\bar{r} \times (\bar{r} \times \bar{n}')}{|\bar{r}|}\,dA;$$

dar :

$$\bar{r} \times (\bar{r} \times \bar{n}') = (\bar{r}\,\bar{n}')\,\bar{r} - (\bar{r}\,\bar{r})\,\bar{n}' = 0 - r^2\,\bar{n}'$$

deci :

$$\bar{M}_p = -\mu\bar{n}' \int_{(A)} \frac{r^2}{|\bar{r}|} \mathrm{d}A = -\mu\bar{n}' \int_{(A)} |\bar{r}|\,\mathrm{d}A.$$

Integrala se poate calcula uşor în coordonate polare :

$$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$\int_{(A)} |\bar{r}|\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_{(A)} r^2 \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{r_1} r^2\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta.$$

Dacă contactul se face pe aria coroanei circulare cu raza mică r_2 şi raza mare r_1 :

$$\int_{(A)} |\bar{r}|\,\mathrm{d}A = \int_{r_2}^{r_1} r^2\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{3}(r_1^3 - r_2^3), \tag{7.32}$$

iar pentru cazul cercului de rază r_1, $(r_2 = 0)$:

$$\int_{(A)} |\bar{r}|\,\mathrm{d}A = \frac{2\pi}{3} r_1^3. \tag{7.33}$$

Astfel că, în cazul contactului pe un cerc :

$$\bar{M}_p = -\mu\bar{n}' \frac{2\pi}{3} r_1^3 = -\mu\left(-\frac{\bar{R}_n}{A}\right)\frac{2\pi}{3} r_1^3 = \frac{2}{3}\mu r_1 \bar{R}_n \tag{7.34}$$

este momentul cuplului de frecare la pivotare. Acest cuplu se opune tendinţei de pivotare a solidului (C), imprimată de cuplul de moment $\bar{M}_n$.

Problema pivotării se întîlneşte foarte des în tehnică şi este interesant de cunoscut cuplul de frecare la pivotare şi în timpul rotaţiei solidului (C).

Evident, în mişcare, coeficientul de frecare este altul.

S-a constatat că relaţia :

$$\bar{M}_p = \frac{2}{3}\,\mu\, r_1\, \bar{R}_n$$

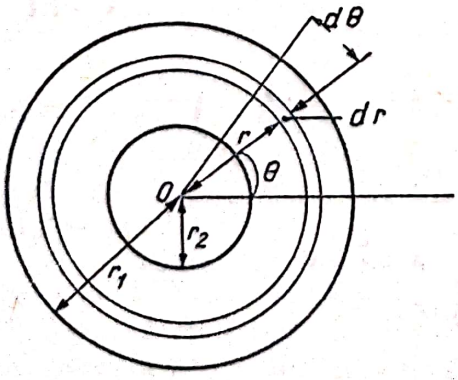


Fig. 203

nu este confirmată de practică, deoarece ipotezele simplificatoare, în special ipoteza distribuţiei uniforme, nu corespund cu realitatea.

În practică, contactul se face pe o coroană circulară, evitîndu-se contactul celor două solide pe aria cercului interior, unde $|\bar{n}'|$ variază foarte mult.

După cum se poate observa pe diagramă (fig. 200), $|\bar{n}'|$ variază destul de puţin pe coroana circulară, astfel că, în acest caz, ipoteza distribuţiei uniforme este mai apropiată de realitate.

Relaţia corespunzătoare :

$$\bar{M}_p = \frac{2}{3}\,\mu\,\frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{r_1 + r_2}\,\bar{R}_n \tag{7.35}$$

dă rezultate acceptabile în practică, pentru frecarea uscată.

§ 81. Frecarea de rostogolire

a. Se consideră un solid (C), în repaus, avînd o legătură bilaterală de reazem simplu în punctul O cu solidul (C') (fig. 194). Se presupune că forțele active aplicate solidului (C) se reduc în O la cuplul de moment $\overline{M}_t$ care tinde să rostogolească solidul (C) pe suprafața solidului (C'). Teoretic, oricît ar fi de mic $|\overline{M}_t|$, mișcarea ar trebui să se producă, însă experiența dovedește că repausul se menține atît timp cît $|\overline{M}_t|$ nu depășește o valoare limită, care depinde de condițiile experienței. Pentru ca să echilibreze acțiunea unui cuplu de forțe, legătura nu poate fi înlocuită decît tot printr-un cuplu de forțe. Or, într-un singur punct de contact nu poate acționa un cuplu. Reiese că, pentru explicarea frecării de rostogolire, reazemul nu mai poate fi considerat simplu, ci pe o suprafață (S) de contact, rezultată din deformarea solidelor (C) și (C').

În practică, fenomenul este cu mult mai complex, deoarece sistemul de forțe active aplicate solidului (C) se reduce într-un punct O al suprafeței (S) la un torsor cu toate cele patru componente: $\overline{R}_n$, $\overline{R}_t$, $\overline{M}_n$ și $\overline{M}_t$.

b. Ca un exemplu mai simplu se poate studia cazul unui solid (C) rezemat pe solidul (C') după o suprafață plană (S), mărginită de o curbă cu centrul de greutate în O și închizînd o arie A (fig. 204). Solidul este acționat de un sistem de forțe care se reduce în O la rezultanta $\overline{R}_n$ și cuplul de moment $\overline{M}_t$. Pentru o sumară analiză a ipotezelor de calcul, se poate admite că reacțiunile elementare pe suprafața de contact nu au componente tangențiale, ci numai normale, de forma $\bar{n}'dA$.

În această ipoteză, torsorul din O al reacțiunilor elementare are componentele:

$$\int_{(A)} \bar{n}'\,dA, \qquad \int_{(A)} \bar{r} \times \bar{n}'\,dA.$$

Condițiile de echilibru sînt:

$$\overline{R}_n + \int_{(A)} \bar{n}'dA = 0 \quad \text{și} \quad \overline{M}_t + \int_{(A)} \bar{r} \times \bar{n}'\,dA = 0. \tag{7.36}$$

Cum reacțiunile elementare sînt paralele, ele admit o rezultantă $\overline{N}$ aplicată într-un punct O_1 din planul (S). $\overline{N}$ și $\bar{r}_1$ sînt determinați de ecuațiile:

$$\overline{N} = \int_{(A)} \bar{n}'\,dA, \quad \bar{r}_1 \times \overline{N} = \int_{(A)} \bar{r} \times \bar{n}'\,dA. \tag{7.37}$$

Notînd cu $\bar{\nu}$ versorul normalei pe (S):

$$\bar{n}' = n'\bar{\nu} \text{ și } \overline{N} = N\bar{\nu},$$

iar ecuațiile (7.37) se pot scrie sub forma:

$$N = \int_{(A)} n'dA$$

$$(\bar{r}_1 N - \int_{(A)} \bar{r} n'dA) \times \bar{\nu} = 0.$$

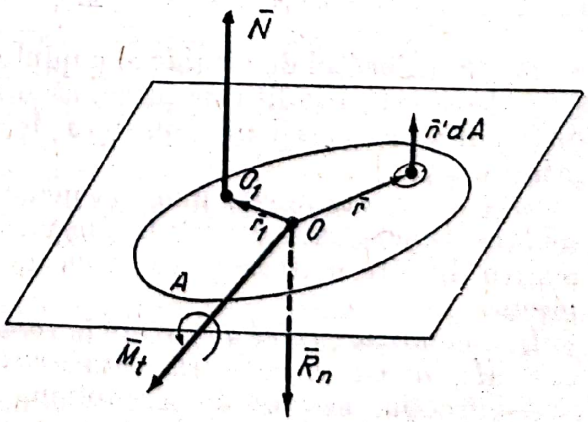


Fig. 204

Deoarece vectorul din paranteză nu poate fi coliniar cu versorul $\bar{\nu}$, care, la rîndul lui, nu poate fi nul, rezultă:

$$\bar{r}_1 = \frac{\int\limits_{(A)} \bar{r} n' \mathrm{d}A}{\int\limits_{(A)} n' \, \mathrm{d}A}. \tag{7.38}$$

Pentru ca sistemul de forţe date şi reacţiunile să se poată echilibra, trebuie să existe, în afară de N, şi un cuplu care să se opună cuplului activ. Pentru aceasta este necesar ca: $\bar{r}_1 \neq 0$, cu alte cuvinte, rezultanta reacţiunilor elementare nu poate avea punctul de aplicaţie în centrul O.

Este uşor de verificat că ipoteza distribuţiei uniforme a reacţiunii, adică:

$$n' = \text{const},$$

duce la o concluzie absurdă. În adevăr, în acest caz:

$$\int\limits_{(A)} \bar{r} \, n' \, \mathrm{d}A = n' \int\limits_{(A)} \bar{r} \, \mathrm{d}A = 0,$$

iar:

$$\bar{r}_1 = 0$$

şi ar rezulta că momentul cuplului de frecare la rostogolire:

$$\bar{M}_r = \int\limits_{(A)} \bar{r} \times \bar{n}' \, \mathrm{d}A = \bar{r}_1 \times \bar{N} = 0,$$

adică nimic nu s-ar opune acţiunii cuplului de rostogolire de moment $\bar{M}_t$, ceea ce este contrazis de practică.

c. În aceste condiţii este evident că distribuţia reacţiunii unitare normale $\bar{n}'$ nu poate fi uniformă. O consecinţă este deplasarea reacţiunii totale $\bar{N}$ faţă de acţiunea $\bar{R}_n$, astfel încît cuplul $(\bar{R}_n, \bar{N})$ să poată justifica existenţa cuplului de frecare la rostogolire. Momentul cuplului de frecare la rostogolire are modulul:

$$|\bar{M}_r| = |\bar{N}| \, |\bar{r}_1|,$$

unde $|\bar{r}_1|$, braţul de pîrghie al cuplului, are o valoare limită care se notează cu s. În aceste condiţii ar părea că o ipoteză apropiată de realitate privind distribuţia reacţiunii pe suprafaţa de contact ar duce la determinarea lui s prin calcul.

Însă, cum stabilirea unei asemenea ipoteze constituie o problemă deosebit de dificilă, este cu mult mai uşor să se determine pe bază de experienţe, pentru diferite materiale, valoarea lui s, denumit *coeficient de frecare la rostogolire.*

În concluzie, *cuplul de frecare la rostogolire se poate exprima prin momentul său* $\bar{M}_r$, *avînd următoarele caracteristici*:

— direcţia, aceeaşi cu a cuplului activ $(\bar{M}_t)$;

— sensul, opus sensului cuplului activ;

— modulul limitat de inecuaţia :

$$|\bar{M}_r| \leqslant |\bar{N}|\, s, \tag{7.39}$$

unde $\bar{N}$ este reacţiunea normală pe suprafaţa de contact (S).

Valorile lui s, de obicei în cm, se găsesc în tabele speciale.

Se dau cîteva valori pentru s, extrase din *Manualul inginerului* (Ed. T.) :

Lemn tare pe lemn tare	0,05	cm
Oţel moale pe oţel	0,005	cm
Sferă de oţel dur pe oţel	0,0005	cm
Roată de oţel pe şina C.F.....	0,05	cm
Roată de oţel pe lemn	0,15	cm

d. Observaţii. 1° În general, coeficientul de frecare la rostogolire este mic şi explică de ce deplasarea prin rostogolire a corpurilor rotunde se face mai uşor decît prin alunecare. În acest fel se explică de ce descoperirea roţii a însemnat pentru epoca respectivă o mare cucerire a omului.

Şi astăzi, micşorarea frecării este o problemă importantă în tehnica construcţiilor de maşini şi o bună rezolvare o dă folosirea rulmenţilor cu bile sau cu role, adică tocmai prin înlocuirea frecării de alunecare cu cea de rostogolire.

2° Ca la frecarea de alunecare şi la frecarea de rostogolire, există o deosebire între frecarea în repaus şi frecarea în mişcare. Deosebirea se exprimă prin valorile diferite ale coeficienţilor s. De obicei, coeficientul static este mai mare.

§ 82. Frecarea în articulaţii

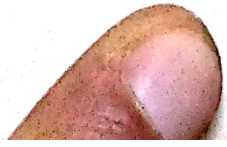
a. Se ştie (§§ 73 şi 74) că legătura prin articulaţie sferică sau cilindrică se opune oricărei acţiuni care tinde să desprindă solidul (C) de (C') din articulaţia comună. De asemenea, dacă frecarea de pe suprafaţa de contact dintre (C) şi (C') este neglijabilă, articulaţia nu se opune acţiunii de rotaţie a unui cuplu activ aplicat solidului (C).

Însă experienţa arată că, dacă momentul cuplului este mic, rotaţia nu se produce. Cauza trebuie căutată în forţele de frecare de pe suprafaţa de contact şi care dau naştere unui cuplu antagonist, care se opune cuplului activ. Acesta este cuplul de frecare din articulaţii.

S-au încercat diferite ipoteze pentru determinarea teoretică a momentului $\bar{M}_f$ al cuplului de frecare. Astfel, observînd că deplasarea relativă a solidului (C) (arbore sau fus) în raport cu solidul (C') (cuzinet, lagăr) se face — în acelaşi timp — prin rostogolire şi prin alunecare pe suprafaţa de contact, s-a admis ipoteza că apar ambele frecări, atît la rostogolire cît şi la alunecare, reprezentate prin coeficienţii s şi μ.

Calculele au mai folosit şi o ipoteză oarecare asupra distribuţiei reacţiunii totale normale $(\bar{N})$ pe suprafaţa de contact, sferică sau cilindrică, după felul articulaţiei.

Formula stabilită teoretic nu a dat satisfacţie în practică, deoarece fenomenul este cu mult mai complex în realitate.



Rezultate mai bune dă următoarea *formulă empirică*:

$$|\bar{M}_f| \leqslant \mu' |\bar{N}| r, \tag{7.40}$$

unde:

μ' este coeficientul de frecare în articulații, fusuri, asemănător coeficientului de frecare la alunecare μ, de care însă diferă, deoarece, pentru aceleași materiale și cu aceleași substanțe interpuse, coeficienții au valori diferite;

$\bar{N}$ — reacțiunea normală pe suprafața de contact dintre solidele (C) și (C');

r — raza fusului, arborelui sau a articulației.

În concluzie, *frecarea în articulații (fusuri, arbori, lagăre) se poate înlocui printr-un cuplu care se opune cuplului motor și al cărui moment $\bar{M}_f$ este un vector avînd aceeași direcție, dar sensul contrar momentului motor, iar modulul variind de la zero pînă la valoarea maximă $\mu' |\bar{N}| r$.*

b. Observații. 1° Dacă μ' ar fi coeficientul de frecare la alunecare, $\mu' |\bar{N}|$ *ar fi* modulul unei forțe de frecare la alunecare $\bar{T}$. Dacă s-ar plasa o forță $\bar{T}$ pe suprafața de contact (fig. 205), momentul ei în raport cu axa fusului (arborelui) sau în raport cu centrul articulației sferice ar avea același modul cu momentul cuplului de frecare din articulații: $\mu' |\bar{N}| r$. În realitate, lucrurile nu se petrec astfel, deoarece μ' nu este coeficient de frecare la alunecare. Introducerea forței $\bar{T}$ poate fi utilă doar pentru o mai ușoară memorare a formulei empirice.

2°. Deoarece unghiul α dintre reacțiunea totală $\bar{R}'$ (fig. 205) și reacțiunea normală $\bar{N}$ este mic:

$$|\bar{N}| = |\bar{R}'| \cos\alpha \approx |\bar{R}'|,$$

se folosește, de preferință, formula:

$$|\bar{M}_f| \leqslant \mu' |\bar{R}'| r \tag{7.41}$$

pentru modulul cuplului de frecare în articulații, fusuri.

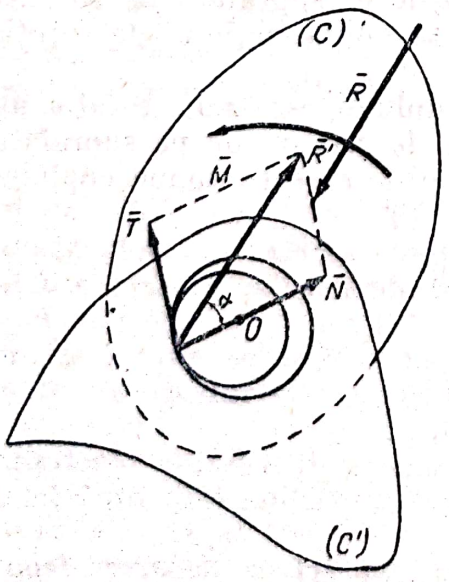


Fig. 205

3°. În construcțiile de mașini se caută mijloace pentru a reduce frecarea din articulații, fusuri, la valori cît mai mici cu putință. Mijloacele folosite sînt rulmenții cu bile sau cu role, lubrifianții etc. Problema este studiată la cursurile de organe de mașini.

4° Și la frecarea din articulații se face deosebire între frecarea statică de cea dinamică, coeficientul μ' în cazul mișcării este de obicei mai mic decît coeficientul μ'_0 pentru cazul repausului relativ al solidelor articulate.

5° Formula (7.41) poate găsi aplicaţii *numai* în cazul *frecării uscate.* Dacă se folosesc lubrifianţi, frecarea se numeşte *umedă* şi studiul ei se face la cursurile de organe de maşini pe baza hidrodinamicii.

§ 83. Concluzii şi indicaţii metodice pentru rezolvarea problemelor

În rezumat, studiul teoretic al legăturilor reale ale corpurilor solide este dificil din cauze complexe, dintre care se reţin următoarele: contactul nu este punctual, solidele sînt deformabile, suprafeţele de contact nu au forme simple, ipotezele privind repartiţia forţelor de legătură normale pe suprafaţa de contact nu sînt sigure, frecarea nu este izotropă şi nu se cunosc legi privind variaţia coeficienţilor de frecare pe suprafaţa de contact.

Calcularea forţelor de legătură efective este urmărită de mai multe ştiinţe, grupate în mecanica aplicată.

Rolul mecanicii teoretice mărginindu-se la găsirea soluţiei într-o primă aproximaţie, rezolvarea problemelor solidului cu legături se poate face în baza ipotezelor simplificatoare şi urmînd metodica indicată mai jos:

a) Prin cercetarea aspectului fizic al problemei se scot în evidenţă: felul legăturilor, deplasările posibile şi simplificările necesare sau acelea care s-au şi adus legăturilor, pentru ca problema să poată fi tratată în cadrul mecanicii teoretice.

b) Se notează datele problemei: forţe cunoscute, poziţii de repaus (echilibru) date, coeficienţi de frecare etc.

c) Se înlocuiesc legăturile prin forţele de legătură normale şi tangenţiale, scoţîndu-se în evidenţă caracteristicile cunoscute şi cele necunoscute ale lor, precum şi eventuale relaţii dintre ele.

1° De pildă, pentru legătura de *reazem simplu*, forţa de legătură normală $\overline{N}$ are: punctul de aplicaţie în punctul de contact; direcţia după normala comună la suprafeţele celor două solide (C) şi (C') (fig. 194) în punctul de contact, modulul şi sensul necunoscute.

2° De asemenea, legătura tangenţială, în cazul cînd tendinţa de deplasare este de alunecare, se înlocuieşte prin forţa $\overline{T}$, la care se cunosc următoarele: punctul de aplicaţie în punctul de contact, direcţia în planul tangent comun la cele două suprafeţe, în punctul de contact, după direcţia şi în sensul opus în care forţele tind să deplaseze solidul, iar modulul limitat de inecuaţia (7.25):

$$|\overline{T}| \leqslant \mu |\overline{N}|.$$

3° Dacă tendinţa de deplasare este de rostogolire, legătura tangenţială (frecarea de rostogolire) se înlocuieşte printr-un cuplu opus cuplului activ, avînd modulul momentului limitat de inecuaţia (7.39): $|\overline{M}_r| \leqslant |\overline{N}| s$.

4° La fel, dacă tendinţa de deplasare este de pivotare, frecarea de pivotare se înlocuieşte printr-un cuplu antagonist, ale cărui caracteristici se determină ca în exemplul din § 80.

5° Dacă legătura este o articulaţie sferică, forţa de legătură normală are originea în punctul fix al articulaţiei, iar celelalte caracteristici, adică direcţia, sensul şi modulul, necunoscute. Frecarea în articulaţie se înlocuieşte printr-un cuplu al cărui moment $|\overline{M}_f|$ se exprimă prin inecuaţia (7.41): $|\overline{M}_f| \leqslant \mu' |\overline{R}'| r$.

6° Dacă articulaţia este cilindrică în spaţiu, se ştie că ea poate fi asimilată, din punct de vedere mecanic, cu două articulaţii sferice.

Cazul articulaţiei din plan este mai simplu, deoarece constituie o particularizare a articulaţiei sferice, adică solidul are un singur punct fix în articulaţie, suportul forţei de legătură normală este în plan, direcţia momentului cuplului de frecare din articulaţie este perpendiculară pe plan, iar modulul momentului satisface inecuaţia (7.41).

Scanned with OKEN Scanner

7° Încastrarea se înlocuieşte printr-un torsor $(\bar{R}', \bar{M}')$, avînd cunoscut doar punctul de aplicaţie al forţei $\bar{R}'$, în punctul în care se presupune concentrată legătura de încastrare. Încastrarea nepermiţînd solidului nici un fel de deplasare, nu se iau în considerare în mod special forţele de frecare.

8° În fine, legătura prin fir se înlocuieşte printr-o forţă $\bar{N}$, cu punctul de aplicaţie în punctul în care este legat firul, avînd direcţia şi sensul firului, iar modulul necunoscut, întocmai ca la legătura prin fir a punctului material.

d) Dacă solidul din problemă are mai multe legături, fiecare legătură se înlocuieşte prin forţele de legătură corespunzătoare, în aşa fel încît să se ajungă la *eliberarea solidului de legături.*

e) Dacă, cu toate legăturile sale, solidul mai poate fi deplasat, se vor scoate în evidenţă toate deplasările posibile, precum şi *parametrii de poziţie.* Astfel, la un solid cu articulaţie cilindrică, deplasarea posibilă este rotaţia în jurul axei fixe O_1O_2 (fig. 191, § 74), iar parametrul de poziţie este unghiul de rotaţie θ.

f) Se alege sistemul de referinţă cel mai potrivit pentru simplificarea calculelor, urmînd indicaţiile generale date la § 70.

g) O dată solidul eliberat de legături se scriu condiţiile necesare şi suficiente pentru ca toate forţele aplicate solidului, date şi de legătură, să se echilibreze. Ecuaţiile rezultate din aceste condiţii, exprimate scalar, se completează cu inecuaţiile (7.25), (7.39), (7.41), care limitează forţele de frecare.

h) Se compară numărul necunoscutelor scalare cu numărul ecuaţiilor scalare pentru a cunoaşte gradul de determinare al problemei. Se adună numărul necunoscutelor scalare ale forţelor de legătură normale cu numărul parametrilor de care depinde poziţia de echilibru a sistemului. Dacă rezultatul este egal cu numărul ecuaţiilor, sistemul este static determinat. În cazul cînd sînt mai multe necunoscute decît ecuaţii, sistemul este static nedeterminat.

i) În general, sistemele cu frecări sînt static nedeterminate.

j) Se rezolvă sistemul de ecuaţii şi inecuaţii ţinînd seama de indicaţiile date la § 71.

k) După rezolvare se vor interpreta rezultatele obţinute.

§ 84. Aplicaţii

1° O bară OA de lungime l, omogenă, de greutate $\bar{G}$, este articulată în punctul *fix* O şi legată printr-un fir $AB = a$ de punctul B situat pe orizontala punctului O, la distanţa $OB = l$ (fig. 206). Ştiind că sistemul se află în repaus într-un plan vertical, să se calculeze forţele de legătură.

Rezolvare. Exemplul îşi poate găsi aplicaţie la suspendarea unui ferestre cu axă orizontală sau a unui oblon într-o anumită poziţie.

Datele problemei sînt: poziţia de echilibru, adică:

$$\sphericalangle AOB = \theta = 2 \arcsin \frac{a}{2l},$$

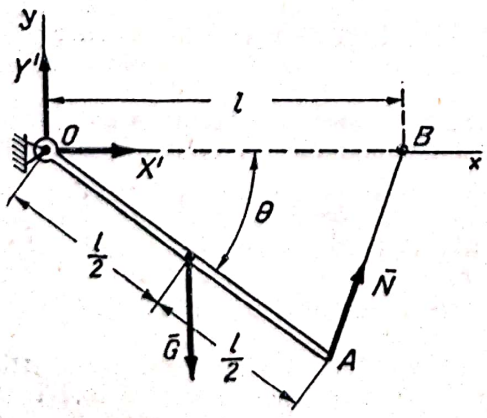


Fig. 206

şi greutatea $\bar{G}$. Problema este de tipul direct.

Înlocuind articulaţia prin:

$$\bar{R}' = X'\vec{i} + Y'\vec{j}$$

şi legătura cu firul AB prin $\bar{N}$, bara este eliberată de legături.

Sistemul de referinţă ales are originea în O, Ox după OB, iar $Oy \perp OB$.

Condiţiile scalare de echilibru sînt:

$$X' + N \sin \frac{\theta}{2} = 0; \quad Y' - G + N \cos \frac{\theta}{2} = 0$$

$$- G \frac{l}{2} \cos \theta + Nl \cos \frac{\theta}{2} = 0;$$

ultima ecuație exprimă că suma momentelor tuturor forțelor în raport cu O este nulă. Forțele de legătură sînt date de :

$$N = \frac{1}{2} G \frac{\cos \theta}{\cos \frac{\theta}{2}},$$

$$X' = -\frac{1}{2} G \cos \theta \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad Y' = \frac{1}{2} G (2 - \cos \theta).$$

Deoarece X' este negativ, înseamnă că sensul adevărat al componentei este opus celui presupus.

Se calculează și :

$$| \bar{R}' | = \sqrt{X'^2 + Y'^2}.$$

Problema se poate rezolva și grafic, folosind condițiile necesare ca trei forțe aplicate unui solid rigid să se echilibreze (v. § 47, *h*, 2°). Forțele trebuie să fie în același plan și concurente. În consecință, prelungind suporturile cunoscute ale forțelor $\bar{G}$ și $\bar{N}$ (AB) se determină punctul C prin care trebuie să treacă și suportul reacțiunii din O, $\bar{R}'$ (fig. 207).

Dar pentru echilibru :

$$\bar{G} + \bar{R}' + \bar{N} = 0$$

sau :

$$\bar{R}' + \bar{N} = -\bar{G},$$

astfel că, descompunînd forța $-\bar{G}$, după direcțiile CO și CA, se determină grafic forțele de legătură cerute.

2° *Variantă.* În loc ca firul AB să aibă o lungime dată și să fie legat de punctul fix B, el este petrecut peste un scripete foarte mic, fără frecare, iar la capătul liber atîrnă, ca în figura 208, un corp de greutate cunoscută $\bar{G}_1$. Se cere să se determine poziția în care trebuie așezată bara pentru ca ea să rămînă în repaus în această poziție.

Rezolvare. Problema este de tipul invers, se cunoaște forța prin :

$$| \bar{N} | = | \bar{G}_1 |,$$

iar necunoscut este $\sphericalangle \theta$, parametrul poziției de echilibru. Ecuațiile de echilibru sînt aceleași ca la 1°, cu deosebirea că în loc de N se scrie G_1.

Din ecuația de momente scrisă sub forma :

$$G \cos^2 \frac{\theta}{2} - G_1 \cos \frac{\theta}{2} - \frac{G}{2} = 0,$$

se obține :

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{G_1 \pm \sqrt{G_1^2 + 2G^2}}{2G}.$$

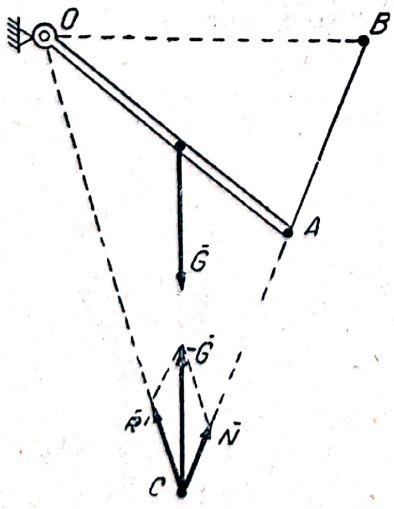


Fig. 207

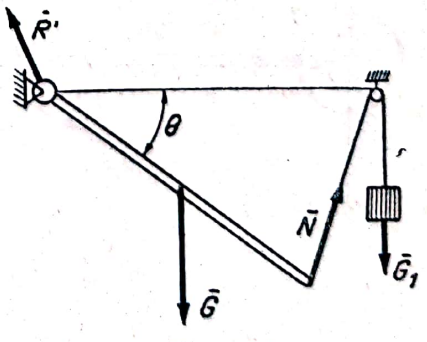


Fig. 208

Analizînd, se constată că ambele soluţii corespund. Soluţia cu semnul plus convine numai dacă :

$$G_1 < \frac{G}{2}.$$

Înlocuind pe θ în celelalte ecuaţii de echilibru, se calculează X' şi Y'.

3° O macara fixă se compune dintr-o grindă OA de lungime l, de greutate neglijabilă, încastrată în O şi liberă în A. Cu ajutorul unui scripete fixat în A se poate ridica un corp de greutate G, prin mijlocirea unui cablu acţionat ca în figura 209. Să se calculeze forţele de legătură.

Rezolvare. Problema este de tipul direct. Necunoscutele sînt $\bar{R}'$ şi $\bar{M}'$, forţa şi momentul cuplului din încastrare. Valorile proiecţiilor pe Ox şi Oy ale lui $\bar{R}'$ sînt X' şi Y', cu sensuri arbitrar alese. $\bar{M}'$ este dirijat după axa Oz şi se notează cu M' valoarea proiecţiei lui pe Oz.

Pentru ca sensul momentului să corespundă sensului indicat de săgeata curbă, M' trebuie să fie pozitiv.

Condiţiile de echilibru sînt :

$$X' - F\cos 30° = 0, \qquad Y' - F\cos 60° - G = 0,$$

$$M' - F\,l\sin 30° - G\,l = 0;$$

cum :

$$|\bar{F}| = |\bar{G}|,$$

rezultatul este :

$$X' = G\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad Y' = \frac{3G}{2}, \quad |\bar{R}'| = G\sqrt{3}, \quad M' = \frac{3Gl}{2};$$

semnele pozitive arată că toate sensurile alese arbitrar corespund realităţii.

4° Un tablou omogen de greutate $\bar{G}$, de înălţime $AB = l$, este atîrnat printr-un fir $OA = l$ de O şi se sprijină, cu frecare în B (coeficient μ_0), de un perete vertical care conţine punctul O. Figura 210 reprezintă secţiunea după planul de simetrie perpendicular pe perete, în care se presupune că acţionează rezultantele reacţiunilor normale, tangenţiale şi greutatea tabloului.

Să se calculeze poziţia de echilibru ($\sphericalangle\, 0$) şi reacţiunile.

Rezolvare. Prin introducerea reacţiunilor $\bar{N}$, $\bar{T}$, $\bar{N}'$, solidul se consideră eliberat de legături. Valorile necunoscutelor sînt : N, T, N' şi θ, între care se scriu ecua-

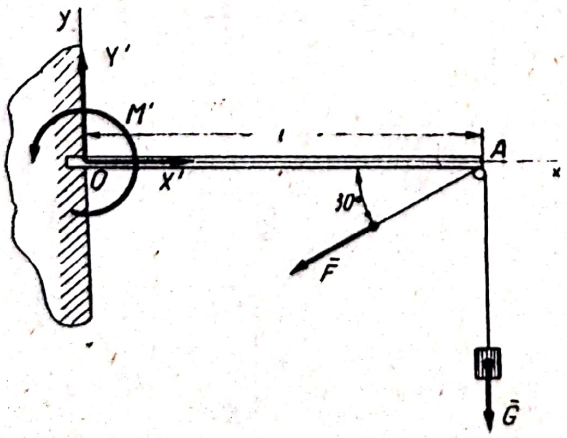


Fig. 209

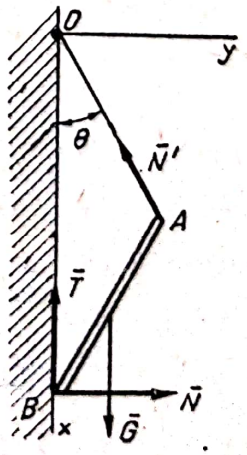


Fig. 210

ţiile de proiecţii şi de momente în raport cu axele şi originea sistemului de referinţă Oxy ales :

$$-T + G - N' \cos\theta = 0, \quad N - N' \sin\theta = 0,$$

$$N(2l\cos\theta) - G\frac{l}{2}\sin\theta = 0,$$

precum şi inecuaţia :

$$|\bar{T}| \leqslant \mu_0 |\bar{N}|.$$

Din ecuaţia de momente şi din ecuaţia a II-a se găsesc :

$$N = \frac{G}{4}\operatorname{tg}\theta, \quad N' = \frac{G}{4\cos\theta}.$$

Deoarece N şi N' sînt pozitivi, inecuaţia devine :

$$T \leqslant \mu_0 N = \mu_0 \frac{G}{4}\operatorname{tg}\theta;$$

în fine, folosind prima ecuaţie se ajunge la rezultatele :

$$\operatorname{tg}\theta \geqslant \frac{3}{\mu_0}, \qquad N \geqslant \frac{3}{4\mu_0}G, \quad N' \geqslant \frac{G}{4\mu_0}\sqrt{9+\mu_0^2}.$$

5° *Problema scării.* O scară omogenă $AB = l$ de greutate $\bar{G}$ este rezemată cu frecare de o podea orizontală (coeficient μ) şi de un perete vertical (coeficient μ_1). Să se calculeze poziţia de repaus ($\sphericalangle\theta$) şi reacţiunile.

Rezolvare. Problema face parte din tipul general mixt. Intuitiv se poate aprecia că dacă frecările ar fi nule nu s-ar putea aşeza scara decît în poziţia verticală în care echilibrul este instabil.

Forţele de frecare din reazeme $\bar{T}$ şi $\bar{T}_1$ se opune la alunecarea scării, ca în figura 211.

Se eliberează scara de legături, introducînd şi reacţiunile normale $\bar{N}$ şi $\bar{N}_1$. Se scriu condiţiile de echilibru în raport cu reperul Oxy :

$$N_1 - T = 0 \qquad N - G + T_1 = 0,$$

ecuaţia de momente în raport cu O :

$$N\,l\sin\theta - G\frac{l}{2}\sin\theta - N_1 l\cos\theta = 0$$

şi, în fine, inecuaţiile forţelor de frecare sub forma :

$$T \leqslant \mu N, \qquad T_1 \leqslant \mu_1 N_1,$$

deoarece sensurile reacţiunilor normale sînt corecte.

Se deduc din ecuaţia de momente :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{N_1}{N - \frac{G}{2}}, \tag{7.42}$$

din prima şi a patra relaţie :

$$N_1 = T \leqslant \mu N \tag{7.43}$$

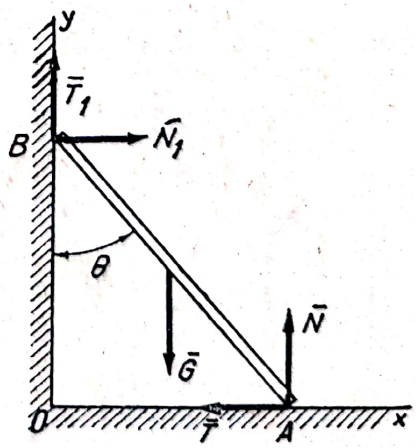


Fig. 211

şi succesiv :

$$N = G - T_1 \geqslant G - \mu_1 N_1 \geqslant G - \mu_1(\mu N); \tag{7.44}$$

deci :

$$N \geqslant \frac{G}{1 + \mu\mu_1}. \tag{7.45}$$

Comparînd (7.43) şi (7.45), se constată că nu se pot determina limitele reacţiunii N_1. Eliminînd pe N_1 între (7.43) şi (7.42), se obţine :

$$\operatorname{tg}\theta \leqslant \frac{\mu N}{N - \frac{G}{2}}. \tag{7.46}$$

Se constată că eliminarea lui N între (7.46) şi (7.45) se poate face indirect, eliminîndu-l pe G, deci :

$$\operatorname{tg}\theta \leqslant \frac{2\mu}{1 - \mu\mu_1}. \tag{7.47}$$

Observaţii. a. De obicei se rezolvă sistemul de ecuaţii şi inecuaţii presupunînd forţele de frecare la limită. Astfel, în problema scării, sistemul de ecuaţii ar da :

$$N = \frac{G}{1 + \mu\mu_1}, \qquad N_1 = \frac{\mu G}{1 + \mu\mu_1}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{2\mu}{1 - \mu\mu_1},$$

după care, pe baza intuiţiei, s-ar presupune că :

$$N \geqslant \frac{G}{1 + \mu\mu_1}, \qquad N_1 \geqslant \frac{\mu G}{1 + \mu\mu_1}, \qquad \operatorname{tg}\theta \leqslant \frac{2\mu}{1 - \mu\mu_1}.$$

Însă calculul corect a arătat că nu se pot determina limitele reacţiunii N_1. Deci înlocuirea inecuaţiilor prin ecuaţii nu este recomandabilă, deoarece denaturează rezultatele şi înţelegerea sensului fizic al fenomenului.

b. Dacă se presupune că frecarea dintre scară şi perete este neglijabilă, $\operatorname{tg}\theta \leqslant 2\mu$, echilibrul se menţine. Însă, dacă frecarea dintre scară şi podea ar fi nulă, $\operatorname{tg}\theta = 0$, poziţia de echilibru este verticală, adică poziţia de echilibru nestabil.

6° *Variantă.* O scară $AB = l$, de greutate neglijabilă, este rezemată într-o poziţie dată θ, întocmai ca în problema 5°. Se cere poziţia pînă la care poate sta pe scară un om de greutate $\bar{G}$ fără ca scara să alunece, ţinînd seama de frecare (fig. 212).

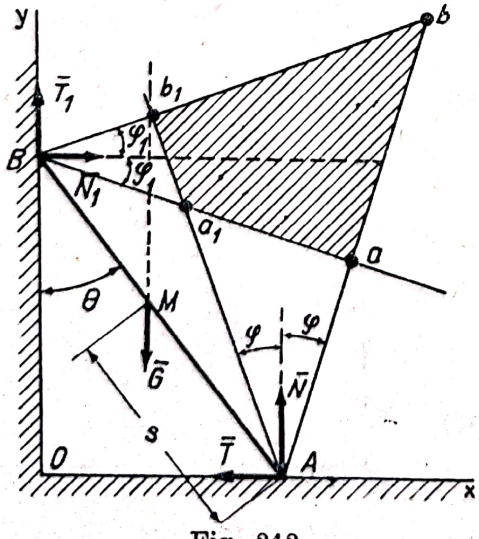


Fig. 212

Rezolvare. Deoarece θ este dat, necunoscutele problemei sînt $\bar{N}$ şi $\bar{N}_1$ şi parametrul poziţiei pînă la care poate sta omul, $AM = s$.

Procedînd ca la 5°, se obţin aceleaşi ecuaţii, cu excepţia ecuaţiei de momente în raport cu O, care este :

$$N\,l \sin\theta - G\,(l - s)\sin\theta - N_1\,l\cos\theta = 0.$$

Sistemul de ecuaţii şi inecuaţii dă :

$$s \leqslant \frac{\mu(\mu_1 + \operatorname{ctg}\theta)\,l}{1 + \mu\mu_1}$$

şi, la fel, condiţiile pentru N şi N_1.

Problema se pretează la o interesantă soluţie grafică cu ajutorul unghiurilor de frecare φ şi φ_1 :

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\,\mu, \qquad \varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}\,\mu_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se construiesc dreptele Aab, Aa_1b_1 şi Ba_1a, Bb_1b care limitează direcţiile reacţiunilor totale din A şi B:

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{T}, \qquad \bar{R}_1 = \bar{N}_1 + \bar{T}_1.$$

Pentru echilibru trebuie ca:

$$\bar{R} + \bar{R}_1 + \bar{G} = 0,$$

adică forţele coplanare, $\bar{R}$, $\bar{R}_1$ şi $\bar{G}$, să fie şi concurente.

Deoarece intersecţia suporturilor reacţiunilor totale se găseşte în patrulaterul aa_1bb_1 sau pe laturile lui, pentru echilibru trebuie ca şi suportul forţei $\bar{G}$ să treacă prin această intersecţie. În consecinţă, după figura 212, poziţia limită a omului pe scară este determinată de verticala vîrfului b_1. Patrulaterul $aa_1\ bb_1$ se numeşte *patrulaterul frecărilor*.

7° O roată omogenă de greutate $\bar{G}$ şi rază R se găseşte în repaus în poziţie verticală pe o şină orizontală. Se aplică în O, centrul roţii, o forţă $\bar{F}$ paralelă cu şina. Cunoscînd coeficienţii de frecare la alunecare (μ) şi rostogolire (s), se cere să se calculeze valoarea maximă a forţei $\bar{F}$ pentru ca roata să rămînă în repaus.

Să se aplice pentru:

a) $G = 60$ kgf, $R = 25$ cm, $\mu = 0{,}1$; $s = 0{,}05$ cm;

b) $G = 20$ kgf, $R = 2{,}5$ cm, $\mu = 0{,}05$; $s = 0{,}15$ cm.

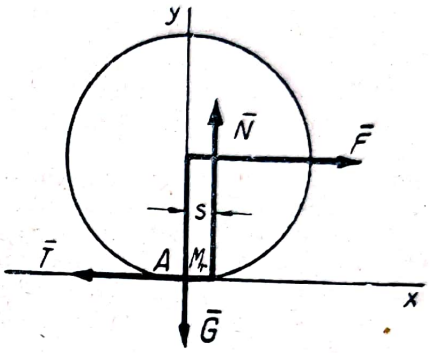


Fig. 213

Cum părăseşte roata poziţia de repaus în cazurile (a) şi (b)?

Rezolvare. Pe suprafaţa de contact a roţii cu şina, componentele reacţiunii totale sînt: $\bar{N}$ după normală, $\bar{T}$ după tangentă şi $\bar{M}_r$, momentul cuplului de frecare la rostogolire (fig. 213). Condiţiile de echilibru exprimate scalar în raport cu sistemul de referinţă Axy sînt:

$$F - T = 0, \quad N - G = 0, \quad -FR + M_r = 0,$$

unde:

$$T \leqslant \mu N = \mu G \quad \text{şi} \quad M_r \leqslant sN = sG.$$

Discuţie. Pentru a nu se produce alunecarea, trebuie ca:

$$F \leqslant \mu G.$$

Pentru a nu se produce rostogolirea, trebuie ca:

$$F \leqslant \frac{s}{R}\, G.$$

Din compararea coeficienţilor μ şi $\frac{s}{R}$ se determină valoarea maximă a forţei pentru menţinerea repausului.

Exemplele numerice. a) Deoarece:

$$\frac{s}{R} = \frac{0{,}05 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = 0{,}002 < \mu = 0{,}1,$$

valoarea maximă a forţei este:

$$F = 0{,}002\ G = 0{,}120 \text{ kgf}.$$

În cazul cînd forţa, crescînd continuu, depăşeşte această valoare, pornirea din poziţia de repaus se face prin *rostogolire*.

b) Deoarece :

$$\frac{s}{R} = \frac{0{,}15 \text{ cm}}{2{,}5 \text{ cm}} = 0{,}06 > \mu = 0{,}05,$$

valoarea maximă a forţei este :

$$F = 0{,}05\ G = 1 \text{ kgf}.$$

Dacă forţa aplicată este mai mare, roata începe *să alunece*.

Observaţie. Nu are sens practic să se discute cazul limită :

$$\mu = \frac{s}{R},$$

deoarece precizia măsurătorilor şi a determinării coeficienţilor de frecare nu poate fi matematică.

8° De capetele unui fir petrecut peste un scripete de greutate reglijabilă, avînd raza roţii R şi a fusului r, sînt legaţi : un solid de greutate $\bar{G}$, rezemat cu frecare, de coeficient μ, pe un plan orizontal, şi un solid de greutate $\bar{P}$, atîrnat vertical (fig. 214).

Dacă μ' este coeficientul de frecare în fus, să se calculeze pentru echilibru valoarea maximă a greutăţii $\bar{P}$.

Răspuns. Deoarece forţa de frecare este :

$$T \leqslant \mu G,$$

reacţiunea totală din fus este dată de :

$$|\bar{R}'| = \sqrt{T^2 + P^2} \leqslant \sqrt{\mu^2 G^2 + P^2}.$$

Momentul maxim al cuplului de frecare în fus este :

$$|\bar{M}_f| \leqslant \mu' |\bar{R}'| r = \mu' r \sqrt{T^2 + P^2} \leqslant \mu' r \sqrt{\mu^2 G^2 + P^2}.$$

Condiţia de echilibru este :

$$PR = |\bar{M}_f| + TR.$$

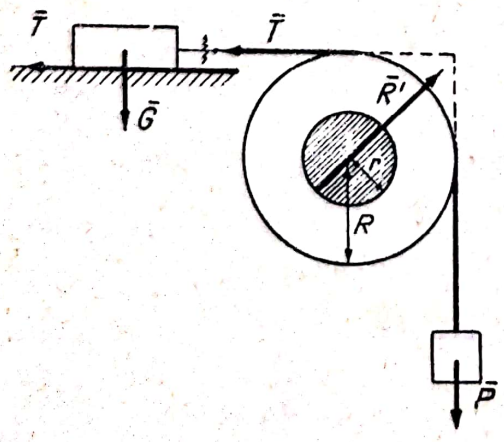


Fig. 214

Înlocuind succesiv :

$$PR \leqslant \mu' r \sqrt{\mu^2 G^2 + P^2} + \mu G R$$

$$(P - \mu G) R \leqslant \mu' r \sqrt{\mu^2 G^2 + P^2},$$

$$(R^2 - \mu'^2 r^2) P^2 - 2\mu G R^2 P +$$

$$+ \mu^2 G^2 (R^2 - \mu'^2 r^2) \leqslant 0,$$

se găseşte :

$$P \leqslant \mu G \frac{R^2 + \mu' r \sqrt{2R^2 - \mu'^2 r^2}}{R^2 - \mu'^2 r^2}.$$

CAPITOLUL VIII

STATICA SISTEMELOR DE SOLIDE RIGIDE

A. GENERALITĂŢI

§ 85. Definiţie, exemple

Prin sistem de solide rigide se înţelege un număr oarecare de solide rigide care se interacţionează. În statică se studiază cazul special al solidelor legate între ele.

Legăturile pot fi astfel încît sistemul de solide să fie deformabil sau să fie nedeformabil, adică întreg sistemul să fie rigid. În viaţa practică şi în tehnică se întîlnesc des sisteme de solide, însă cele mai interesante sînt sistemele de bare drepte, legate între ele. Se dau cîteva exemple de sisteme de bare articulate între ele, care găsesc aplicaţii în tehnică.

a. Exemple de sisteme deformabile alcătuite din bare rigide articulate

1° *Mecanismul biela-manivelă* se compune din: *capul de cruce A*, care alunecă pe o şină orizontală netedă, *glisiera*; *biela AB*, care este articulată în *A* de capul de cruce şi în *B* de *manivela OB*. *A* şi *B* sînt articulaţii mobile, iar *O* este o articulaţie fixă. Sistemul are un grad de libertate reprezentat prin parametrul θ (fig. 215).

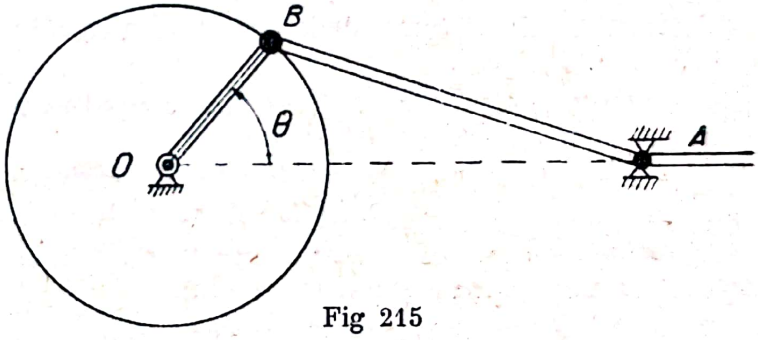


Fig 215

2° *Scara dublă* (fig. 216) se compune din două bare *AC* şi *BC*, articulate în *C* şi simplu rezemate în *A* şi *B* pe un plan orizontal. Articulaţia *C* este mobilă, iar punctele *A* şi *B* pot ocupa orice poziţie pe *Ox*. In planul *Oxy* sistemul are două grade de libertate *(x, y)*.

3° *Inversorul Peaucellier* se compune dintr-un romb articulat *ABCD*, cu articulaţiile *A* şi *B* legate prin barele *AO* şi *OB* de articulaţia fixă *O*, iar cu articulaţia *C* legată de articulaţia fixă O_1 ca în figura 217. Sistemul

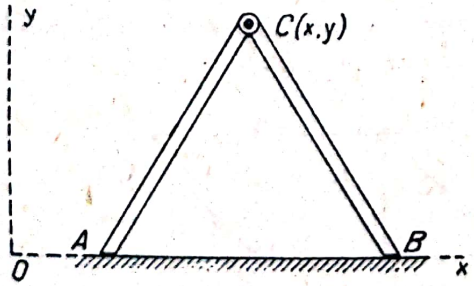


Fig. 216

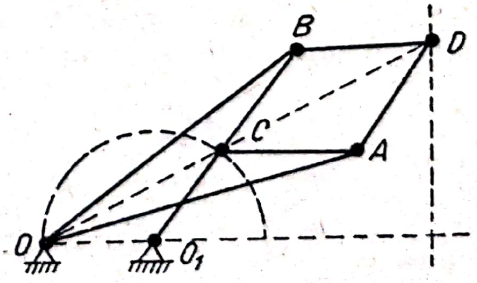


Fig. 217

are un singur grad de libertate, C descrie un cerc, iar D descrie o perpendiculară pe OO_1.

4° *Patrulaterul articulat* (fig. 218) se compune din barele AC, CD şi DB. Articulaţiile A şi B sînt fixe, iar C şi D mobile. Cea de-a patra bară a patrulaterului se consideră a fi AB. Sistemul are un singur grad de libertate, reprezentat prin $\sphericalangle\ \theta$.

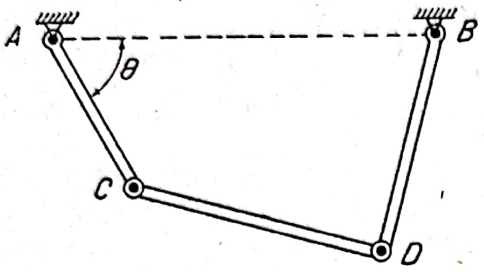


Fig. 218

Cu cît numărul barelor articulate mobil între articulaţiile fixe A şi B creşte, cu atît creşte şi numărul gradelor de libertate. La limită, dacă numărul barelor tinde spre infinit, pe măsură ce lungimile lor tind spre zero, sistemul de bare articulate ia caracterul unui fir suspendat între capetele lui, punctele A şi B.

În aceste condiţii se poate asimila firul, definit la § 2, cu un sistem de bare articulate între ele cap la cap, la limită, cînd numărul barelor tinde spre infinit, lungimea lor totală rămînînd constantă. Firul are un număr infinit de grade de libertate.

b. Exemple de sisteme nedeformabile alcătuite din bare rigide articulate

Asemenea sisteme de bare articulate rigid se întîlnesc mai ales în tehnica construcţiilor metalice, astfel sînt:

1° *Ferma* (fig. 219), care suportă şi transmite asupra zidurilor sau stîlpilor greutatea acoperişului şi celelalte forţe care acţionează asupra lui.

2° *Grinda de pod* (fig. 220), care la fel transmite asupra stîlpilor (piloni) toate sarcinile care acţionează podul.

3° *Stîlpii (pilonii)* (fig. 239), care susţin cablurile unei reţele electrice aeriene de înaltă tensiune sau antena unui post de radiodifuziune.

Toate aceste construcţii, compuse din bare drepte, articulate între ele la capetele lor, se numesc de obicei *grinzi cu zăbrele*. Grinzile cu zăbrele pot fi plane, cu axele barelor în acelaşi plan şi cu toate articulaţiile cilindrice, sau în spaţiu, cu articulaţii sferice. Articulaţiile se presupun ideale (fără frecări).

Toate articulaţiile grinzilor cu zăbrele sînt fixe şi se numesc *noduri*. Unele din ele sînt legate de alte construcţii (stîlpi, ziduri etc.).

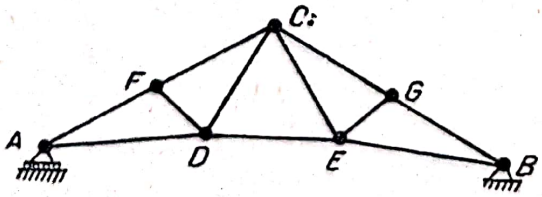


Fig. 219

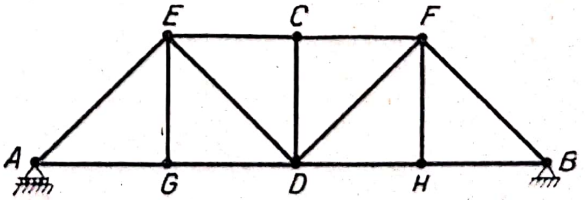


Fig. 220

Cu toate că în teorie sistemul este considerat nedeformabil, totuşi, în practică, sarcinile şi variaţiile de temperatură produc barelor şi sistemului întreg *mici deformaţii.*

Pentru a se evita efectele dăunătoare ale acestor deformaţii, unele din legăturile cu alte construcţii, de pildă, cele notate cu A în figurile 219 şi 220, nu sînt fixe, ci sînt reazeme aşezate *pe role.* Rolele permit grinzii cu zăbrele mici deplasări, fără ca prin aceasta să se acorde sistemului vreun grad de libertate în calcule.

Fie că sistemul de solide rigide este un mecanism, fie că este un rigid, în statică interesează cunoaşterea condiţiilor pe care trebuie să le satisfacă forţele care îl acţionează, pentru ca sistemul să rămînă în repaus.

c. Şi în acest domeniu, problemele se împart în următoarele *tipuri generale*:

1° Dîndu-se un mecanism acţionat de forţe, să se determine poziţia în care trebuie aşezat mecanismul pentru ca sub acţiunea forţelor el să rămînă în repaus (*problemă inversă* sau *mixtă*).

2° Dîndu-se un sistem nedeformabil de solide în repaus, acţionat de forţe, să se determine repartiţia forţelor asupra solidelor sistemului *(problemă directă).*

Pentru soluţionarea acestor probleme se vor analiza, la început, condiţiile în care un sistem de puncte materiale rămîne în repaus, apoi se vor extinde concluziile asupra sistemelor de solide, mai ales asupra sistemelor de bare drepte articulate (mecanisme şi grinzi cu zăbrele).

§ 86. Statica unui sistem de puncte materiale

a. **Definiţie.** *Un sistem de puncte materiale (sistem material deformabil) în repaus rămîne în această stare dacă fiecare din punctele sistemului rămîne în repaus şi reciproc.* Se precizează că repausul este considerat în raport cu acelaşi reper.

Se consideră un sistem oarecare de n puncte materiale M_i, determinate prin $\bar{r}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ în raport cu un reper cu originea în O (fig. 221).

Sistemul este acţionat de forţele *exterioare* $\bar{F}_i$ şi de forţele *interioare* $\bar{F}_{ij}$, unde $\bar{F}_i$ reprezintă rezultanta forţelor exterioare, date şi de legătură, aplicate punctului M_i, iar $\bar{F}_{ij}$ este acţiunea punctului M_j asupra lui M_i. Indicele j poate primi orice valoare întreagă între 1 şi n, cu observaţia că pentru $j = i$, $\bar{F}_{ii} = 0$.

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca M_i să rămînă în repaus este:

$$\bar{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij} = 0. \qquad (8.1)$$

Se însumează toate ecuaţiile de tipul (8.1) scrise pentru toate punctele sistemului.

Deoarece:

$$\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0, \qquad (8.2)$$

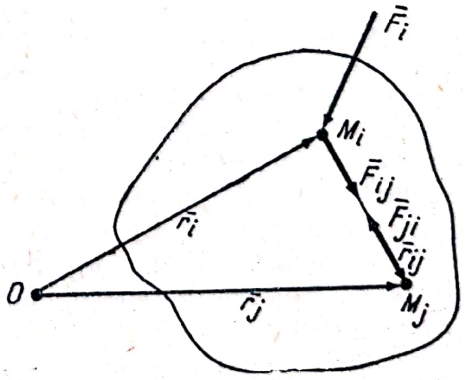


Fig. 221

conform cu principiul acţiunii şi reacţiunii, din ecuaţiile însumate se obţine o condiţie *necesară*:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = 0, \tag{8.3}$$

pentru ca un sistem oarecare de n puncte materiale să rămînă în repaus. Se observă că în (8.3) nu mai intervin forţele interioare.

Pe de altă parte, înmulţind ecuaţia (8.1) vectorial cu $\bar{r}_i$,

$$\bar{r}_i \times \bar{F}_i + \bar{r}_i \times \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij} = 0, \tag{8.4}$$

şi însumînd toate ecuaţiile (8.4) scrise pentru cele n puncte, se găseşte:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij} = 0, \qquad (\bar{F}_{ii} = 0). \tag{8.5}$$

Cel de-al doilea termen, care conţine suma momentelor forţelor interioare în raport cu O, este nul. Pentru demonstraţie, la început se presupune că sistemul se reduce numai la punctele M_i şi M_j. Ţinînd seama de (8.2), se poate scrie succesiv:

$$\bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} + \bar{r}_j \times \bar{F}_{ji} = (\bar{r}_i - \bar{r}_j) \times \bar{F}_{ij} = -\bar{r}_{ij} \times \bar{F}_{ij} = 0,$$

deoarece:

$$\bar{r}_i + \bar{r}_{ij} = \bar{r}_j$$

şi $\bar{r}_{ij}$ este coliniar cu $\bar{F}_{ij}$.

În acelaşi mod se demonstrează că pentru toate perechile de puncte materiale suma momentelor forţelor interioare este nulă şi că cel de-al doilea termen din (8.5) este nul.

Astfel s-a dedus cea de-a doua condiţie *necesară* pentru ca sistemul de puncte materiale să rămînă în repaus:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i = 0. \tag{8.6}$$

În concluzie:

Pentru ca un sistem oarecare de puncte materiale, acţionat de forţe exterioare şi interioare, să rămînă în repaus este necesar ca suma vectorială şi suma momentelor în raport cu un punct, a tuturor forţelor exterioare, să fie egale cu zero.

b. *Observaţii.* 1° Aceeaşi demonstraţie şi concluzie se aplică şi unui sistem oarecare de solide rigide, acţionate de forţe exterioare şi interioare, date şi de legătură.

2° Dacă sistemul este deformabil, condiţiile sînt *necesare*, fără a fi şi *suficiente*.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Se consideră o pereche de bare AC, BC, articulate în C, de greutăţi neglijabile, acţionate în A şi B de forţele $\bar{F}$ şi $\bar{F}'$, egale şi direct opuse (fig. 222). Cu toate că suma forţelor şi suma momentelor lor, în raport cu un punct oarecare, sînt nule, totuşi sistemul de bare nu rămîne în repaus.

3° Însă dacă sistemul este nedeformabil, ecuaţiile (8.3) şi (8.6) reprezintă condiţiile *necesare* şi *suficiente* pentru ca forţele exterioare aplicate sistemului de solide *să se echilibreze.*

Exemplu. Dacă cele două bare ar fi sudate în C, astfel încît unghiul ACB să fie invariabil, forţele $\bar{F}$ şi $\bar{F}'$ se echilibrează, putînd fi considerate ca vectori alunecători opuşi, situaţi pe acelaşi suport.

c. **Metoda izolării solidelor**, pentru rezolvarea problemelor de statica sistemelor de solide rigide, se aplică astfel :

1° Se izolează fiecare solid în parte de celelalte solide ale sistemului, prin introducerea forţelor interioare sistemului, de obicei forţe de legătură necunoscute.

2° Se eliberează fiecare solid în parte de legăturile sale exterioare, introducîndu-se forţele de legătură.

3° Se scriu condiţiile ca sistemul de forţe exterioare şi interioare aplicate fiecărui solid în parte să se echilibreze.

4° Cînd se trece de la un solid la altul, se ţine seamă de faptul că forţele de legătură dintre cele două solide, fiind forţe interioare sistemului de solide, sînt două cîte două egale şi direct opuse.

5° Se obţin astfel, pentru un sistem de n solide, un sistem de $2n$ ecuaţii vectoriale sau un sistem de $6n$ ecuaţii scalare în spaţiu, respectiv $3n$ ecuaţii scalare în plan.

Deseori, se folosesc şi ecuaţiile (8.3) şi (8.6), în care nu intervin forţele interioare. Aceste ecuaţii nu sînt distincte de cele $2n$ ecuaţii, deoarece ele nu sînt decît consecinţe ale celor $2n$ ecuaţii vectoriale.

d. *Aplicaţie.* **Doi cilindri identici, de rază r şi greutate $\bar{G}$ fiecare, sînt aşezaţi pe o podea orizontală între doi pereţi verticali (fig. 223). Peste aceşti cilindri este aşezat un al treilea cilindru identic cu primii.**

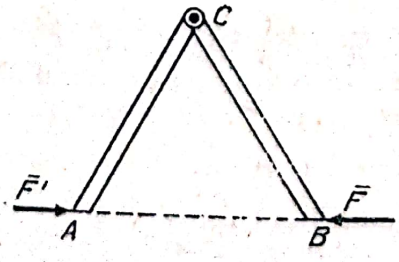


Fig. 222

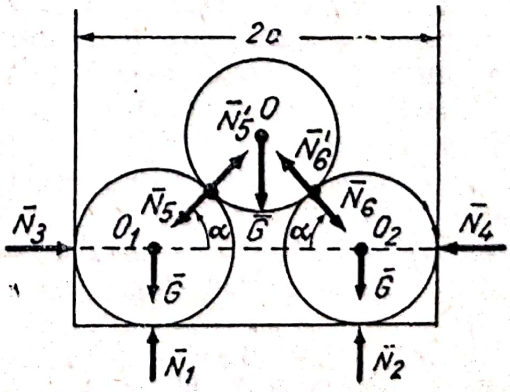


Fig. 223

Să se determine reacţiunile dintre cilindri şi cele dintre cilindri şi podea, respectiv pereţi. Se presupun frecările neglijabile, iar distanţa dintre pereţi este $2a$ (*Buchholtz*).

Rezolvare. Se izolează fiecare cilindru prin introducerea forţelor interioare $(\overline{N}_5, \overline{N}_5')$, $(\overline{N}_6, \overline{N}_6')$ şi a celor exterioare $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{N}_3$ şi $\overline{N}_4$, în total opt necunoscute. Se scriu condiţiile de echilibru pentru forţele concurente în centrele O, O_1 şi O_2 din planul figurii, în total şase ecuaţii :

$$[O]\quad N_5' \cos\alpha - N_6' \cos\alpha = 0 \qquad N_5' \sin\alpha + N_6' \sin\alpha - G = 0$$

$$[O_1]\quad N_3 - N_5 \cos\alpha = 0 \qquad N_1 - G - N_5 \sin\alpha = 0$$

$$[O_2]\quad -N_4 + N_6 \cos\alpha = 0 \qquad N_2 - G - N_6 \sin\alpha = 0$$

$$\text{la care se adaugă :}\quad \overline{N}_5 + \overline{N}_5' = 0 \qquad \overline{N}_6 + \overline{N}_6' = 0$$

şi relaţia evidentă :

$$r + 2r\cos\alpha + 2r\cos\alpha + r = 2a.$$

Rezultatul este :

$$\cos\alpha = \frac{a-r}{2r}, \qquad N_5 = N_6 = \frac{Gr}{\sqrt{(3r-a)(r+a)}}, \qquad N_1 = N_2 = \frac{3G}{2},$$

$$N_3 = N_4 = \frac{G(a-r)}{2\sqrt{(3r-a)(r+a)}}.$$

B. STATICA SISTEMELOR DE BARE ARTICULATE

§ 87. Mecanisme

a. De obicei, prin *mecanism* se înţelege un sistem de bare articulate între ele, cu legături exterioare, astfel încît sistemul să aibă cel puţin *un grad de libertate.* Se ştie că numărul gradelor de libertate este egal cu numărul parametrilor scalari independenţi, care determină, în raport cu un reper, poziţia sistemului.

Un mecanism, acţionat de forţe exterioare date şi de forţe de legătură exterioare şi interioare (reacţiuni) necunoscute, nu rămîne în repaus decît în anumite poziţii în care forţele se echilibrează (poziţii de echilibru).

Necunoscutele problemelor de statica mecanismelor sînt atît reacţiunile cît şi parametrii poziţiilor de echilibru.

În cele ce urmează se vor rezolva două probleme privind mecanisme plane foarte simple, acţionate de sisteme de forţe situate în planul mecanismului. Metoda de lucru, care este aceea a izolării solidelor, se poate aplica şi în cazul sistemelor spaţiale.

b. *Aplicaţii.* 1° Două bare identice, omogene, de greutate $\overline{G}$ şi lungime l, articulate între ele, sînt rezemate fără frecare pe două cuie situate pe aceeaşi orizontală la distanţa a între ele. Să se determine poziţia de echilibru şi reacţiunile din cuiele D, E şi din articulaţia C.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Sistemul de bare și de forțe fiind plan, poziția de echilibru depinde de doi parametri, fie de coordonatele punctului C, fie de unghiurile θ_1 și θ_2 (fig. 224).

Se izolează fiecare din cele două bare, eliberîndu-se de legăturile exterioare și interioare (fig. 225). Necunoscutele reacțiunilor sînt X, Y, N_1 și N_2, care, împreună cu parametrii θ_1 și θ_2, formează cele șase necunoscute ale problemei.

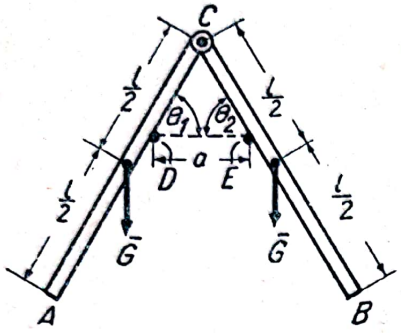
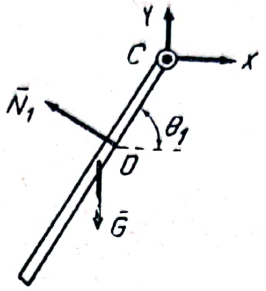


Fig. 224



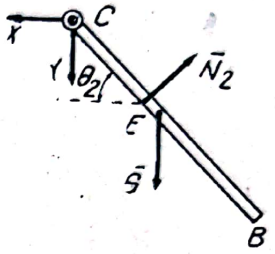


Fig. 225

Se pot scrie șase ecuații de echilibru, cîte trei pentru fiecare bară, însă deseori se preferă să se scrie trei ecuații pentru prima bară și celelalte trei pentru întregul sistem, deoarece astfel se obțin ecuații fără forțe interioare.

Ecuațiile de echilibru pentru sistem sînt:

$$-N_1 \sin\theta_1 + N_2 \sin\theta_2 = 0,$$

$$N_1 \cos\theta_1 + N_2 \cos\theta_2 - 2G = 0,$$

$$-N_1 \cdot CD + N_2 \cdot CE + G\frac{l}{2}\cos\theta_1 - G\frac{l}{2}\cos\theta_2 = 0.$$

Ecuațiile de echilibru pentru prima bară sînt:

$$X - N_1 \sin\theta_1 = 0, \qquad Y + N_1 \cos\theta_1 - G = 0, \qquad -N_1 \cdot CD + G\frac{l}{2}\cos\theta_1 = 0.$$

Pe de altă parte, din triunghiul CDE, relațiile:

$$\frac{CD}{\sin\theta_2} = \frac{CE}{\sin\theta_1} = \frac{a}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

permit determinarea laturilor CD și CE.

Prin eliminări se obține ecuația trigonometrică:

$$(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)(\cos^2\theta_1 + \cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos^2\theta_2 - 1) = 0,$$

care admite ca una din soluții: $\theta_1 = \theta_2$, reprezentînd poziția simetrică [1].

[1] De obicei, această problemă se rezolvă presupunînd, de la început, că poziția de echilibru este simetrică în baza unui principiu al simetriei. Uneori, prin aplicarea acestui principiu, se pot pierde soluții care nu sînt simetrice.

Rezolvarea în continuare a sistemului de ecuații duce la următoarele rezultate:

$$\cos\theta = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}, \qquad N_1 = N_2 = G\sqrt[3]{\frac{l}{a}}, \qquad X = G\,\mathrm{tg}\,\theta, \quad Y = 0.$$

2° O scară dublă ACB, formată din barele omogene de aceeași lungime $2l$, dar de greutăți $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$ diferite, articulate între ele în C, se reazemă cu frecare (coeficient μ) pe un plan orizontal în A și B (fig. 226).

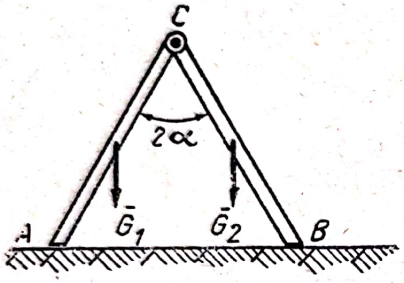


Fig. 226

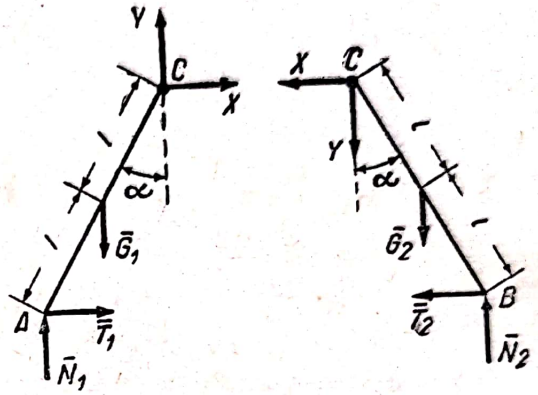


Fig. 227

Se cere să se calculeze limita unghiului 2α, pentru ca scara să rămînă în repaus, precum și reacțiunile.

Aplicație numerică:

$$G_1 = 4\ \text{kgf}, \qquad G_2 = 12\ \text{kgf}, \qquad \mu = 0{,}2.$$

Rezolvare. Izolarea și eliberarea fiecărei bare de legături este arătată în figura 227. Necunoscutele problemei sînt $\sphericalangle\ 2\alpha$, reacțiunile exterioare $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ și reacțiunea din articulația C, cu valorile componentelor: X și Y.

Ecuațiile de echilibru pentru întreaga scară sînt:

$$T_1 - T_2 = 0, \qquad N_1 + N_2 - G_1 - G_2 = 0,$$

$$N_1\, 4\, l \sin\alpha - G_1\, 3l \sin\alpha - G_2 l \sin\alpha = 0,$$

ultima fiind ecuația de momente față de B. Soluțiile sînt:

$$T_1 = T_2,$$

$$N_1 = \frac{3G_1 + G_2}{4},$$

$$N_2 = \frac{G_1 + 3G_2}{4},$$

iar din inegalități rezultă:

$$T_1 \leqslant \mu N_1 = \mu\frac{3G_1 + G_2}{4};$$

$$T_2 \leqslant \mu N_2 = \mu\frac{G_1 + 3G_2}{4}.$$

Scriind condiţiile de echilibru pentru prima bară, se obţin ecuaţiile :

$$T_1 + X = 0, \qquad N_1 - G_1 + Y = 0,$$

$$N_1 2l \sin \alpha - G_1 l \sin \alpha - T_1 2l \cos \alpha = 0,$$

care rezolvate dau, în ipoteza $G_1 < G_2$:

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant \frac{3G_1 + G_2}{G_1 + G_2} \mu \text{ etc.}$$

Discuţie. Mai mult ca în problema scării simple (v. § 84,5°), aici apare evident că înlocuirea inegalităţilor prin egalităţi duce la rezultate absurde. Astfel din :

$$T_1 = \mu N_1, \quad T_2 = \mu N_2 \quad \text{şi din} \quad T_1 = T_2 \text{ ar trebui ca :}$$

$$N_1 = N_2,$$

ceea ce este imposibil, deoarece $G_1 < G_2$. Soluţia corectă trebuie să ţină seama de faptul că forţele de frecare au valori nedeterminate, cuprinse între zero şi limita maximă. În consecinţă, aici T_2 nu poate depăşi limita lui T_1. Exemplul numeric :

$$N_1 = 6 \text{ kgf}, \qquad N_2 = 10 \text{ kgf},$$

$$T_2 = T_1 \leqslant 0{,}2.6 \text{ kgf} = 1{,}2 \text{ kgf}; \qquad \operatorname{tg} \alpha \leqslant 0{,}3.$$

§ 88. Grinzi cu zăbrele

a. În cele ce urmează se va studia problema grinzilor cu zăbrele plane cu bare drepte, acţionate de forţe situate în planul grinzii.

În acelaşi fel, studiul se poate extinde, la nevoie, şi asupra sistemelor spaţiale.

Deoarece grinzile cu zăbrele sînt sisteme rigide, necunoscutele problemelor de statica grinzilor cu zăbrele sînt forţele de legătură exterioare şi interioare. Se înţelege că se poate aplica *metoda izolării fiecărei bare*, scriind condiţiile de echilibru pentru toate forţele date şi de legătură aplicate barei.

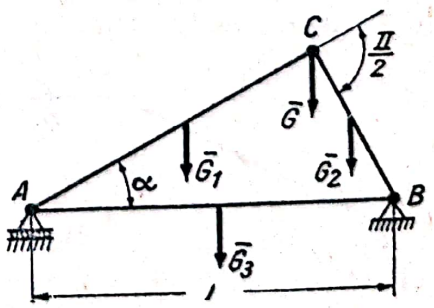


Fig. 228

b. *Exemplu:* Un triunghi articulat ABC, compus din barele omogene de greutăţi $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$ şi $\bar{G}_3$, susţine sarcina $\bar{G}$ aplicată în articulaţia C. Articulaţiile A şi B sînt situate pe aceeaşi orizontală ca în figura 228.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Necunoscutele problemei sînt forţele de legătură (reacţiunile) exterioare N_1 şi N_2 din A şi B, care sînt verticale, şi reacţiunile interioare notate prin X, Y, X_1, Y_1, X_2, Y_2, aşa după cum sînt arătate în figura 229, *a*, *b* şi *c*. Este important de precizat că forţele exterioare de la noduri se consideră aplicate numai uneia din barele care se întîlnesc în aceste noduri (sau se presupun egal repartizate acestor bare).

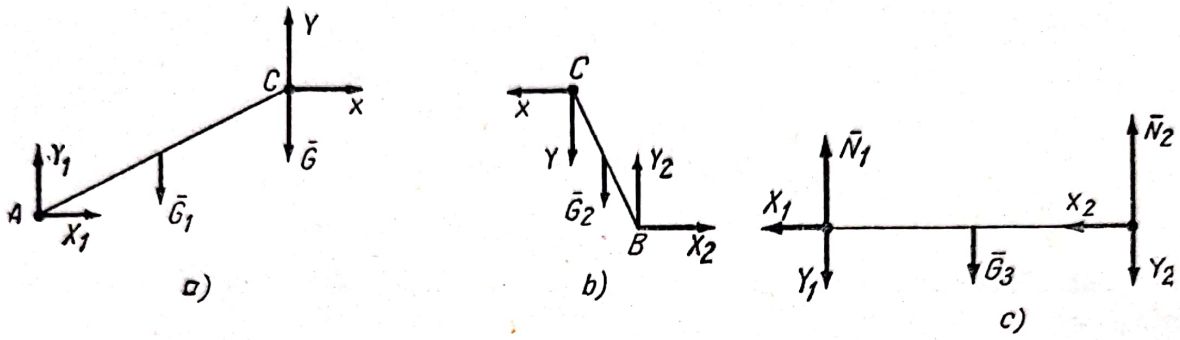


Fig. 229

Scriind condiţiile de echilibru pentru fiecare bară izolată, se obţine un sistem de nouă ecuaţii care conduc la următoarele soluţii :

$$X_1 = -X = -X_2 = \left(G + \frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{2}\right) \sin\alpha \cos\alpha, \qquad Y = \left(G + \frac{G_1}{2}\right) \cos^2\alpha - \frac{G^2}{2} \sin^2\alpha,$$

$$Y_1 = \left(G + \frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{2}\right) \sin^2\alpha + \frac{G_1}{2}, \qquad Y_2 = \left(G + \frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{2}\right) \cos^2\alpha + \frac{G_2}{2},$$

$$N_1 = \left(G + \frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{2}\right) \sin^2\alpha + \frac{G_1 + G_3}{2} \text{ şi } N_2 = \left(G + \frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{2}\right) \cos^2\alpha + \frac{G_2 + G_3}{2}.$$

c. Se constată că, pentru unul din cele mai simple exemple, calculul este destul de greoi şi devine din ce în ce mai încărcat cu cît numărul barelor este mai mare. Or, grinzile cu zăbrele din tehnică au 30, 40 şi chiar mai multe bare.

Deoarece în problemele de dimensionare se cer, de obicei, rezultate cu aproximaţia, cel mult, a celei de a treia cifre semnificative, în calculul grinzilor cu zăbrele se pot face următoarele ipoteze şi simplificări :

1° Sarcinile exterioare se aplică numai la noduri.

2° Greutăţile barelor, necunoscute într-un prim calcul, se neglijează.

3° După determinarea lor, greutăţile barelor se consideră aplicate la noduri.

4° Deoarece aproximaţia unui calcul grafic îngrijit corespunde celei admise în tehnica construcţiilor, se preferă calculul grafic celui analitic.

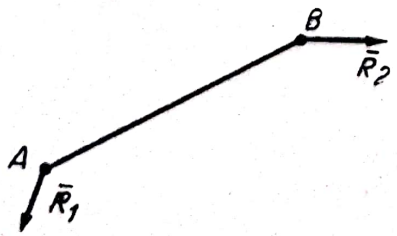


Fig. 230

d. Ca urmare a concentrării sarcinilor la noduri, barele sînt acţionate numai axial, adică la întindere sau la compresiune.

Pentru demonstraţie, se izolează bara AB din sistemul de bare articulate (fig. 230). Fie $\bar{R}_1$ rezultanta forţelor date, aplicate în A, şi a forţelor de legătură din acelaşi punct. La fel, fie $\bar{R}_2$ rezultanta forţelor date şi de legătură din B. Cum, potrivit ipotezelor,

între A şi B nu mai sînt forţe, pentru ca bara AB să rămînă în repaus este necesar şi suficient ca rezultantele $\bar{R}_1$ şi $\bar{R}_2$ să se echilibreze, ceea ce nu se poate decît dacă $\bar{R}_1$ şi $\bar{R}_2$ *sînt egale şi direct opuse*, adică acţionează în lungul axei barei. În aceste condiţii, bara nu poate fi solicitată decît *axial*, la *întindere* sau la *compresiune*.

e. **Efortul din bară.** Pentru a afla forţa de legătură interioară în articulaţia comună a două bare, ele au fost separate prin introducerea forţei necunoscute de legătură şi apoi s-au scris condiţiile de echilibru pentru fiecare bară. Metoda folosită în rezistenţa materialelor pentru aflarea felului de solicitare a unui solid este *metoda secţionării*. Astfel, în cazul unei bare *se presupune* că o parte (I) a barei este separată de cealaltă parte (II) printr-o secţiune plană, de obicei, normală pe axa barei. Pentru ca partea separată (fig. 231) să rămînă mai departe în repaus trebuie aplicat, asupra secţiunii, un sistem de forţe echivalent cu forţele aplicate asupra părţii suprimate (II). În cazul unei bare AB, întinsă de forţele $\bar{R}_1$ şi $\bar{R}_2$ (fig. 232, *a*), forţa echivalentă cu $\bar{R}_2$, notată cu $\bar{S}$, se numeşte *efortul* din secţiunea părţii I a barei. Tot astfel, efortul în secţiunea părţii a II-a a barei este $\bar{S}'$, egal şi de sens contrar cu $\bar{S}$ (fig. 232, *b*).

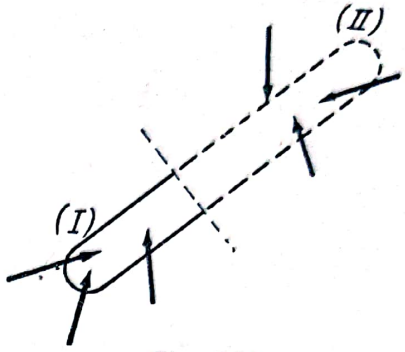


Fig. 231

Pentru simplificare se va nota cu S modulul comun al eforturilor $\bar{S}$ şi $\bar{S}'$, deoarece sensul lor este indicat pe figură. Efortul în bară este acelaşi oriunde ar fi închipuită secţiunea, iar dacă secţiunea ar fi chiar în nod, atunci efortul S ar reprezenta acţiunea barei AB suprimate asupra nodului *izolat*.

În figura 233, *a*, bara AB este întinsă, iar efortul S „pleacă“ de la nod, atît în A cît şi în B. În figura 233,*b* bara AB este *comprimată*, iar efortul S „vine“ spre nod. Reciproc, dacă efortul într-o bară „pleacă“ de la nod, bara este întinsă, şi dacă „vine“ spre nod, bara este comprimată.

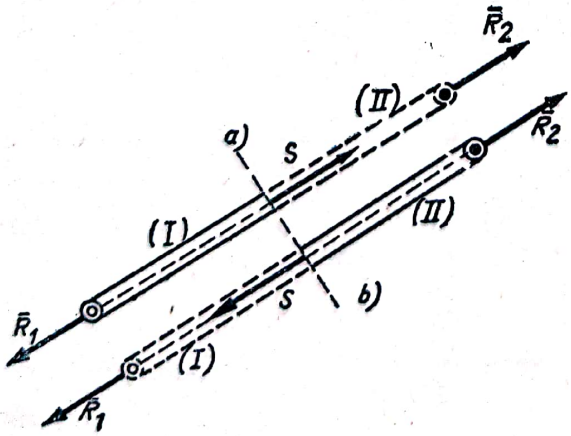


Fig. 232

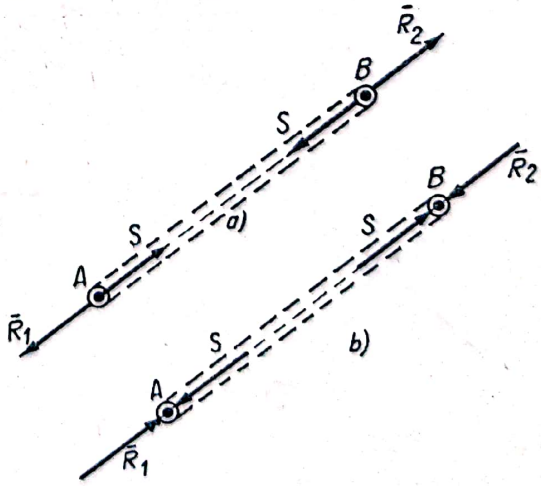


Fig. 233

Dacă într-un nod sînt articulate mai multe bare, nodul este acționat de *rezultanta forțelor exterioare* $\bar{R}$ și de eforturile din bare. În exemplul din figura 234, nodul A este acționat de $\bar{R}$ și de eforturile după direcțiile barelor notate cu *1*, *2* și *3*, adică de eforturile de compresiune S_1 și S_2 și de efortul de întindere S_3.

Sub acțiunea lor, nodul A trebuie să rămînă în repaus, deci: forțele date și eforturile necunoscute trebuie să se echilibreze.

Scriind condițiile de echilibru pentru fiecare nod, se ajunge la metoda izolării nodurilor, folosită la calcularea eforturilor în grinzile cu zăbrele.

f. Metoda izolării nodurilor se aplică astfel:

1° Se calculează toate forțele active, cum sînt: sarcinile aplicate asupra nodurilor, greutățile barelor, care dacă sînt cunoscute se consideră egal repartizate în nodurile de la capetele barelor respective. Dacă nu sînt cunoscute, ele se vor determina după dimensionare, în vederea calculelor de verificare.

2° Se determină reacțiunile (forțele de legătură exterioare), scriind condițiile de echilibru pentru sistemul de acțiuni și reacțiuni aplicate grinzii, considerată un solid rigid.

3° Se izolează succesiv fiecare nod în parte și se scriu condițiile de echilibru pentru forțele din fiecare nod, inclusiv eforturile din barele respective. Deoarece forțele sînt concurente, se pot scrie doar cîte două ecuații de proiecții pe două axe rectangulare pentru fiecare nod al grinzilor cu zăbrele plane. De aceea este indicat să se pornească operația de la un nod în care nu sînt decît două bare.

4° Dacă n este numărul de noduri ale grinzii plane, numărul total de ecuații de echilibru este $2n$. Trei din aceste ecuații servesc la determinarea forțelor de legătură exterioare (două pentru articulație și una pentru reazem). În aceste condiții rămîn disponibile $2n$—3 ecuații pentru calcularea eforturilor în bare. Deci, pentru ca sistemul să fie determinat *este necesar* ca numărul b al barelor să satisfacă relația:

$$b = 2n - 3^*.$$

Se precizează că această condiție este *necesară* fără a fi și suficientă, deoarece se pot construi sisteme articulate, la care repartizarea barelor este astfel făcută încît unele părți sînt mecanisme, iar altele, static nedeterminate. Astfel, sistemul arătat în figura 235, cu toate că satisface condiția necesară:

$$13 = 2 \cdot 8 - 3,$$

are în partea (a) o bară mai puțin, iar în partea (b) o bară în plus.

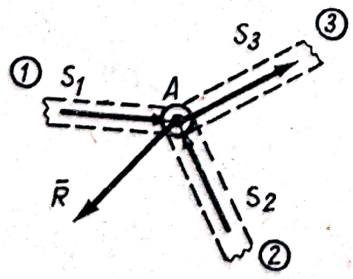


Fig. 234

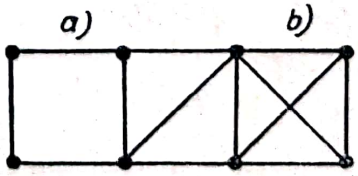


Fig. 235

* În cazul grinzilor cu zăbrele în spațiu condiția este: $b = 3n - 6$.

5° Dacă:

$$b < 2n - 3,$$

sistemul poate fi un mecanism, şi dacă:

$$b > 2n - 3,$$

sistemul este static nedeterminat, iar determinarea completă a eforturilor nu se poate face decît în rezistenţa materialelor, unde se mai ţine seama şi de caracteristicile fizice ale materialului şi de deformaţii.

6° Efortul necunoscut dintr-o bară se presupune că pleacă de la nod, că bara este *întinsă*. Dacă după rezolvarea ecuaţiilor de echilibru efortul calculat este pozitiv, înseamnă că sensul arbitrar ales corespunde realităţii. În caz contrar, bara este în realitate comprimată, iar efortul vine la nod. În acest caz, cînd se trece la nodul din celălalt capăt al barei, efortul se orientează în sensul corect.

La fel se procedează pînă la sfîrşit cu fiecare nod în parte.

7° Chiar dacă toate eforturile din bare au fost determinate înainte de operaţia de izolare a ultimelor noduri, calculele se vor duce pînă la capăt tocmai pentru că prin izolarea ultimelor noduri se obţine cea mai simplă şi eficace verificare a rezultatelor.

8° În aplicaţii se foloseşte, de preferinţă, compunerea şi descompunerea forţelor prin construcţia grafică a poligonului forţelor concurente. Calculul grafic, cu toate că dă rezultate aproximative, este preferabil deseori calculului analitic, pentru că este mai simplu şi permite evitarea unor erori grosolane.

În tehnica construcţiilor, la proiectare, se folosesc epure care concentrează, după diferite metode, toate poligoanele forţelor într-o singură figură. Una din cele mai cunoscute este metoda Cremona-Maxwell.

g. **Aplicaţie.** Se consideră grinda plană $ABCDE$ articulată în A, simplu rezemată (bilateral) în B, cu forma, dimensiunile şi acţionările din D şi E, arătate în figura 236. Să se calculeze eforturile în bare.

Rezolvare. În primul rînd se numerotează barele de la 1 la 7, se notează nodurile şi se verifică dacă sistemul este static determinat ($7 = 2 \cdot 5 - 3$).

În al doilea rînd, se eliberează sistemul de legăturile exterioare, introducîndu-se reacţiunile din $A(X, Y)$ şi $B(N)$. Condiţiile de echilibru pentru sistemul forţelor exterioare (fără greutăţile barelor) sînt:

$$X - N + P = 0, \qquad Y - 4P = 0,$$

$$6aN - 7aP - 2aP - 5a \cdot 3P = 0,$$

momentele fiind calculate faţă de A. De aici rezultă:

$$X = 3P, \qquad Y = 4P, \qquad N = 4P,$$

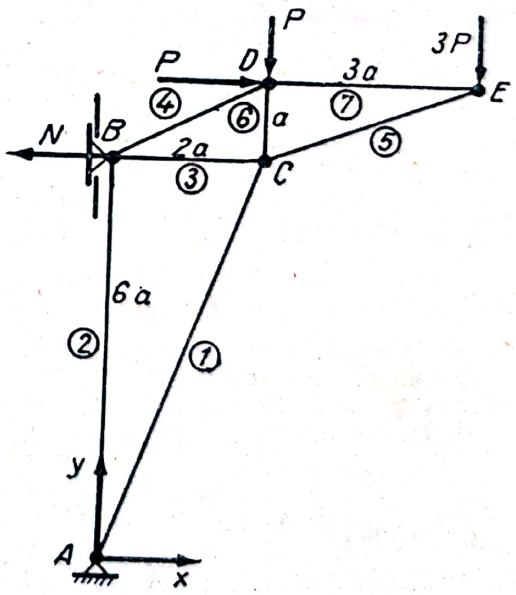


Fig. 236

după care se începe operaţia de izolare a nodurilor, presupunîndu-se toate eforturile necunoscute de întindere.

În nodurile A şi E sînt numai cîte două bare.

În nodul A (fig. 237, a), condiţiile de echilibru sînt :

$$S_1 \cos \alpha + 3P = 0,$$

$$S_1 \sin \alpha + S_2 + 4P = 0,$$

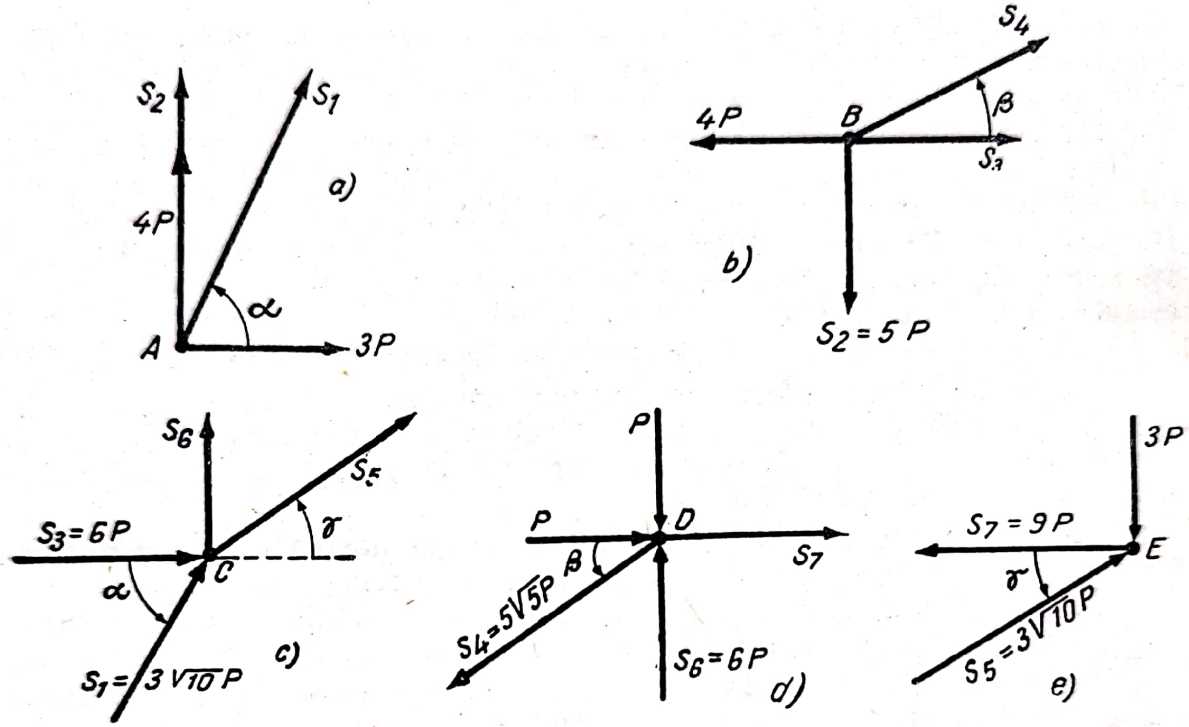


Fig. 237

iar din triunghiul dreptunghic ABC se obţine :

$$\operatorname{tg} \alpha = 3, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Rezultatele sînt :

$$S_1 = -3\sqrt{10}\,P \quad \text{şi} \quad S_2 = 5P,$$

adică în realitate bara *1* este comprimată, iar *2* întinsă.

Trecînd la nodul C se va orienta efortul în bara *1* spre nod. Deoarece în nodul C mai rămîn trei bare ale căror eforturi nu sînt cunoscute *3*, *6* şi *5*, se trece la nodul B.

Echilibrul forţelor şi eforturilor din nodul B (fig. 237, b), exprimat prin ecuaţiile :

$$S_3 + S_4 \cos \beta - 4P = 0, \qquad S_4 \sin \beta - 5P = 0,$$

cu relaţiile :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}, \qquad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

duce la următoarele rezultate:

$$S_3 = -6P \text{ (compresiune) și } S_4 = 5\sqrt{5}\,P \text{ (întindere).}$$

Situația în nodul C (fig. 237, c) este dată de sistemul de ecuații:

$$S_5 \cos\gamma + 3\sqrt{10}\,P\cos\alpha + 6P = 0, \qquad S_6 + S_5 \sin\gamma + 3\sqrt{10}\,P\sin\alpha = 0,$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{3}, \qquad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{10}}, \qquad \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

care rezolvat dă:

$$S_5 = -3\sqrt{10}\,P \text{ (compresiune)}, \quad S_6 = -6P \text{ (compresiune).}$$

Sistemul de ecuații pentru nodul D (fig. 237, d) este:

$$S_7 + P - 5\sqrt{5}\,P\cos\beta = 0, \qquad 6P - 5\sqrt{5}\,P\sin\beta - P = 0.$$

Din prima se obține:

$$S_7 = 5\sqrt{5}\,P\,\frac{2}{\sqrt{5}} - P = 9P \text{ (întindere),}$$

iar ecuația a doua:

$$6P - 5\sqrt{5}\,P\,\frac{1}{\sqrt{5}} - P \equiv 0$$

dă o primă verificare a calculului.

Cu toate că s-au determinat eforturile în toate barele, scriind condițiile de echilibru ale forțelor și eforturilor din nodul E (fig. 237, e), se obțin alte două ecuații de verificare:

$$3\sqrt{10}\,P\cos\gamma - 9P = 3\sqrt{10}\,P\,\frac{3}{\sqrt{10}} - 9P \equiv 0,$$

$$3\sqrt{10}\,P\sin\gamma - 3P = 3\sqrt{10}\,P\,\frac{1}{\sqrt{10}} - 3P \equiv 0.$$

Observație. Existența celor trei ecuații de verificare se explică prin aceea că, în afara celor zece ecuații de echilibru scrise, cîte două de fiecare nod, s-au mai scris la început și trei ecuații pentru echilibrul întregului sistem, ecuații care nu pot fi independente, deoarece, de îndată ce toate nodurile sînt în repaus, și întregul sistem se găsește în repaus.

h. Metoda secțiunilor (Ritter). Metoda izolării nodurilor necesită trecerea de la un nod la altul. Dacă uneori trebuie determinat efortul dintr-o anumită bară sau se urmărește variația efortului dintr-o anumită bară în funcție de deplasarea și variația sarcinilor pe grindă, metoda devine greoaie. În asemenea cazuri, se folosește metoda secționării grinzii, astfel ca *printr-o secțiune care trece prin bara considerată și prin încă alte două bare să se separe grinda în două părți.* Introducînd eforturile în barele secționate și scriind condițiile de echilibru ale forțelor (forțe exterioare și eforturi), aplicate uneia din părți, se poate ușor și imediat calcula efortul căutat.

Și la această metodă calculul începe prin determinarea obișnuită a forțelor date și a celor de legătură exterioare.

Observație. Deoarece numărul ecuațiilor scalare de echilibru pentru un sistem de forțe în plan este *trei* (două ecuații de proiecții și una de momente sau trei ecuații de momente, în raport cu trei puncte necolineare etc.), pentru ca metoda secționării să fie avantajoasă este necesar ca:

Scanned with OKEN Scanner

— numărul barelor secţionate să nu fie mai mare ca trei, altfel ar trebui repetată metoda şi cu alte secţiuni pînă la determinarea necunoscutelor;
— cele trei bare secţionate să nu treacă toate prin acelaşi nod, altfel ecuaţia de momente nu poate servi la calcularea eforturilor din bare.

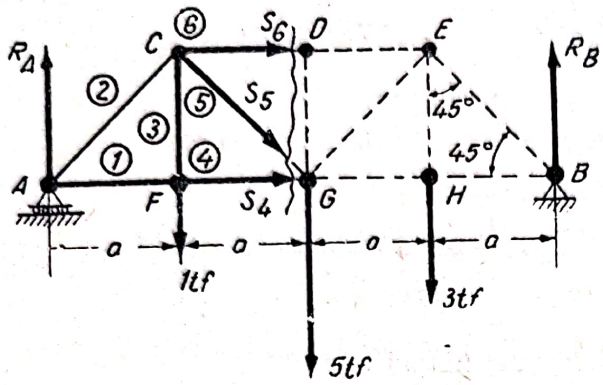


Fig. 238

i. **Aplicaţie.** Să se calculeze efortul din bara *5* a grinzii cu zăbrele cu forma, dimensiunile şi încărcarea indicate în figura 238.

Rezolvare. Se calculează reacţiunile:

$$R_A = 4 \text{ tf} \quad \text{şi} \quad R_B = 5 \text{ tf}.$$

Se secţionează grinda în dreptul barei *5*, în aşa fel încît secţiunea să întîlnească numai trei bare (de exemplu *4*, *5*, *6*). Se introduc eforturile din barele secţionate în ipoteza că toate sînt întinse.

Se scriu ecuaţiile de echilibru pentru partea din stînga a grinzii. Astfel, din ecuaţia de proiecţie pe verticală:

$$R_A - 1 \text{ tf} - S_5 \cos 45° = 0 \quad \text{sau} \quad 4 \text{ tf} - 1 \text{ tf} - S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

se obţine:

$$S_5 = +3\sqrt{2} \text{ tf (întindere)}.$$

Observaţie. Pentru calculul efortului din bara *4* se scrie ecuaţia de momente în raport cu nodul *C*, deoarece dispar din ecuaţie necunoscutele S_5 şi S_6 şi rămîne doar necunoscuta căutată, S_4:

$$S_4 a - R_A a = 0, \quad \text{deci:} \quad S_4 = 4 \text{ tf (întindere)}.$$

La fel, pentru S_6, se aplică ecuaţia de momente în raport cu nodul *G*, punctul de intersecţie al barelor *4* şi *5*:

$$-R_A \cdot 2a + 1 \text{ tf} \cdot a - S_6 a = 0 \quad \therefore \quad S_6 = -7 \text{ tf (compresiune)}.$$

C. STATICA FIRELOR

§ 89. Exemple

a. În viaţa practică, în tehnică, se folosesc solide caracterizate, în primul rînd, prin aspectul lor geometric: au două din dimensiunile lor foarte mici în comparaţie cu cea de a treia, *lungimea*. În al doilea rînd, pot fi înfăşurate cu destulă uşurinţă pe solide cilindrice, în al treilea rînd, sînt caracterizate printr-o deformaţie foarte mică în sensul lungirii lor. Astfel:

Scanned with OKEN Scanner

1° Transmiterea energiei electrice la distanţe mari se face prin cabluri aeriene, suspendate pe stîlpi sau piloni (v. grinzi cu zăbrele) (fig. 239).

2° La podurile suspendate sînt întrebuinţate cabluri care susţin tablierul podului (fig. 240).

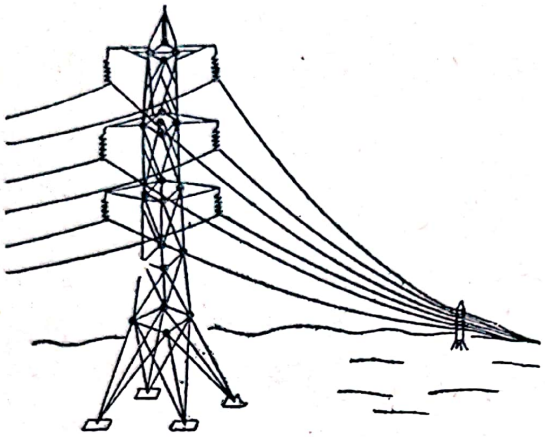


Fig. 239

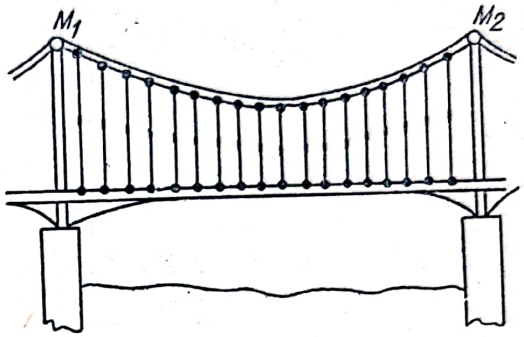


Fig. 240

3° Frînarea vehiculelor se face cu ajutorul unor cabluri sau benzi metalice înfăşurate pe cilindri (fig. 241).

b. Condiţiile mecanice pe care practica şi tehnica le pun acestor solide se rezumă la următoarele:

1° Să se înfăşoare cît mai bine pe suprafeţele altor solide, adică să fie cît se poate de flexibile.

2° Să nu se lungească sub acţiunea forţelor care le întind, adică să fie pe cît se poate neextensibile.

3° Să fie cît mai rezistente cu putinţă.

Asemenea solide pot fi înglobate, într-o primă aproximaţie, în *conceptul de fir* al mecanicii newtoniene, aşa după cum a fost definit la § 2, sau în acela de sistem deformabil de bare articulate între ele la capetele lor, unele după altele, în ipoteza că, numărul lor tinzînd spre infinit, lungimea lor totală rămîne constantă.

Din punct de vedere geometric, în mecanică, firele sînt considerate *curbe continue.*

De aceea, studiul firelor se bazează pe cunoştinţe de analiză şi geometrie diferenţială (v. cap. III).

c. **Problemele staticii firelor** se încadrează şi ele în tipurile generale de probleme ale mecanicii: *directe*, *inverse* sau *mixte.* Astfel:

1° *Problemă directă.* Un fir de greutate neglijabilă este înfăşurat de unghiul θ (în radiani) pe un disc cir-

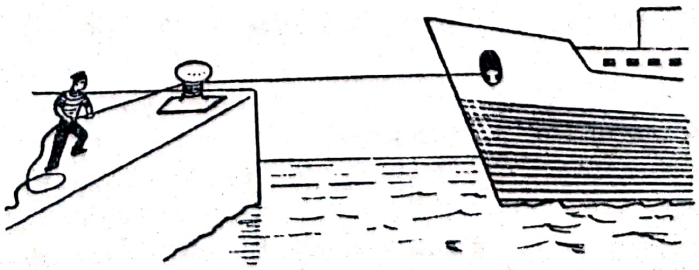


Fig. 241

cular fix şi este acţionat la capete de forţele $\bar{T}_2$ şi $\bar{T}_1$. Dacă μ este coeficientul de frecare între fir şi disc, să se exprime relaţiile dintre modulele forţelor pentru ca firul să nu fie deplasat în nici unul din cele două sensuri posibile (fig. 242).

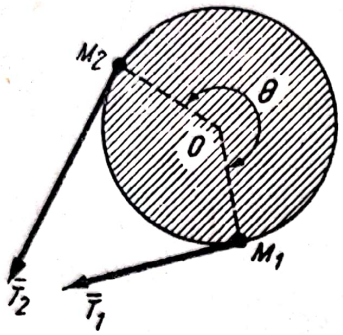


Fig. 242

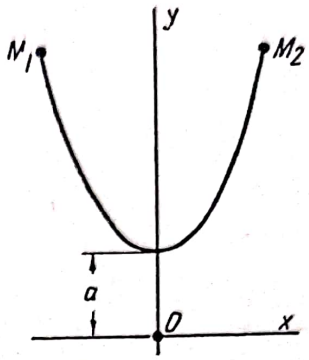


Fig. 243

Condiţiile, stabilite pentru întîia dată de *Euler*, sînt:

$$e^{-\mu\theta} \leqslant \frac{T_2}{T_1} \leqslant e^{\mu\theta}.$$

2° *Problemă inversă.* Un fir omogen de lungime $2l$, de greutate $\bar{p}$, pe unitatea de lungime de fir, este suspendat de două puncte situate pe aceeaşi orizontală. Să se determine poziţia de repaus, adică curba de echilibru a firului.

Ecuaţia curbei este:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

care reprezintă curba denumită în matematici *lănţişor* (fig. 243).

Pentru a studia problemele de statica firelor, la început se vor stabili ecuaţiile generale vectoriale, din care apoi se vor deduce ecuaţiile scalare.

§ 90. Ecuaţiile vectoriale ale staticii firelor

a. Se presupune că un fir, cu capetele fixate în A şi B, este alcătuit dintr-un mare număr de bare drepte elementare, articulate între ele, unele după altele. Se izolează una din aceste bare elementare de cele vecine, prin aplicarea forţelor de legătură în articulaţiile de la capetele ei. Se exprimă condiţiile de echilibru ale forţelor date şi de legătură aplicate barei elementare, după care se trece la limită.

În figura 244, MM' este un element de arc Δs al curbei de echilibru. Bara elementară MM' este coarda arcului Δs. În raport cu reperul cu originea în O, $\bar{r}$ şi $\bar{r}'$ sînt vectorii de poziţie ai capetelor barei. Se notează:

$$\Delta\bar{r} = \overline{MM'}, \quad \text{deci} \quad \bar{r}' = \bar{r} + \Delta\bar{r},$$

cu $\bar{T}$ şi $\bar{T}'$ forţele de legătură ale barei MM' cu barele vecine, neglijîndu-se frecarea din articulaţii[1]. Se mai notează cu $\bar{p}$ *forţa exterioară* raportată la unitatea de lungime de fir. În general, $\bar{p}$ depinde de $\bar{r}$ şi, prin intermediul acestuia, de s. Această *forţă unitară* reprezintă acţiunile exterioare asupra unităţii de lungime a firului.

Deoarece:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta\bar{r}|}{\Delta s} = 1,$$

se presupune, de la început, că asupra barei elementare acţionează, într-un punct M_1, forţa $\bar{p}\Delta s$.

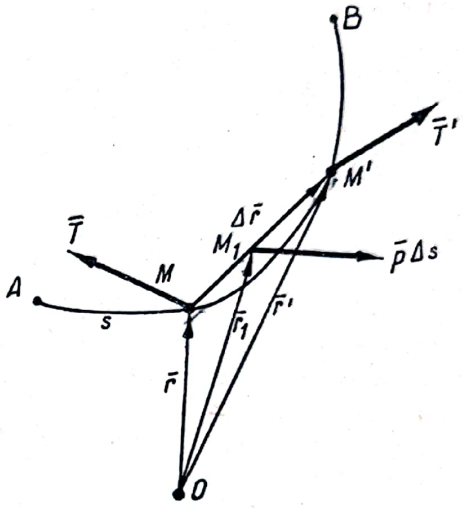


Fig. 244

Poziţia punctului M_1 este determinată de:

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \lambda\Delta\bar{r}. \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$$

Condiţiile vectoriale de echilibru sînt date de ecuaţia:

$$\bar{T} + \bar{p}\,\Delta s + \bar{T}' = 0 \qquad (8.7)$$

şi de ecuaţia de momente în raport cu un punct oarecare, de exemplu M:

$$(\lambda\Delta\bar{r}) \times \bar{p}\Delta s + (\Delta\bar{r}) \times \bar{T}' = 0. \qquad (8.8)$$

Se mai poate scrie şi o ecuaţie echivalentă pentru momentele în raport cu M':

$$(-\Delta\bar{r}) \times \bar{T} + (\lambda - 1)\,(\Delta\bar{r}) \times \bar{p}\,\Delta s = 0. \qquad (8.9)$$

Dacă se împarte fiecare din ecuaţiile (8.8) şi (8.9) prin Δs şi se trece la limită ($\Delta s \to 0$), se ajunge la:

$$-\bar{t} \times \bar{T} = 0 \qquad \bar{t} \times \bar{T}' = 0, \qquad (8.10)$$

unde $\bar{t} = \frac{d\bar{r}}{ds}$ este versorul tangentei, în punctul curent, la curba firului.

b. *Observaţii şi consecinţe.* 1° Ecuaţiile (8.10) se pot interpreta astfel:

[1] Deoarece firul este conceput perfect flexibil, se neglijează cuplurile care ar acţiona în articulaţii.

α) Dacă se secţionează firul AB în M', partea AM' este menţinută în repaus de forţa $\bar{T}'$ tangentă la curba de echilibru şi orientată spre $M'B$ (fig. 245).

β) Dacă se secţionează firul în M, partea AM este menţinută în repaus de forţa $\bar{T}$, iar partea MB de forţa $-\bar{T}$.

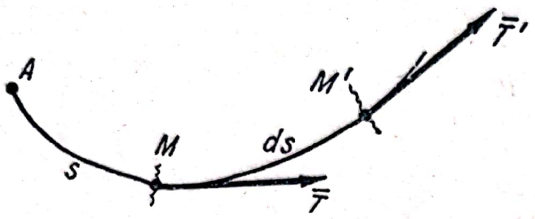


Fig. 245

γ) Dacă se izolează elementul de fir MM', forţele de legătură de la capetele M şi M' sînt $-\bar{T}$ şi $\bar{T}'$.

În consecinţă:

Forţa de legătură, în orice punct al firului, este dirijată după tangenta la curba de echilibru în sensul părţii de care se separă partea considerată, adică este o întindere.

2° În aceste condiţii, *exprimînd că forţele de legătură de la capetele elementului de fir sînt eforturi de întindere, tangente la curba de echilibru*, nu mai rămîne decît ecuaţia (8.7) ca singura condiţie necesară şi suficientă de echilibru.

3° Ca urmare la observaţia 1° γ), ecuaţia (8.7) se scrie:

$$\bar{T}' - \bar{T} + \bar{p}\Delta s = 0 \tag{8.11}$$

sau:

$$\Delta\bar{T} + \bar{p}\Delta s = 0, \tag{8.12}$$

de unde:

$$\frac{\Delta\bar{T}}{\Delta s} + \bar{p} = 0$$

şi în fine la limită:

$$\frac{d\bar{T}}{ds} + \bar{p} = 0 \quad \text{sau} \quad dT + \bar{p}ds = 0. \tag{8.13}$$

Deoarece cele trei forţe $-\bar{T}$, $\bar{T}'$ şi $\bar{p}\Delta s$ se echilibrează, ele sînt în mod necesar în acelaşi plan. Acest plan, determinat de punctul M, de tangenta din M şi de tangenta din M', tinde la limită ($\Delta s \to 0$) către planul osculator din punctul curent M. În consecinţă, *forţa unitară $\bar{p}$ dintr-un punct M se află totdeauna în planul osculator din M*. Cu alte cuvinte, curba de echilibru a firului se adaptează astfel încît forţele aplicate în orice punct al firului să fie cuprinse în planul osculator din acel punct al firului.

§ 91. Ecuaţiile scalare în raport cu triedrul natural

a. Fie triedrul natural $Mtnb$ cu originea în punctul M, determinat pe curbă prin arcul s, măsurat de la originea arcelor A (fig. 246). Se notează cu T valoarea efortului din M şi cu p_t, p_n, p_b valorile proiecţiilor pe axele triedrului ale forţei unitare $\bar{p}$.

Pentru a afla ecuațiile de echilibru în raport cu acest triedru se proiectează ecuația vectorială (8.13) pe axele triedrului. Pentru aceasta, derivînd expresia :

$$\bar{T} = T\bar{t}, \tag{8.14}$$

se obține :

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = \frac{dT}{ds}\bar{t} + T\frac{d\bar{t}}{ds} =$$

$$= \frac{dT}{ds}\bar{t} + T\frac{\bar{n}}{R}, \tag{8.15}$$

pe baza primei formule a lui Frenet.

Folosind și expresia complexă :

$$\bar{p} = p_t\bar{t} + p_n\bar{n} = p_b\bar{b}, \tag{8.16}$$

se ajunge la ecuațiile scalare :

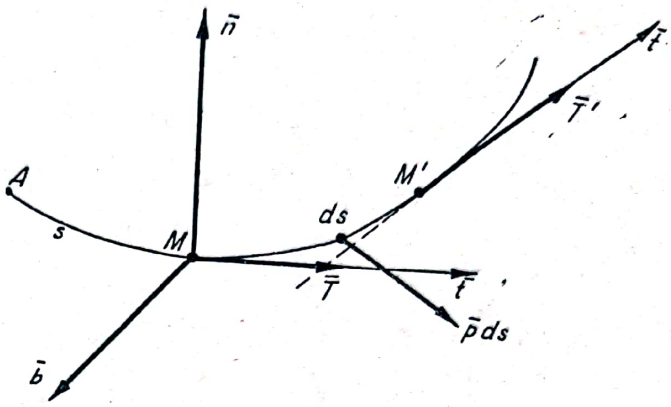


Fig. 246

$$\frac{dT}{ds} + p_t = 0, \qquad \frac{T}{R} + p_n = 0, \qquad p_b = 0, \tag{8.17}$$

unde $\frac{1}{R}$ este curbura din M a curbei.

b. *Observații.* 1° Ecuațiile (8.17) permit următoarele interpretări :

α) Din prima ecuație se deduce că variația tensiunii din fir este proporțională cu componenta tangențială a forței unitare.

β) Din ecuația a doua, scrisă sub forma :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{T}(-p_n) \quad ,$$

se deduce că curbura liniei de echilibru a firului este invers proporțională cu tensiunea din fir, este direct proporțională cu componenta normală a forței unitare din punctul considerat, iar concavitatea curbei este opusă sensului acestei componente.

γ) Din ecuația a treia rezultă, cum s-a văzut, că linia de echilibru a firului conține forța unitară din fiecare punct în planul osculator al curbei din punctul considerat.

2° Din aceleași ecuații se deduc și următoarele cazuri particulare :

α) În cazul firului acționat numai la capete ($\bar{p} = 0$) rezultă :

$$\frac{dT}{ds} = 0 \qquad \text{și} \qquad \frac{T}{R} = 0,$$

de unde :

$$T = \text{const.} \qquad \text{și} \qquad R = \infty,$$

adică forma de echilibru este o linie dreaptă, iar tensiunea este constantă în lungul firului.

β) În cazul firului acționat numai de sarcini normale pe direcția firului:

$$\bar{p} = p_n \bar{n} \quad \text{și} \quad p_t = 0;$$

deci:

$$\frac{dT}{ds} = 0, \qquad T = T_0 = \text{const.},$$

$$\frac{1}{R} = -\frac{p_n}{T_0};$$

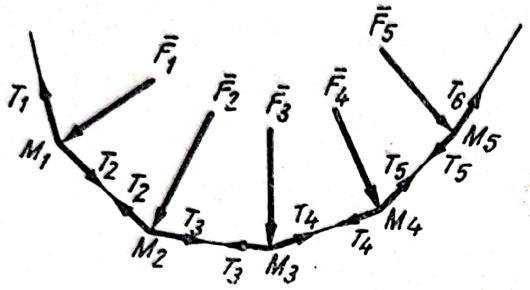


Fig. 247

curbura depinde numai de modulul forței unitare. Astfel, dacă $p_n = \text{const.}$, linia de echilibru este un cerc.

γ) În cazul în care firul este acționat numai de sarcini concentrate (fig. 247), efortul din fir este constant între punctele de aplicație ale sarcinilor și variază discontinuu în aceste puncte. Forma liniei de echilibru este *poligonală* și este corespunzătoare, ca aspect, *poligonului funicular* de la construcția grafică a vectorului rezultant al unui sistem de vectori alunecători situați în același plan. Aceasta explică și denumirea dată construcției grafice.

§ 92. Frecarea firelor

a. Frecarea firelor găsește multe aplicații în tehnică și în practică. Se pot da exemple la frînarea vehiculelor cu ajutorul unor benzi înfășurate pe cilindri, la transmisiile prin curele sau cabluri etc.

Transmisia mișcării, de la un arbore la altul, prin curele care înfășoară roțile solidare cu arborii, nu s-ar putea realiza fără frecarea dintre curele și roți.

În toate aceste cazuri intervine frecarea de alunecare dintre un fir și un disc de obicei circular. Dacă unul din cele două solide, discul sau firul, este fix, frecarea de alunecare amortizează mișcarea celuilalt și procesul se numește frînare. Dacă nici unul nu este fix, frecarea de alunecare servește la antrenarea lor în mișcare, cum este cazul la transmisiile prin curele, la scripeți etc.

b. Pentru studiul problemei enunțate la § 89, c, 1°, se consideră un fir, de greutate neglijabilă, înfășurat de un anumit unghi, între punctele M_1 și M_2, pe un disc fix de rază R. Avînd în vedere frecarea la alunecare, de coeficient μ, se vor exprima condițiile de echilibru ale firului acționat de forțele $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ și de forțele de legătură cu discul.

Fie M un punct curent al firului între M_1 şi M_2, determinat prin parametrul θ (fig. 248), măsurat în radiani, de la M_1. Se consideră triedrul natural $Mtnb$, axa Mb fiind perpendiculară pe planul discului. Se notează cu p_n şi p_t valorile componentelor forţei unitare după normală şi tangentă. Componenta după normală este reacţiunea discului faţă de acţiunile $\bar{T}_1$ şi $\bar{T}_2$, datorită înfăşurării firului, iar componenta tangenţială este datorită frecării.

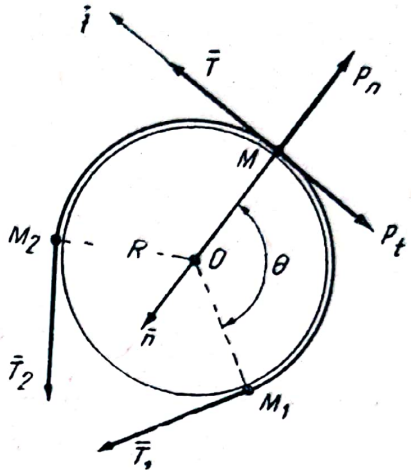


Fig. 248

În consecinţă :

$$p_t \leqslant \mu p_n . \tag{8.18}$$

Pentru determinarea tensiunii T din punctul curent M, se aplică ecuaţiile (8.17) :

$$\frac{dT}{ds} - p_t = 0, \qquad \frac{T}{R} - p_n = 0, \tag{8.19}$$

unde s-a ţinut seama de sensurile componentelor forţei unitare faţă de sensurile axelor.

Deoarece $ds = R d\theta$, prin eliminarea parametrilor s, p_n, p_t şi R se obţine :

$$\frac{dT}{T} \leqslant \mu d\theta. \tag{8.20}$$

Se integrează ecuaţia şi se pun condiţiile la limită :

$$\theta = 0, \qquad T = T_1, \qquad \sphericalangle M_1OM_2 = \theta, \qquad T = T_2,$$

iar rezultatul, în ipoteza $T_2 > T_1$, este :

$$\frac{T_2}{T_1} \leqslant e^{\mu\theta}. \tag{8.21}$$

În ipoteza $T_1 > T_2$, condiţia de echilibru este :

$$\frac{T_1}{T_2} \leqslant e^{\mu\theta}. \tag{8.22}$$

Din (8.21) şi (8.22) rezultă condiţiile necesare şi suficiente, stabilite de Euler, pentru ca firul să rămînă în repaus :

$$e^{-\mu\theta} \leqslant \frac{T_2}{T_1} \leqslant e^{\mu\theta}. \tag{8.23}$$

c. *Observaţie.* Datorită frecării, modulul forţei $\bar{T}_1$ care se opune acţiunii $\bar{T}_2$, $|\bar{T}_2| > |\bar{T}_1|$, apare multiplicat prin coeficientul $e^{\mu\theta}$. Valorile mari pe care le poate primi acest coeficient, cînd firul este înfăşurat de mai multe ori pe disc şi cînd μ este mare, explică cum poate fi frînat cu uşurinţă un vehicul de către un singur om.

În tabela 1 se găsește calculat coeficientul de multiplicare pentru diferite valori ale unghiului de înfășurare θ și ale coeficientului de frecare la alunecare μ:

Tabela 1

Numărul de înfășurări n		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	5
Unghiul de înfășurare θ	în grade	90	180	360	540	720	1 080	1 800
	în rad.	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	3π	4π	6π	10π
μ		$e^{\mu\theta}$						
0,1		1,17	1,37	1,87	2,57	3,50	6,60	23,1
0,2		1,37	1,87	3,50	6,60	12,3	43,4	535,5
0,25		1,48	2,20	4,80	10,6	23,1	111,3	2 570
0,3		1,60	2,57	6,60	16,9	43,4	285,7	12 300
0,4		1,87	3,50	12,3	43,4	152,4	1 881	286 000
0,5		2,20	4,80	23,1	111,3	535,5	12 300	6 600 000

d. Aplicații. 1° Coeficientul de frecare dintre un cablu și discul fix pe care se înfășoară este 0,4 pe timp uscat și 0,2 pe ploaie. De cîte ori trebuie să înfășoare cablul un om, capabil să tragă de cablu cu 25 kgf, pentru a echilibra o forță de 1 000 kgf?

Rezolvare. Se va folosi tabela 1. Coeficientul de multiplicare este $\frac{1\,000}{25} = 40$. Un coeficient de multiplicare apropiat (43,4) se găsește în dreptul liniei $\mu = 0{,}4$ la coloana $n_1 = \frac{3}{2}$ înfășurări, sau în dreptul liniei $\mu = 0{,}2$ la coloana $n_2 = 3$ înfășurări.

În lipsa tabelei, din inecuația:

$$1\,000 \text{ kgf} \leqslant 25 \text{ kgf } e^{0{,}40}$$

se găsește:

$$\theta_1 \geqslant \frac{1}{0{,}4} \ln 40 \approx 9{,}23 \text{ rad etc.}$$

2° O roată motoare de rază R transmite prin curea (fig. 249) cuplul de moment M. Cunoscînd coeficientul de frecare μ între roată și curea, se cere să se calculeze tensiunile din curea: T_2 în partea conducătoare și T_1 în partea condusă.

Rezolvare. În primul rînd, din ecuația de momente se obține:

$$T_2 - T_1 = \frac{M}{R};$$

apoi, deoarece cureaua va trebui *să nu alunece* față de roată:

$$T_2 \leqslant T_1 e^{\mu\theta}.$$

Din rezolvarea sistemului se găsește:

$$T_1 \geqslant \frac{M}{R(e^{\mu\theta} - 1)}, \qquad T_2 = T_1 + \frac{M}{R}.$$

Exemplu numeric.

$$R = 1 \text{ m}, \quad M = 300 \text{ kgfm}, \quad \mu = 0{,}25,$$

$$T_1 = 250 \text{ kgf}, \quad T_2 = 550 \text{ kgf}.$$

Observație. Dacă $M = 0$, $T_1 = T_2$, adică roata ar funcționa ca un scripete, fără frecări în fus.

3° Cu o frînă de mînă trebuie să se echilibreze un cuplu de moment $\bar{M}$ care acționează asupra axului unei roți de rază R. Banda frînei este acționată de forța $\bar{P}$ printr-o pîrghie articulată în A. Cunoscînd unghiul de înfășurare θ al benzii și coeficientul de frecare μ între bandă și roată, se cere să se calculeze valoarea minimă a forței necesare frînării (fig. 250).

Rezolvare. Notînd cu T_1 și T_2 ($T_2 > T_1$) tensiunile de la capetele benzii, se scriu aceleași condiții ca în aplicația precedentă. În plus, din ecuația de momente în raport cu A pentru toate forțele aplicate pîrghiei:

$$-P(a + b) + (T_1 + T_2)\, a \sin\frac{\theta}{2} = 0,$$

se deduce:

$$P \geqslant \frac{M}{R} \frac{e^{\mu\theta} + 1}{e^{\mu\theta} - 1} \frac{a}{a + b} \sin\frac{\theta}{2}.$$

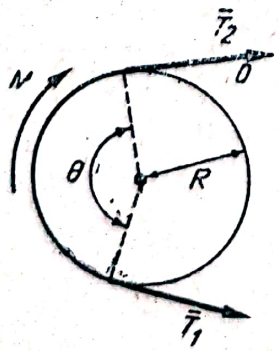


Fig. 249

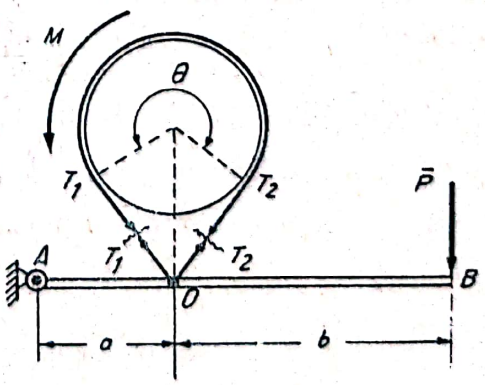


Fig. 250

§ 93. Ecuațiile scalare în raport cu un triedru fix

a. Fie triedrul tridreptunghic $Oxyz$ (fig. 251). Se notează cu:
x, y, z — coordonatele punctului curent M al curbei de echilibru;
X, Y, Z — valorile proiecțiilor efortului $\bar{T}$ din M și cu:
p_x, p_y, p_z — valorile proiecțiilor forței unitare $\bar{p}$ pe aceleași axe.

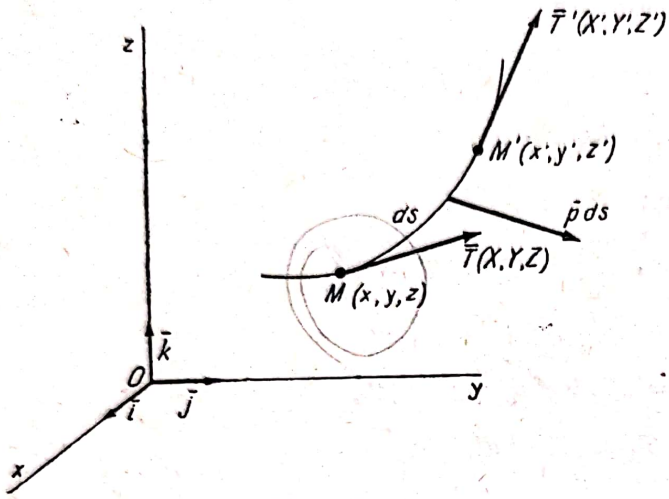


Fig. 251

Se proiectează ecuația (8.13), stabilită la § 90, scrisă sub forma:

$$d\bar{T} + \bar{p}ds = 0,$$

și se obțin primele trei condiții scalare pentru echilibru:

$$\begin{aligned} dX + p_x ds &= 0, \\ dY + p_y ds &= 0, \\ dZ + p_z ds &= 0; \end{aligned} \qquad (8.24)$$

apoi, deoarece eforturile sînt tangente la curbă, rezultă:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}, \qquad (8.25)$$

și în fine:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}. \qquad (8.26)$$

b. *Observații.* 1° Cele șase ecuații vor servi la determinarea coordonatelor x, y, z în funcție de s, adică a ecuațiilor parametrice ale curbei de echilibru, precum și la calcularea efortului $\bar{T}$ într-un punct oarecare M al firului.

2° Dacă forțele exterioare, reprezentate prin $\bar{p}$ (forța pe unitatea de lungime a firului) sînt paralele cu o direcție dată, curba de echilibru a firului este plană.

În adevăr, dacă axa Oy este paralelă cu direcția forței unitare $\bar{p}$, în acest caz:

$$p_x = 0, \quad p_y \neq 0 \quad \text{și} \quad p_z = 0.$$

Grupul ecuațiilor (8.24) devine:

$$dX = 0, \quad dY + p_y ds = 0, \quad dZ = 0.$$

Integrînd prima și ultima ecuație:

$$X = A, \quad Z = C,$$

și înlocuind rezultatele în (8.25):

$$\frac{dx}{A} = \frac{dz}{C},$$

se obține prin integrare:

$$Az - Cx = B,$$

reprezentînd ecuația unui plan paralel cu Oy, în care se găsește curba de echilibru a firului.

§ 94. Curbe funiculare

Forma curbei de echilibru depinde de legea de variație a forței unitare $\bar{p}$. Aplicațiile următoare au la bază ipotezele cele mai simple și în același timp cele mai des întîlnite în practică.

a. **Lănțișorul** este curba de echilibru a unui fir omogen greu, suspendat între două puncte fixe. Forțele exterioare aplicate pe unitatea de lungime fiind paralele, curba de echilibru este plană. Firul fiind omogen, $p = \text{const.}$

Se alege ca plan Oxy, planul curbei de echilibru, și axa Oy după verticală (fig. 252).

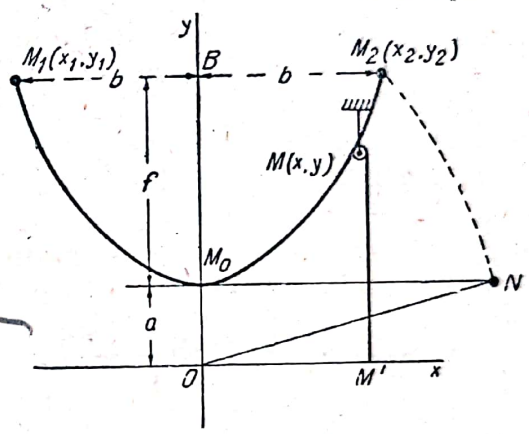


Fig. 252

Cele șase ecuații (8.24), (8.25) și (8.26) se reduc la următoarele patru:

$$dX = 0, \qquad dY - p\,ds = 0,$$

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}, \qquad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \tag{8.27}$$

Din prima ecuație rezultă:

$$X = A,$$

iar din aceasta și din a treia:

$$Y = A\frac{dy}{dx},$$

care înlocuită în a doua, dă:

$$A\,d\left(\frac{dy}{dx}\right) - p\,ds = 0.$$

Ținînd seama și de ultima ecuație din (8.27), rezultatul eliminării variabilelor X, Y și s este ecuația diferențială a curbei de echilibru:

$$A\frac{d^2y}{dx^2} - p\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0.$$

Folosind substituția $\frac{dy}{dx} = u$, ecuația devine:

$$A\frac{du}{dx} - p\sqrt{1 + u^2} = 0$$

și se rezolvă prin separarea variabilelor:

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{p}{A}\,dx,$$

adică:

$$\operatorname{arg\,sh}\ u = \frac{p}{A}x + C_1$$

sau

$$u = \frac{dy}{dx} = sh\left(\frac{p}{A}x + C_1\right).$$

Integrînd din nou:

$$y = C_2 + \frac{A}{p}\operatorname{ch}\left(\frac{p}{A}x + C_1\right), \tag{8.28}$$

se găsește ecuația curbei de echilibru a firului omogen greu, *„lănțișorul"*.

Cele trei constante de integrare A, C_1 și C_2 se determină în funcție de datele și de condițiile la limită ale problemei.

Se consideră următorul caz particular:

Firul, de lungime $2l$, este suspendat între două puncte M_1 și M_2, situate pe aceeași orizontală la distanța $2b$ între ele. Dacă axa Oy trece prin mijlocul segmentului M_1M_2 (fig. 252), coordonatele punctelor de suspensie sînt: $x_1 = -b$, $x_2 = b$, $y_1 = y_2$, în care numai b este cunoscut, deoarece axa Ox nu este încă determinată.

Scriind că ecuația este satisfăcută de coordonatele punctelor M_1 și M_2:

$$y_1 = C_2 + \frac{A}{p}\operatorname{ch}\left(-\frac{p}{A}b + C_1\right) = y_2 = C_2 + \frac{A}{p}\operatorname{ch}\left(\frac{p}{A}b + C_1\right),$$

rezultă $C_1 = 0$.

Se calculează ordonata punctului M_0 de pe axa Oy:

$$y_0 = C_2 + \frac{A}{p}.$$

Deoarece în această expresie apar două constante de integrare, A și C_2, se poate păstra una singură, notată:

$$y_0 = \frac{A}{p} = a$$

și care se determină scriind că arcul de lănțișor M_0M_2 are lungimea dată l, adică:

$$\int_{M_0}^{M_2} ds = l.$$

Însă:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx = \left(\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right)dx$$

și integrînd între $x = 0$ și $x = b$, se găsește:

$$l = a \operatorname{sh} \frac{b}{a},$$

o ecuație transcendentă în a. În cazul exemplelor numerice, ecuația se poate rezolva cu aproximație, folosindu-se tabelele sinusului hiperbolic[1].

În aceste condiții, s-au determinat toate constantele de integrare, iar ecuația curbei de echilibru este adusă la forma:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right). \tag{8.29}$$

b. **Observații și consecințe.** 1° Pentru ca ecuația lănțișorului să poată fi astfel scrisă, este necesar ca axa Ox să fie situată, ca în figura 252, la distanța a de vîrful M_0.

2°. Se precizează că axa Ox nu este arbitrară, poziția ei depinzînd de condițiile la limită și de datele problemei.

3°. După determinarea constantei a și a ecuației curbei de echilibru, se calculează următoarele caracteristici geometrice și mecanice ale firului.

α) *Ordonatele punctelor* M_1 și M_2 sînt:

$$y_1 = y_2 = a \operatorname{ch} \frac{b}{a} = a\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{b}{a}} = \sqrt{a^2 + l^2}.$$

O construcție grafică simplă este arătată în figura 252: se ia, pe tangenta din M_0 la curbă, $M_0N = l$, și ipotenuza ON a triunghiului dreptunghic OM_0N este ordonata căutată.

β) *Săgeata curbei este*, prin definiție, *distanța maximă dintre coarda care unește extremitățile unui arc de curbă și punctele curbei.* În cazul de față:

$$f = y_1 - a = \sqrt{a^2 + l^2} - a.$$

---

[1] La un rezultat satisfăcător duce și dezvoltarea în serie:

$$\operatorname{sh} \frac{b}{a} = \frac{b}{a} + \frac{b^3}{3!\,a^3} + \frac{b^5}{5!\,a^5} + \dots$$

din care, oprind numai primii trei termeni și rezolvînd ecuația bipătrată:

$$12\,(l - b)\,a^4 - 2b^3a^2 - \frac{b^5}{10} = 0,$$

se găsește:

$$a \approx b\sqrt{\frac{b + \sqrt{1{,}2bl - 0{,}2b^2}}{12\,(l - b)}}.$$

γ) *Efortul într-un punct curent* $M(x, y)$ este:

$$T = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{A^2 + A^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = A\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = pa \operatorname{ch}\frac{x}{a} = py.$$

4° Se constată că efortul din orice punct al curbei de echilibru este egal cu produsul dintre greutatea pe unitatea de lungime și ordonata punctului considerat.

Astfel, efortul minim, în M_0, este:

$$T_0 = pa = A,$$

iar efortul maxim, la capete, este:

$$T_1 = T_2 = py_1 = p\sqrt{a^2 + l^2}.$$

5° Dacă firul este trecut, într-un punct oarecare M, peste un scripete mic și atîrnă de partea cealaltă a scripetelui cu o lungime egală cu y, linia de echilibru a firului, de la punctul de suspensiune M_1 pînă la scripete, rămîne în forma și poziția ei inițială. Aceasta ar putea duce la un mijloc experimental de determinare a axei Ox, respectiv a distanței a.

6° În timpul iernii, l se micșorează, firul contractîndu-se la frig, ceea ce duce la mărirea valorii a, apoi iarna poleiul care se depune pe fir mărește valoarea lui p, iar ambii factori duc la mărirea efortului, adică la ruperea firului dacă la dimensionarea lui nu s-a ținut seama și de acești factori.

c. Exemplu numeric. Între două puncte M_1 și M_2, situate pe aceeași orizontală, la distanța: $2b = 80$ m, este suspendat un cablu aerian de lungime: $2l = 100$ m, avînd greutatea de 12 kgf pe metru liniar. Să se calculeze elementele geometrice și efortul maxim pentru acest cablu (fig. 253).

Rezolvînd cu ajutorul tabelelor [1] ecuația:

$$50 = a \operatorname{sh}\frac{40}{a},$$

se găsește:

$$a = \frac{50}{1{,}47355}\text{ m} \approx 33{,}9\text{ m}.$$

Ordonatele punctelor de suspensie sînt:

$$y_1 = y_2 = \sqrt{(33{,}9)^2 + 50^2} = 60{,}4\text{ m},$$

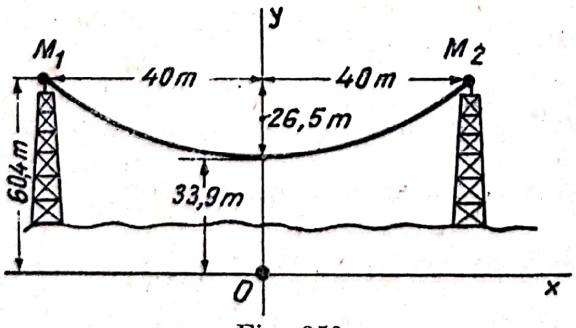


Fig. 253

iar săgeata:

$$f = 60{,}4 - 33{,}9 = 26{,}5\text{ m}.$$

Ecuația lănțișorului este:

$$y = 33{,}9 \operatorname{ch}\frac{x}{33{,}9} = 16{,}95\left(e^{\frac{x}{33{,}9}} + e^{\frac{-x}{33{,}9}}\right).$$

Efortul maxim în M_1 și M_2 este:

$$T_1 = T_2 = py_1 = 12\,\frac{\text{kgf}}{\text{m}} \cdot 60{,}4\text{ m} = 724{,}8\text{ kgf}.$$

[1] Folosind dezvoltarea în serie și ecuația bipătrată se găsește:

$$a = 33{,}8\text{ m}.$$

Se poate verifica, prin calcul, că dacă lungimea cablului se micşorează, de exemplu la 90 m, a creşte la 47,2 m; la fel, y_1 devine 65,2 m, săgeata de 18 m, iar efortul maxim de 782,4 kgf.

d. **Parabola.** De un fir de lungime $2l$, de greutate neglijabilă, cu capetele fixate în punctele M_1 şi M_2, situate la acelaşi nivel, la distanţa $2b$, este suspendată o bară orizontală (fig. 240) de greutate p pe unitatea de lungime. Să se afle poziţia de echilibru a firului şi efortul într-un punct oarecare al firului (problema podului suspendat).

Se alege ca axă Oy verticala care trece prin mijlocul firului. Sarcina elementară este $p\mathrm{d}x$, iar ecuaţiile de echilibru sînt:

$$\mathrm{d}X = 0, \quad \mathrm{d}Y - p\mathrm{d}x = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{X} = \frac{\mathrm{d}y}{Y}.$$

Prin integrare se obţine:

$$X = A, \quad Y = px + C;$$

apoi din:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{Y}{X} = \frac{p}{A}x + C_1$$

se deduce ecuaţia curbei de echilibru a firului:

$$y = \frac{p}{2A}x^2 + C_1x + C_2,$$

care reprezintă o *parabolă*.

Constantele C_1 şi C_2 se determină prin condiţiile la limită, adică:

$$x = 0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_0 = 0, \quad \text{deci } C_1 = 0.$$

Se notează $\frac{A}{p} = a$ şi se alege axa Ox astfel ca ordonata mijlocului să fie chiar a. În acest caz, ecuaţia parabolei este:

$$y = \frac{x^2}{2a} + a.$$

Constanta a se determină scriind că lungimea curbei între mijlocul ei M_0 şi M_2 este l (fig. 254):

$$\int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{b}{2a}\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{a}{2}\ln\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} = l.$$

S-a obţinut o ecuaţie transcendentă în raport cu a.

Cu ajutorul tabelelor sau folosind dezvoltarea în serie [1] se poate determina valoarea necunoscutei a cu aproximaţia dorită.

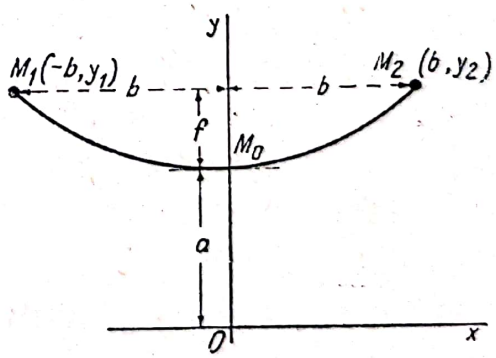


Fig. 254

[1] Prin dezvoltarea în serie se poate ajunge la o ecuaţie similară cu aceea găsită la lănţişor:

$$12\,(l - b)\,a^4 - 2b^3\,a^2 + \frac{3}{10}\,b^5 = 0$$

şi la rezultatul:

$$a \approx b\sqrt{\frac{b + \sqrt{4{,}6\,b^2 - 3{,}6\,bl}}{12\,(l - b)}}.$$

O dată cunoscută constanta a, se calculează caracteristicile:

1° *Ordonatele punctelor* M_1 și M_2: $y_1 = y_2 = \frac{b^2}{2a} + a$.

2° *Săgeata:* $f = y_1 - a = \frac{b^2}{2a}$.

3° *Efortul într-un punct curent* $M(x, y)$:

$$T = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{A^2 + p^2x^2} = p\sqrt{a^2 + x^2}.$$

Efortul minim în M_0 este: $T_0 = pa$.
Efortul maxim în M_1 sau M_2 este:

$$T_1 = T_2 = p\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Expresiile lor în funcție de săgeată sînt:

$$T_0 = p\frac{b^2}{2f}, \quad T_1 = T_2 = pb\sqrt{\frac{b^2}{4f^2} + 1},$$

care, prin măsurarea săgeții, permit determinarea practică a eforturilor din fir.

e. **Firul foarte întins.** Cazul firului omogen greu, foarte întins, caz care se întîlnește la mai toate firele suspendate ale rețelelor telefonice, ale rețelelor de distribuție electrică, se înglobează în cazul studiat al cablurilor care susțin podurile suspendate.

În adevăr, la un fir foarte întins, diferența dintre l și b fiind mică, a devine mare, iar din dezvoltarea în serie a ecuației lănțișorului:

$$y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a} = a\left(1 + \frac{x^2}{2!\,a^2} + \frac{x^4}{4!\,a^4} + \ldots\right)$$

sînt suficienți numai primii doi termeni, deoarece a este mult mai mare decît x pe tot domeniul de variație al variabilei x.

Astfel, cu o bună aproximație, în loc de ecuația lănțișorului, se poate folosi ecuația parabolei:

$$y = a + \frac{x^2}{2a},$$

lucru care se face pe scară largă la proiectarea rețelelor aeriene.

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA A TREIA
DINAMICA ŞI CINEMATICA

CAPITOLUL IX
INTRODUCERE
A. GENERALITĂŢI
§ 95. Precizări în legătură cu principiile fundamentale

a. În capitolul I s-a arătat că mişcarea mecanică este una din cele mai simple forme de mişcare a materiei, schimbarea poziţiei relative, în timp, a corpurilor.

Pentru a studia, de pildă, mişcarea unui sistem de puncte materiale, trebuie să se cunoască în orice moment poziţiile, în raport cu un reper, ale tuturor punctelor sistemului. În particular, dacă poziţiile punctelor nu variază cu timpul, sistemul se află în repaus faţă de reperul considerat.

Deoarece în natură nu există nici un corp (reper) fix, mişcarea mecanică (ca şi repausul) are un caracter relativ în sens fizic, adică se studiază cu ajutorul *elementelor ei relative* (traiectorie, viteză, acceleraţie), în raport cu reperul considerat.

Astfel, reluînd exemplul de la § 3, mişcarea bilei care cade în vagonul A, deşi este absolută şi unică prin natura ei, adică independentă de reper, poate fi studiată şi observată în trei moduri diferite, din trei sisteme de referinţă, cu mişcări diferite.

Plecînd de la astfel de exemple, mecanicienii idealişti au ajuns la concluzia eronată că mişcarea ar avea un caracter relativ şi în sens filozofic, nu numai fizic, şi că — în consecinţă — mişcarea nu ar exista în mod obiectiv, independent de subiectul observator.

Lenin a demonstrat[1] că o asemenea abordare a raportului dintre relativ, absolut şi obiectiv în cunoaştere este neîntemeiată. În orice lege confirmată de experienţă, de practică, există un conţinut care nu depinde de om, de subiect. Acesta este adevărul obiectiv.

Indiferent de modul cum ea apare observatorului, mişcarea bilei ascultă de legea obiectivă a căderii corpurilor. După cum s-a arătat la § 3, aspectul cel mai apropiat de adevărul obiectiv l-ar da studiul în raport cu reperul heliocentric.

b. Tot în capitolul I, la §§ 1, 2, 3, 5, s-a mai arătat că mecanica newtoniană este construită pe baza unor concepte cum sînt: spaţiul euclidian absolut, timpul universal absolut, solidul rigid, reperul inerţial etc.

---

[1] V. I. Lenin. *Materialism şi empiriocriticism*. Editura P.M.R., 1948.

Scanned with OKEN Scanner

Ca urmare, în mecanica newtoniană:

1) drumul cel mai scurt dintre două puncte se măsoară pe linia dreaptă care le unește;

2) unitatea de măsură pentru lungimi este invariabilă, independentă de locul măsurătorii și de mișcarea instrumentului sau a obiectului măsurat;

3) timpul se măsoară în orice punct al spațiului prin același fenomen fizic (ceasornic), adică: dacă în toate punctele spațiului ar exista ceasornice sincronizate, ele ar rămîne sincrone, independent de poziția și de mișcarea observatorului.

Folosind aceste concepte, mecanica newtoniană a dat rezultate verificate de practică într-o serie de probleme, în altele rezultatele au constituit o primă aproximare a legilor obiective ale mișcării materiei, iar pentru mișcări cu viteze mari, comparabile cu viteza luminii, rezultatele nu au fost confirmate de experiențe.

Cu toate acestea, domeniul de aplicare al acestei mecanici este larg, cuprinzînd aproape totalitatea problemelor puse de tehnica inginerească.

c. În consecință, ori de cîte ori se vor aplica principiile lui Newton sau se va scrie ecuația fundamentală:

$$m\bar{a} - \bar{F} = 0,$$

se va presupune că observațiile se fac dintr-un reper imobil față de un reper considerat ca inerțial în problema studiată, că masa punctului material este constantă, iar dacă forțele date și de legătură se echilibrează ($\bar{F} = 0$), mișcarea punctului este uniformă ($\bar{v} = \bar{c}$), adică este rectilinie cu viteza constantă.

§ 96. Sisteme de unități de măsură

a. **Mărimi fundamentale.** După definirea noțiunilor și a mărimilor, se pune problema măsurării acestor mărimi. Măsurarea unei mărimi se face comparînd-o cu o mărime de același fel, aleasă ca *unitate de măsură*. Rezultatul comparării este un *număr*, iar mărimea măsurată se poate exprima prin produsul numărului rezultat cu unitatea aleasă. Dacă se alege o altă unitate de măsură, numărul rezultat din comparare este altul. El variază invers proporțional cu mărimea unității de măsură.

Mărimile dintr-un domeniu al științelor sînt legate între ele, iar unitățile de măsură respective pot fi grupate în sistemul de unități de măsură.

În domeniul mecanicii sînt folosite două sisteme generale de unități de măsură: *sistemul general fizic* și *sistemul tehnic*.

Sistemele generale diferă între ele prin mărimile care sînt alese ca fundamentale.

Astfel, în sistemul general fizic mărimile fundamentale sînt: *masa*, *lungimea* și *timpul*, corespunzînd noțiunilor de: *materie*, *spațiu* și *timp*.

În sistemul tehnic se consideră ca mărimi fundamentale: *forța*, *lungimea* și *timpul*.

Sistemul tehnic nu satisface prima din condițiile cerute sistemelor de unități: *unitățile de măsură să fie independente de locul măsurătorii.*

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, unitatea de măsură pentru forţă din acest sistem, *kilogramul-forţă* (kgf), reprezintă greutatea unui anumit etalon, adică forţa cu care Pământul atrage acest etalon. Măsurînd cu un dinamometru greutatea etalonului se obţin rezultate variabile, în funcţie de latitudinea şi de înălţimea locului.

Sistemul tehnic de unităţi de măsură este înlocuit în ştiinţă de sistemele fizice de unităţi de măsură.

b. **Sistemele generale fizice** se deosebesc între ele prin unităţile de măsură alese pentru aceleaşi mărimi. Astfel:

1° *Sistemul* MKS *sau practic* are ca unităţi fundamentale: metrul, kilogramul şi secunda.

α) *Metrul* (m), unitatea pentru lungime, este lungimea, la temperatura de 0°C, a etalonului internaţional de platină iridiată, păstrat la Biroul Internaţional de Măsuri şi Greutăţi din Sèvres — Franţa[1].

β) *Kilogramul* (kg), unitatea pentru masă, este masa etalonului internaţional, de platină iridiată, păstrat la Sèvres. Această masă este reprezentată aproximativ de masa unui decimetru cub de apă distilată la temperatura de 4°C şi la presiunea de o atmosferă.

γ) *Secunda* (s), unitatea pentru timp, este a 86 400-a parte a zilei solare medii.

2° *Sistemul* CGS, folosit în cercetări teoretice şi la lucrări fine de laborator (fizică, chimie etc.), are următoarele unităţi:

α) *Centimetrul* (cm), pentru lungime, a suta parte dintr-un metru;

β) *Gramul* (g), pentru masă, a mia parte dintr-un kilogram;

γ) *Secunda* (s).

3° *Sistemul* MTS are aceleaşi unităţi pentru lungime şi timp ca şi sistemul MKS, deosebindu-se prin unitatea de masă, care este *tona* masă ($1\ t = 10^3\ kg$).

Acest sistem, adoptat în unele ţări, nu are aplicare largă şi este pe cale să dispară, fiind şi el înlocuit prin sistemul practic MKS.

c. **Unităţi derivate în diferite sisteme.** O dată cu definirea mărimilor derivate, se vor stabili şi unităţile lor de măsură în diferite sisteme, precum şi relaţiile dintre ele.

Astfel, *unitatea de forţă* în sistemele fizice se defineşte ca *forţa care imprimă unităţii de masă unitatea de acceleraţie în direcţia şi în sensul forţei.*

1° *În sistemul* MKS, unitatea de forţă se numeşte *newton* (N) şi este forţa care imprimă masei de 1 kg o acceleraţie de $1\ \frac{m}{s^2}$.

Deoarece 1 kgf imprimă masei unui decimetru cub de apă distilată acceleraţia greutăţii de $9{,}81\ \frac{m}{s^2}$, se înţelege că: $1\ kgf = 9{,}81\ N$.

2° *În sistemul* CGS, unitatea de forţă, *dina* (dyn), imprimă masei de 1 g acceleraţia de $1\ \frac{cm}{s^2}$.

Legătura dintre 1 N şi 1 dyn se stabileşte astfel: 1 N imprimă masei de 1 000 g acceleraţia de $100\ \frac{cm}{s^2}$, deci: $1\ N = 10^3 \cdot 10^2\ dyn = 10^5\ dyn$.

[1] Noul *metru*, adoptat în octombrie 1960, se bazează pe lungimea de undă a radiaţiei atomului de cripton 86.

La fel: 1 kgf = 981 000 dyn; 1 gf = 981 dyn.

3° *În sistemul* MTS, unitatea de forţă se numeşte *stenă* (sn) şi la fel se stabilesc următoarele relaţii:

$$1 \text{ sn} = 10^3\text{N} = 10^8 \text{ dyn} = \frac{1\,000}{9{,}81} \text{ kgf} \approx 102 \text{ kgf}.$$

4° *În sistemul tehnic* MKfS, forţa fiind considerată o mărime fundamentală, masa devine o mărime derivată. Unitatea de masă nu are în acest sistem o denumire. Unitatea tehnică de masă (notată u) este masa căreia unitatea de forţă îi imprimă unitatea de acceleraţie din sistemul considerat. Deoarece 1 kgf imprimă masei conţinute într-un decimetru cub de apă distilată (unitatea de masă în sistemul practic) acceleraţia de $9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, pentru ca acceleraţia să fie egală cu $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, trebuie ca unitatea de masă să fie de 9,81 ori mai mare.

Deci, unitatea tehnică de masă echivalează cu masa conţinută în 9,81 dm^3 de apă, adică cu 9,81 kg.

d. **Observaţii şi completări.** 1° Se ştie că forţele se măsoară cu dinamometrul, iar masele se compară cu ajutorul balanţei. Cînd se cîntăreşte 1 kg de mere, prin kilogram se înţelege masa merelor, o masă echivalentă cu masa etalonului aşezat pe celălalt taler al balanţei. Acest etalon este denumit impropriu greutate, deoarece greutatea este forţa cu care Pămîntul atrage deopotrivă atît merele cîntărite cît şi etalonul de 1 kg masă.

Forţa de atracţie este 1 kgf şi nu trebuie confundată cu masa de 1 kg.

2° Pentru un corp cu greutatea G (kgf), *masa* lui se măsoară în sistemul practic MKS, prin acelaşi număr G kilograme. În sistemul tehnic, în care unitatea de masă este de 9,81 ori mai mare decît kilogramul, masa corpului este $\frac{G}{9{,}81}\, u$.

e. **Aplicaţie.** Un solid, care cîntăreşte 5 kg, este aşezat pe o planşetă orizontală. Asupra solidului acţionează, paralel cu planşeta, o forţă de 1 kgf (fig. 255).

Să se calculeze acceleraţia imprimată solidului, dacă se neglijează frecările, iar solidul este asimilat cu un punct material.

Rezolvare. În sistemul MKS, masa solidului este 5 kg, iar forţa 9,81 N; deci:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{9{,}81 \text{ N}}{5 \text{ kg}} = 1{,}96 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

În sistemul MKfS, masa solidului este $\frac{5}{9{,}81}\, u$, deci:

$$a = \frac{1 \text{ kgf}}{\frac{5}{9{,}81}\, u} = 1{,}96 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Fig. 255

B. CINEMATICA PUNCTULUI

§ 97. Caracteristicile cinematice ale mişcării

a. **Mişcarea mecanică** a corpurilor, sisteme materiale în interacţiune, este studiată în dinamică. Orice problemă de dinamică trebuie privită sub un triplu aspect: *geometric*, *cinematic* şi *fizic*.

Scanned with OKEN Scanner

1° *Aspectul geometric* reflectă *poziţia* în raport cu un reper, *forma* şi *dimensiunile* sistemului material, care pot fi *variabile* sau *invariabile.*

Variaţia poate apărea atît în poziţia sistemului, cînd acesta este *deplasat* faţă de reper, cît şi în formă şi dimensiuni, cînd sistemul material este *deformat.*

Deplasare înseamnă operaţia prin care o figură geometrică este adusă dintr-o poziţie în alta. Astfel, profilul (*C*) (fig. 256) poate fi adus din prima poziţie *i)*, *poziţia iniţială*, în ultima *f)*, *poziţia finală.* Această operaţie geometrică se poate face într-o infinitate de moduri, timpul şi forţele nejucînd nici un rol.

Deformarea sistemului material se consideră nulă în *mecanica teoretică* atît timp cît se menţine *ipoteza rigidităţii.* În *mecanica aplicată*, deformarea nu poate fi cîtuşi de puţin neglijată, ea caracterizînd unul din *aspectele nemecanice* ale interacţiunii.

Aspectul geometric mai cuprinde şi *gradele de libertate* îngăduite sistemelor de diferite *condiţii geometrice* sau *de legături.*

Deseori se consideră că şi *distribuţia maselor*, *calculul momentelor statice* şi al *momentelor de inerţie* fac parte tot din aspectul geometric al problemelor de mecanică, deşi noţiunea şi mărimea de masă oglindeşte aspecte fizice asociate fenomenului de interacţiune.

2° *Aspectul cinematic* cuprinde în plus, faţă de cel geometric, noţiunea şi mărimea de *timp.* Asociind deplasarea cu timpul se stabileşte o *corespondenţă biunivocă* între modificarea poziţiei sistemului material şi variaţia timpului, astfel încît deplasarea devine *continuă* şi *unică*, oglindind mişcarea mecanică a sistemului material din punctul de vedere al caracteristicilor ei cinematice : *traiectorii*, *distribuţia de viteze*, *distribuţia de acceleraţii*, *condiţii iniţiale* etc.

3° *Aspectul fizic* al mişcării mecanice reflectă *interacţiunea sistemelor materiale* şi necesită cunoaşterea, în orice moment, a *distribuţiei de mase* şi de *forţe* din sisteme.

b. Deoarece **studiul dinamic** este destul de complex, datorită triplului său aspect, deseori se socoteşte util să se cunoască mai dinainte caracteristicile cinematice ale unor mişcări. În acest fel, studiul dinamic al mişcării sistemelor este mult simplificat.

Un alt mijloc de simplificare îl constituie asimilarea sistemului material în mişcare cu un punct material. De obicei, pentru motive care vor fi justificate, punctul ales este chiar centrul de masă al sistemului. Mişcarea centrului de masă dă o imagine destul de incompletă a mişcării sistemului, totuşi deosebit de utilă pentru cunoaşterea acestei mişcări.

De aceea, studiul dinamic al mişcării unui sistem material este precedat de un studiu cinematic al mişcărilor posibile, iar acest studiu se începe cu cinematica punctului.

În acest scop se reiau şi se completează unele definiţii date la § 4.

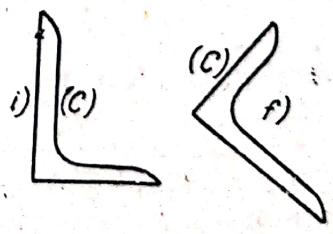


Fig. 256

c. **Traiectoria** este mulţimea continuă a poziţiilor prin care trece punctul mobil într-un interval de timp. Poziţia mobilului, într-un moment t, în raport

cu un sistem de referință reprezentat prin originea O, poate fi determinată cu ajutorul vectorului $\bar{r}$ (fig. 257). Dacă se cunosc, în orice moment t, caracteristicile vectorului variabil :

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \tag{9.1}$$

mișcarea punctului este perfect determinată. Pe de o parte, ecuația (9.1) reprezintă *traiectoria* mobilului M, care este în același timp și *hodograful* vectorului variabil $\bar{r}$ în raport cu reperul cu originea în O (v. § 29) și, pe de altă parte, aceeași ecuație exprimă și legea mișcării. Dacă se notează cu s arcul de curbă AM al traiectoriei, măsurat de la A (originea arcelor) în sensul creșterii lor pe curbă,

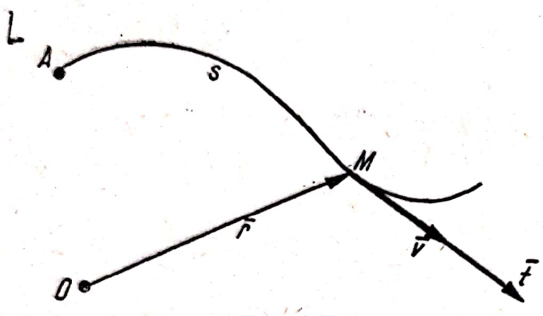


Fig. 257

$$s = s(t) \tag{9.2}$$

reprezintă legea de variație în funcție de timp a arcului sau *ecuația orară a mișcării.*

d. **Viteza.** Pe baza elementelor de analiză vectorială (§ 35), se reia definiția vitezei punctului mobil (v. § 4) :

Viteza punctului mobil este o mărime vectorială ce caracterizează direcția, sensul mișcării, precum și drumul parcurs în unitatea de timp. Viteza se exprimă prin derivata în raport cu timpul a vectorului de poziție al punctului mobil din momentul considerat, adică :

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}\,^{1}. \tag{9.3}$$

Observații. 1° Deoarece :

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s}\,\bar{t}\,, \tag{9.4}$$

se obține expresia vitezei în funcție de versorul tangentei la traiectorie și de derivata în raport cu timpul a arcului s.

2° Dacă s crește cu timpul, $\dot{s}$ este pozitiv și $\bar{v}$ are același sens cu versorul tangentei (mișcare directă).

Dacă s descrește, $\dot{s}$ este negativ, iar $\bar{v}$ are sensul contrar lui $\bar{t}$ (mișcare retrogradă).

3° Notînd $\dot{s}$ prin v, expresia vitezei se scrie :

$$\bar{v} = v\bar{t}, \tag{9.5}$$

unde v este valoarea vitezei în raport cu versorul tangentei.

---

[1] Această notație este folosită în mecanică exclusiv pentru derivata în raport cu timpul. Pentru a se evita confuzii posibile, notațiile y', y' din analiza matematică se înlocuiesc în mecanică prin $\frac{dy}{dx}$.

e. **Accelerația.** În general, viteza unui mobil variază cu timpul, atît în direcție cît și în modul (v. § 4). Pentru a avea o imagine a acestei variații, se construiește hodograful vitezei în raport cu un reper cu originea în O (fig. 258). Vectorii de poziție ai punctelor m, m' de pe hodograful vitezei sînt vectori echipolenți cu vitezele din punctele M, M' ale mobilului pe traiectorie.

Accelerația mobilului M pe traiectorie este o măsură a rapidității de variație a vitezei punctului M și o măsură a rapidității de mișcare a punctului m pe hodograful vitezei; deci:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}. \qquad (9.6)$$

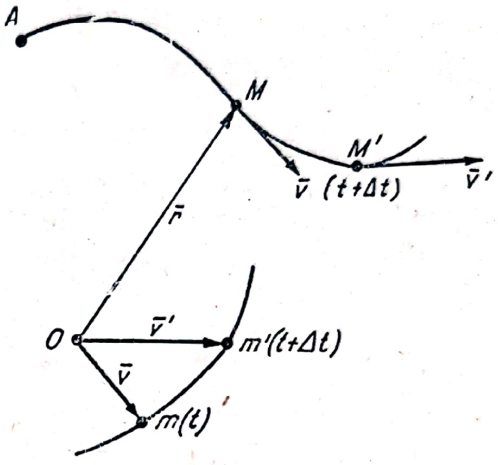


Fig. 258

Astfel că: *accelerația mobilului este viteza de variație a vectorului viteză, exprimată prin derivata vectorului viteză în raport cu timpul, sau prin derivata de ordinul doi a vectorului de poziție al mobilului în raport cu timpul.*

f. **Unități de măsură.** Unitatea de măsură pentru viteză este *viteza unui mobil care parcurge, în mișcare uniformă, un segment de dreaptă egal cu unitatea de lungime în unitatea de timp.*

Astfel, în sistemele MKS, MTS și MKfS, unitatea de măsură pentru viteză este *metrul pe secundă* (m/s), iar în sistemul CGS este *centimetrul pe secundă* (cm/s).

Unitatea de măsură pentru accelerație este *accelerația unui mobil pe o traiectorie rectilinie cu o viteză care variază cu cîte o unitate în unitatea de timp.*

În sistemele MKS, MTS și MKfS unitatea de accelerație este *metrul pe secundă la pătrat* (m/s^2), iar în sistemul CGS este *centimetrul pe secundă la pătrat* (cm/s^2).

g. **Aplicații.** 1° Să se arate că dacă accelerația unui mobil este nulă, în orice moment, traiectoria mobilului este rectilinie, iar viteza sa este constantă.

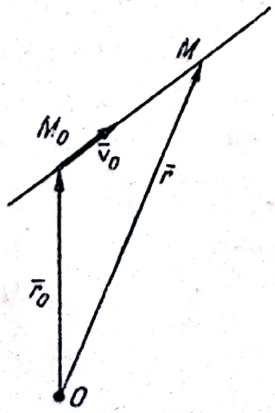


Fig. 259

Rezolvare. Pornind de la condiția:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} = 0,$$

prin două integrări se obține:

$$\dot{\bar{r}} = \bar{v} = \bar{c} \quad \text{și} \quad \bar{r} = \bar{c}t + \bar{c}_1.$$

Cele două constante de integrare $\bar{c}$ și $\bar{c}_1$ se pot determina dacă se cunosc condițiile inițiale ale mișcării, de pildă, la momentul $t = 0$, poziția M_0 ($\bar{r}_0$) și viteza $\bar{v}_0$ în raport cu reperul cu originea în O (fig. 259).

Ecuația găsită:

$$\bar{r} = \bar{v}_0 t + \bar{r}_0$$

reprezintă o dreaptă care trece prin M_0 și are direcția paralelă cu $\bar{v}_0$.

*

2° Să se verifice că dacă viteza unui mobil este $v = n\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, ea se mai poate exprima şi prin $v = 3{,}6\ n\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, unde n este un număr.

§ 98. Componentele vitezei şi acceleraţiei pe axele triedrului natural

a. **Componentele vitezei.** Viteza, fiind tangentă în M la traiectorie, nu are componente după normala şi binormala triedrului natural $Mtnb$ (fig. 260). Expresia vitezei este dată de $\bar{v} = v\bar{t}$.

b. **Componentele acceleraţiei** se obţin derivînd relaţia precedentă:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \dot{v}\bar{t} + v\dot{\bar{t}}.$$

Cum:

$$\dot{\bar{t}} = \frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{d\bar{t}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{\bar{n}}{R}\,v,$$

rezultă:

$$\bar{a} = \dot{v}\bar{t} + \frac{v^2}{R}\,\bar{n} = a_t\bar{t} + a_n\bar{n} + a_b\bar{b}, \tag{9.7}$$

unde s-au notat cu:

$$a_t = \dot{v} = \ddot{s}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R}, \qquad a_b = 0$$

valorile proiecţiilor acceleraţiei pe axele triedrului natural.

c. **Consecinţe şi observaţii.** 1° Acceleraţia are, în raport cu triedrul natural, numai două componente (proiecţii): una *tangenţială* $\dot{v}\bar{t}$ şi cealaltă *normală* $\frac{v^2}{R}\,\bar{n}$.

2° Acceleraţia în orice punct se află în planul osculator al traiectoriei din acel punct. Deoarece $\frac{v^2}{R}$ este pozitiv, acceleraţia este orientată spre concavitatea traiectoriei.

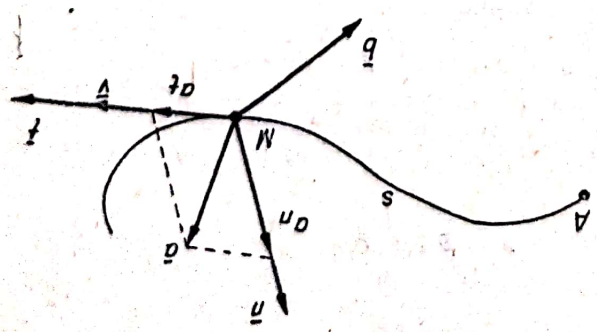


Fig. 260

3° Modulul acceleraţiei este:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{R^2}}\,. \tag{9.8}$$

4° Acceleraţia tangenţială măsoară variaţia modulului vitezei. Dacă valorile $\dot{v}$ şi v au acelaşi semn, mişca-

rea punctului este propriu-zis accelerată, deoarece modulul vitezei crește. Dacă valorile $\dot{v}$ și v sînt de semne contrare, mișcarea este întîrziată, deoarece modulul vitezei descrește.

5° Accelerația normală măsoară variația direcției vitezei. Ea se anulează o dată cu curbura traiectoriei (de exemplu, în momentul cînd mobilul trece printr-un punct de inflexiune al traiectoriei sau dacă aceasta este o linie dreaptă).

6° În mișcarea uniformă, accelerația este nulă în orice moment. Din (9.7) și (9.8) se deduc condițiile : $\dot{v} = 0$, $\frac{v^2}{R} = 0$; integrînd prima ecuație se obține $v = v_0 \neq 0$ (altfel nu ar fi mișcare) și înlocuind în cea de-a doua, rezultă $R = \infty$, adică mișcarea uniformă este neapărat rectilinie și cu viteză constantă în mărime (v. și § 97, e, 1°).

7° Mișcarea în care numai accelerația tangențială este nulă : $a_t = \dot{v} = 0$, se exprimă prin :

$$v = v_0 = \text{const.} \neq 0, \quad s = v_0 t + s_0, \quad a_n = \frac{v^2}{R} \neq 0.$$

Deoarece R este finit, traiectoria nu este o linie dreaptă, iar modulul vitezei este constant. Denumirea de uniformă dată acestei mișcări nu este potrivită, deoarece accelerația nu este nulă. Accelerația, în această mișcare, variază atît în direcție, deoarece traiectoria este curbă, cît și în modul, deoarece în fiecare punct traiectoria are altă curbură.

În tehnica mașinilor, un rol important îl joacă mișcările pe traiectorii cu curbură constantă : dreapta, cercul și elicea circulară. Deci, punctele care se mișcă cu viteză constantă în modul pe o traiectorie circulară sau elicoidală au și accelerația constantă tot în modul. S-ar putea denumi acest fel de mișcări *pseudouniforme*.

8° Mișcarea cu accelerația constantă : $\bar{a} = \bar{a}_0$ va fi studiată în dinamică la mișcarea punctului material acționat de o forță constantă în direcție, sens și modul.

d. **Aplicație.** *Mișcarea rectilinie uniform variată* este un caz particular al mișcării precedente (§ 98, c, 8°), deoarece pe lîngă constanța accelerației ea este caracterizată și prin forma particulară a traiectoriei (o linie dreaptă).

Aici, presupunînd că a_0 este valoarea accelerației constante în raport cu axa As de pe traiectoria rectilinie, se poate scrie :

$$\ddot{s} = \dot{v} = a_0.$$

Integrînd de două ori, se găsește :

$$\dot{s} = v = a_0 t + v_0 \qquad \text{și} \qquad s = \frac{a_0}{2} t^2 + v_0 t + s_0, \tag{9.9}$$

unde constanta de integrare v_0 reprezintă valoarea vitezei inițiale și s_0 abscisa poziției inițiale în raport cu originea A.

Se observă că relațiile (9.9) sînt valabile și în cazul mișcării curbilinii cu accelerație tangențială constantă (fig. 261).

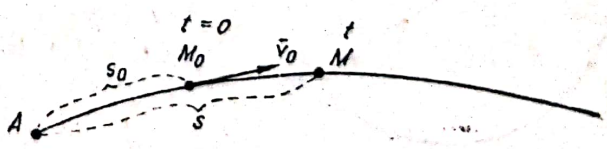


Fig. 261

Ca exerciţiu se vor reprezenta grafic relaţiile (9.9) în diferite ipoteze: $v_0 > 0$, $a_0 > 0$ sau $a_0 < 0$ etc.

Prima relaţie se reprezintă printr-o dreaptă, *diagrama vitezei*, cea de-a doua printr-o parabolă, *diagrama ecuaţiei orare*. Asemenea diagrame găsesc aplicaţii la graficele de mers ale trenurilor.

e. **Mişcarea circulară.** Se consideră un cerc O de rază r şi un punct A, originea arcelor s (fig. 262). Se alege sensul trigonometric ca sens direct pe cerc. Poziţia în momentul t a punctului mobil este determinată prin scalarul s. Dacă mişcarea mobilului este în sensul direct, s creşte. Se presupune că în momentul iniţial mobilul trece prin punctul M_0 determinat prin s_0 (pe figură $s_0 < 0$). Unghiurile la centru dintre razele OM, OM_0 şi raza OA — măsurate în radiani — sînt θ şi θ_0.

Se consideră triedrul natural $Mtnb$ (Mb este perpendicular pe planul figurii spre observator). Mişcarea este determinată dacă se cunoaşte ecuaţia orară:

$$s = s(t) \qquad \text{sau} \qquad \theta = \frac{s}{r} = \frac{1}{r}\, s\ (t) = \theta(t).$$

În adevăr, viteza punctului M este: $\bar{v} = \dot{s}\bar{t} = r\ \dot{\theta}\ \bar{t}$ şi este orientată în sensul versorului $\bar{t}$, dacă $\dot{\theta} > 0$, şi în sens opus, dacă $\dot{\theta} < 0$.

Definiţie. *Viteza unghiulară în momentul t:*

$$\omega = \dot{\theta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t},$$

este rapiditatea de variaţie a unghiului la centru θ *format de raza punctului mobil* M *şi raza originii arcelor* A.

Expresia *vitezei liniare* devine:

$$\bar{v} = r\ \omega\ \bar{t}. \tag{9.10}$$

Derivata vitezei în raport cu timpul dă acceleraţia liniară:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = r\dot{\omega}\bar{t} + r\omega\dot{\bar{t}} = r\dot{\omega}\bar{t} + r\omega\,\frac{v}{r}\,\bar{n}.$$

Definiţie. *Acceleraţia unghiulară în momentul t:*

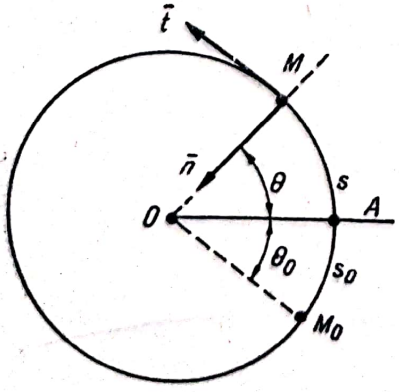


Fig. 262

$$\dot{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \dot{\theta}}{\Delta t} = \ddot{\theta}\ , \tag{9.11}$$

este rapiditatea de variaţie a vitezei unghiulare.

Expresia *acceleraţiei liniare* devine:

$$\bar{a} = r\dot{\omega}\bar{t} + r\omega^2\bar{n} \tag{9.12}$$

şi scoate în evidenţă cele două componente ale acceleraţiei liniare a punctului M în momentul t, reprezentate prin valorile:

$a_t = r\dot{\omega}$ (tangenţială) şi

$a_n = r\omega^2$ (normală, centripetă).

Modulul acceleraţiei liniare este :

$$|\bar{a}| = r\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}. \tag{9.13}$$

Unitatea de măsură a vitezei unghiulare este — în toate sistemele — 1 *radian pe secundă* $\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$, iar a acceleraţiei unghiulare este 1 *radian pe secundă la pătrat* $\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)$.

f. Mişcări circulare particulare. 1° Mişcarea pseudouniformă este caracterizată prin viteza unghiulară constantă : $\dot{\theta} = \omega = \omega_0$.

Integrînd, se deduce ecuaţia orară a mişcării :

$$\theta = \omega_0 t + \theta_0,$$

$$s = r\theta = r\,\omega_0 t + r\theta_0 = v_0 t + s_0.$$

Acceleraţia nu are componentă tangenţială, deoarece $\dot{\omega} = \dot{\omega}_0 = 0$, ci numai componentă normală, a cărei valoare este : $a_n = r\,\omega_0^2$.

2° Mişcarea cu acceleraţie unghiulară constantă, $\dot{\omega} = \dot{\omega}_0$, este impropriu denumită uniform variată. După două integrări în raport cu t se ajunge la relaţiile :

$$\dot{\theta} = \omega = \dot{\omega}_0 t + \omega_0 \quad \text{şi} \quad \theta = \frac{\dot{\omega}_0}{2} t^2 + \omega_0 t + \theta_0, \tag{9.14}$$

unde ω_0 este viteza unghiulară în momentul iniţial, iar θ_0 este unghiul la centru care determină poziţia iniţială a mobilului.

Se pot calcula valorile componentelor acceleraţiei liniare :

$$a_t = r\,\dot{\omega}_0, \quad a_n = r\,(\dot{\omega}_0 t + \omega_0)^2$$

şi modulul acceleraţiei :

$$|\bar{a}| = r\sqrt{\dot{\omega}_0^2 + (\dot{\omega}_0 t + \omega_0)^4}. \tag{9.15}$$

Se observă că denumirea de uniform variată, dată uneori acestei mişcări, este nepotrivită, deoarece chiar şi $|\bar{a}|$ variază cu timpul.

Dacă $\dot{\omega}_0\,\omega_0 > 0$, mişcarea este propriu-zis accelerată, adică viteza unghiulară ω creşte în valoare absolută, şi invers, dacă $\dot{\omega}_0\,\omega_0 < 0$, mişcarea este întîrziată, pînă ce se anulează viteza unghiulară :

$$\omega = \dot{\omega}_0\, t_1 + \omega_0 = 0$$

în timpul

$$t_1 = -\frac{\omega_0}{\dot{\omega}_0} > 0.$$

§ 99. Componentele vitezei şi acceleraţiei în raport cu triedrul *Oxyz*

a. Dacă poziţia punctului mobil M este determinată, în fiecare moment, prin coordonatele lui :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{9.16}$$

în raport cu triedrul tridreptunghic $Oxyz$ (fig. 263), se pot calcula viteza şi acceleraţia, folosind expresia complexă a vectorului de poziţie:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \tag{9.17}$$

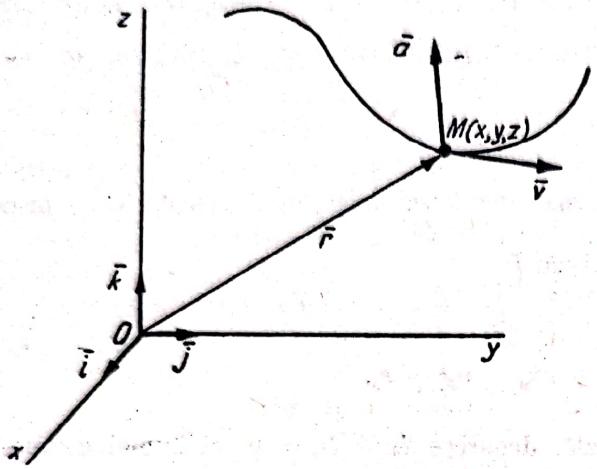


Fig. 263

b. **Viteza** punctului M în momentul t se calculează prin derivarea expresiei (9.17) în raport cu t:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k},$$

unde:

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{z} = v_z$$

sînt valorile proiecţiilor (componentelor) ei pe axele triedrului, iar modulul este:

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{9.18}$$

c. **Acceleraţia** punctului M în momentul t se obţine printr-o nouă derivare a expresiei complexe (9.17):

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k},$$

unde:

$$\ddot{x} = a_x, \quad \ddot{y} = a_y, \quad \ddot{z} = a_z$$

sînt valorile proiecţiilor (componentelor) acceleraţiei pe axe, iar:

$$|\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{9.19}$$

d. **Observaţii.** 1° În § 32 s-a arătat că *proiecţia derivatei unui vector pe o axă fixă este egală cu derivata proiecţiei vectorului pe acea axă.*

În consecinţă: *Proiecţia, pe o axă fixă, a vitezei sau acceleraţiei unui punct este egală cu viteza, respectiv acceleraţia proiecţiei punctului pe axa considerată.*

2° Traiectoria descrisă de punctul mobil M este dată parametric de ecuaţiile (9.16). Eliminînd parametrul t, se obţin două ecuaţii între coordonatele x, y, z. Fiecare din ecuaţii reprezintă cîte o suprafaţă care conţine traiectoria.

e. **Aplicaţii.** 1° *Mişcarea pe o cicloidă.* Cicloida este curba plană, descrisă de un punct M fix pe un cerc care se rostogoleşte fără să alunece peste o dreaptă fixă (fig. 264). În geometria analitică se stabilesc ecuaţiile parametrice ale cicloidei:

$$x = r(\theta - \sin\theta),$$

$$y = r(1 - \cos\theta),$$

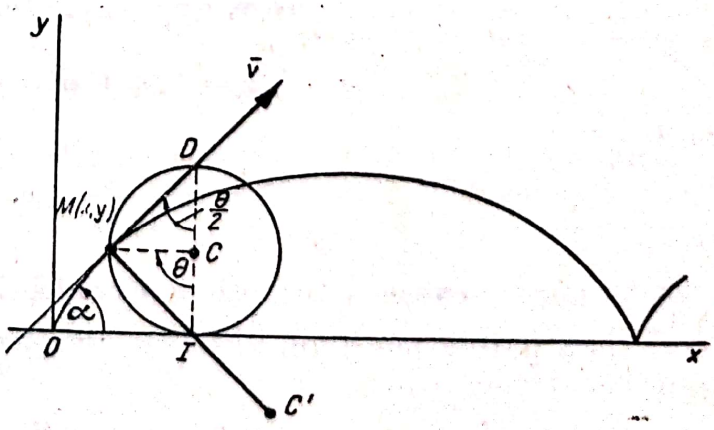


Fig. 264

unde r este raza cercului, iar parametrul θ, unghiul la centru al arcului de cerc IM, astfel încît arc $IM = OI$. Această relaţie exprimă faptul că cercul se rostogoleşte fără să alunece.

Dacă se cunoaşte legea mişcării: $\theta = \varphi(t)$, se pot calcula viteza şi acceleraţia punctului M într-un moment t. Se notează $\dot{\theta} = \omega$ şi se calculează:

$$\dot{x} = r(1 - \cos\theta)\,\omega = v_x, \qquad \dot{y} = \omega r \sin\theta = v_y,$$

de unde:

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}; \qquad v = 2r\omega \sin\frac{\theta}{2} = MI\omega. \tag{9.20}$$

Deoarece:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right),$$

reiese că, în orice moment, vectorul viteză trece prin punctul D, diametral opus punctului de contact I dintre cerc şi dreaptă.

Derivînd din nou, se obţine:

$$\ddot{x} = r[\omega^2 \sin\theta + \dot{\omega}(1 - \cos\theta)] = a_x, \qquad \ddot{y} = r(\omega^2 \cos\theta + \dot{\omega}\sin\theta) = a_y,$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = r\sqrt{\omega^4 + 4\dot{\omega}^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + 4\dot{\omega}\,\omega^2 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} =$$

$$= r\sqrt{\left(2\dot{\omega}\sin\frac{\theta}{2} + \omega^2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 + \omega^4 \sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Se observă că derivînd în raport cu t relaţia (9.20):

$$\dot{v} = r\left(2\dot{\omega}\sin\frac{\theta}{2} + \omega^2\cos\frac{\theta}{2}\right) = a_t$$

şi că în consecinţă:

$$a_n = r\omega^2 \sin\frac{\theta}{2}.$$

Pe de altă parte, deoarece:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4r^2\omega^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{R},$$

se poate determina pe cale cinematică raza de curbură a cicloidei:

$$R = 4r\sin\frac{\theta}{2} = 2\,MI = MC', \tag{9.21}$$

C' fiind centrul de curbură al cicloidei pentru punctul M.

Se mai observă că unghiul β dintre $\bar{a}$ şi $\bar{v}$ este dat de relaţia:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a_n}{a_t} = \frac{\omega^2 \sin\frac{\theta}{2}}{2\dot{\omega}\sin\frac{\theta}{2} + \omega^2\cos\frac{\theta}{2}}.$$

şi că în cazul particular în care rostogolirea cercului se face cu $\dot\theta = \omega = \text{const.}$, $\dot\omega = 0$, unghiul β este egal cu $\frac{\theta}{2}$, adică vectorul acceleraţiei are direcţia MC.

2° *Mişcarea pe elicea circulară dreaptă.* Arcul AB (fig. 265) al unei elice circulare se poate obţine înfăşurînd în formă de sul cilindric o foaie de hîrtie dreptunghiulară $AA'BB'$, după ce s-a trasat una din diagonale, de exemplu AB'. Notînd cu r raza cilindrului, cu α înclinarea elicei, cu p pasul ei şi observînd corespondenţa dintre punctele M cu M', m cu m' etc., se deduc ecuaţiile parametrice ale elicei, în raport cu axele triedrului fix $Oxyz$:

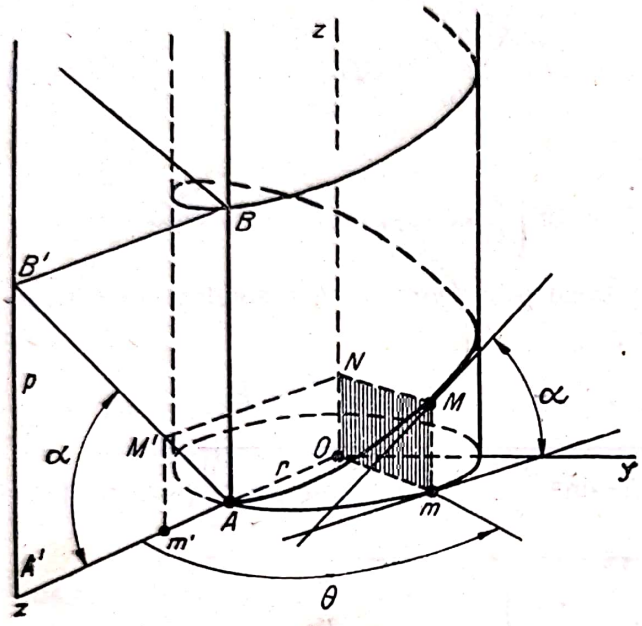


Fig. 265

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = r\theta\operatorname{tg}\alpha, \tag{9.22}$$

unde parametrul θ, în radiani, este unghiul dintre razele Om şi OA.

Dacă se cunoaşte legea mişcării punctului m pe cercul de bază, adică $\theta = \varphi(t)$, se calculează uşor viteza şi acceleraţia unui punct curent $M(x, y, z)$ al elicei:

$$\dot x = -r\dot\theta\sin\theta = -r\omega\sin\theta,$$
$$\dot y = r\omega\cos\theta, \quad \dot z = r\omega\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\ddot x = -r(\dot\omega\sin\theta + \omega^2\cos\theta),$$
$$\ddot y = r(\dot\omega\cos\theta - \omega^2\sin\theta),$$
$$\ddot z = r\dot\omega\operatorname{tg}\alpha,$$

unde ω este viteza unghiulară a punctului m (proiecţia punctului curent M pe cercul de bază), iar $\dot\omega$ este acceleraţia unghiulară a punctului m. Se calculează:

$$v = \frac{r\omega}{\cos\alpha}, \qquad |\bar a| = r\sqrt{\omega^4 + \frac{\dot\omega^2}{\cos^2\alpha}}. \tag{9.23}$$

Aceste rezultate se mai pot exprima şi cu ajutorul componentelor intrinsece. Deoarece:

$$\text{arcul } Am = r\theta = Am', \quad \text{arcul } AM = AM' = \frac{Am'}{\cos\alpha} = \frac{r\theta}{\cos\alpha},$$

rezultă:

$$v = \frac{r\dot\theta}{\cos\alpha} = \frac{r\omega}{\cos\alpha},$$

$$a_t = \frac{r\dot\omega}{\cos\alpha}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{r^2\omega^2}{R\cos^2\alpha}.$$

Comparînd:

$$|\bar a| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = r\sqrt{\frac{\dot\omega^2}{\cos^2\alpha} + \frac{r^2\omega^4}{R^2\cos^4\alpha}} = r\sqrt{\frac{\dot\omega^2}{\cos^2\alpha} + \omega^4},$$

se găseşte, pe cale cinematică, raza de curbură a elicei circulare drepte:

$$R = \frac{r}{\cos^2\alpha}. \tag{9.24}$$

Observații. Relația dintre pasul p al elicei și înclinarea ei α este:

$$p = 2\pi r \operatorname{tg}\alpha.$$

Un caz particular al mișcării pe elice este mișcarea circulară. În consecință, caracteristicile cinematice ale mișcării punctului pe un cerc, exprimate în raport cu axele fixe Oxy, se deduc imediat prin anularea înclinării α.

§ 100. Mișcarea în coordonate polare. Viteza și accelerația areolară

a. Uneori, în problemele de cinematică sau de dinamică, pentru mișcări în plan, este avantajos să se folosească sistemul de coordonate polare. Sistemul de referință se compune din punctul fix O și semiaxa polară Ox (fig. 266). Coordonatele unui punct M sînt: raza polară r, care poate varia între 0 și $+\infty$ și $\sphericalangle\theta$, măsurat de la axa polară în sens trigonometric sau în sens contrar, care poate primi orice valori cuprinse între $-\infty$ și $+\infty$.

Ecuația traiectoriei este:

$$f(r,\theta) = 0 \tag{9.25}$$

sau, sub formă explicită:

$$r = r(\theta) \text{ sau } \theta = \theta(r).$$

Pentru a cunoaște mișcarea mai trebuie cunoscută și ecuația orară.

Se notează cu $\bar{\rho}$ versorul razei polare și cu $\bar{v}$ versorul direcției perpendiculare pe raza polară în sensul în care θ crește. Astfel, poziția punctului M este determinată prin $\bar{r} = r\bar{\rho}$, unde cu r s-a notat $|\bar{r}|$.

b. Viteza se exprimă prin:

$$\dot{\bar{r}} = \bar{v} = \dot{r}\,\bar{\rho} + r\dot{\bar{\rho}}.$$

Or, în baza celor demonstrate la § 35 (schimbînd notațiile: $\bar{\rho}$ în loc de $\bar{t}$, $\bar{v}$ în loc de $\bar{n}$), se deduce:

$$\dot{\bar{\rho}} = \dot{\theta}\,\bar{v}, \tag{9.26}$$

deci:

$$\bar{v} = \dot{r}\,\bar{\rho} + r\dot{\theta}\,\bar{v}, \tag{9.27}$$

adică: viteza are în coordonate polare o componentă radială, cu valoarea $v_r = \dot{r}$, și una perpendiculară pe raza polară, cu valoarea $v_\theta = r\dot{\theta}$.

Modulul vitezei este:

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}. \tag{9.28}$$

c. Accelerația se deduce prin o nouă derivare a expresiei (9.27) în raport cu t:

$$\ddot{\bar{r}} = \dot{\bar{v}} = \bar{a} = \ddot{r}\bar{\rho} + \dot{r}\dot{\bar{\rho}} + \dot{r}\dot{\theta}\bar{v} + r\ddot{\theta}\bar{v} + r\dot{\theta}\dot{\bar{v}}.$$

Pentru calculul lui $\dot{\bar{v}}$ se derivează relația $\bar{\rho}\,\bar{v} = 0$,

$$\dot{\bar{\rho}}\,\bar{v} + \bar{\rho}\,\dot{\bar{v}} = 0,$$

se înlocuiește $\dot{\bar{\rho}}$ din (9.26) și se găsește:

$$\dot{\bar{v}} = -\dot{\theta}\,\bar{\rho}. \tag{9.29}$$

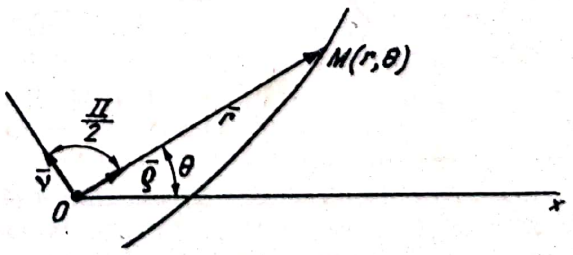


Fig. 266

Rezultatul final este :

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\bar{\rho} + [(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\bar{v},$$

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\bar{\rho} + \frac{\bar{v}}{r}\frac{\mathrm{d}(r^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t}. \tag{9.30}$$

Valorile celor două componente sînt :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2; \qquad a_\theta = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t},$$

iar :

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t}\right]^2}. \tag{9.31}$$

d. **Viteza areolară.** Viteza şi acceleraţia unui punct au fost denumite *liniare* pentru a se deosebi de viteza şi acceleraţia *unghiulară* întîlnite la mişcarea circulară.

Noţiunile de viteză şi de acceleraţie se pot extinde şi asupra altor mărimi care variază în raport cu timpul. Astfel, fie M şi M' poziţiile prin care trece un punct mobil pe o traiectorie oarecare (C) (fig. 267) în momentele t şi $t + \Delta t$. În intervalul de timp Δt, raza OM mătură suprafaţa plană a triunghiului OMM', de arie $\frac{1}{2}|\bar{r} \times \Delta r|$. Se consideră vectorul $\frac{1}{2}(\bar{r} \times \Delta\bar{r})$, care este perpendicular pe planul triunghiului. Limita raportului dintre acest vector şi Δt, cînd $\Delta t \to 0$, adică :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}(\bar{r} \times \Delta\bar{r})}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\bar{r} \times \bar{v}) = \bar{\Omega}, \tag{9.32}$$

se numeşte *viteza areolară* a punctului M.

Definiţie. *Viteza areolară a punctului M, în raport cu un punct fix O, este o mărime vectorială care caracterizează viteza cu care raza vectoare OM generează suprafaţa conică cu vîrful în O avînd ca directoare traiectoria punctului M şi care se exprimă prin relaţia* (9.32).

Se observă că $\bar{\Omega}$ este jumătatea momentului vitezei în raport cu O şi este mereu perpendicular pe planul determinat de $\bar{r}$ şi $\bar{v}$.

Dacă traiectoria este plană, iar O se află în planul ei, $\bar{\Omega}$ este un vector cu direcţia invariabilă, perpendiculară pe planul traiectoriei.

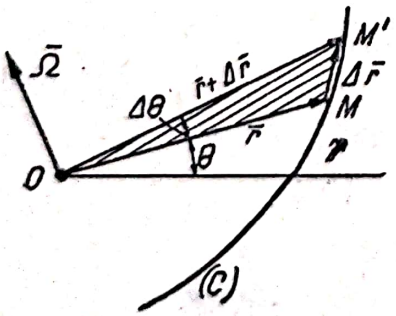


Fig. 267

În acest caz, valoarea vitezei areolare se exprimă, în coordonate carteziene, prin :

$$\Omega = \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y)\ ^1, \tag{9.33}$$

iar în coordonate polare prin :

$$\Omega = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}. \tag{9.34}$$

Unitatea de măsură a vitezei areolare este $\frac{m^2}{s}$ în sistemele MKS, MKfS, MTS şi $\frac{cm^2}{s}$ în sistemul CGS.

---

[1] Se mai observă că Ω este valoarea proiecţiei vectorului $\bar{\Omega}$ pe axa Oz, în consecinţă, Ω este şi valoarea vitezei areolare, în raport cu axa Oz, a punctului M care descrie o traiectorie oarecare (C). O interpretare corespunzătoare poate primi şi $\dot{\Omega}$.

e. **Definiție.** *Accelerația areolară este viteza de variație a vectorului viteză areolară a punctului M și este determinată prin:*

$$\dot{\bar{\Omega}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\bar{r}\times\bar{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}(\dot{\bar{r}}\times\bar{v} + \bar{r}\times\dot{\bar{v}}) = \frac{1}{2}(\bar{r}\times\bar{a}). \tag{9.35}$$

Vectorul $\dot{\bar{\Omega}}$ este jumătatea momentului accelerației în raport cu O și este în tot timpul perpendicular pe planul determinat de $\bar{r}$ și $\bar{a}$. Dacă traiectoria este plană și punctul O se află în planul traiectoriei, direcția accelerației areolare este invariabilă, perpendiculară pe planul traiectoriei, iar valoarea ei este în coordonate carteziene:

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{2}(x\ddot{y} - \ddot{x}y), \tag{9.36}$$

ar în coordonate polare:

$$\dot{\Omega} = \frac{r}{2}(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}). \tag{9.37}$$

Unitatea de măsură a accelerației areolare este $\frac{m^2}{s^2}$ în sistemele MKS, MKfS, MTS și $\frac{cm^2}{s^2}$ în sistemul CGS.

CAPITOLUL X

DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

A. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL LIBER

§ 101. Problemele generale. Condiții inițiale

a. Așa după cum studiul cinematicii a început cu mișcarea punctului, tot astfel, pentru simplificarea studiului, dinamica începe cu mișcarea punctului material liber.

Se pot da suficiente exemple de corpuri care, în mișcările lor, pot fi asimilate, cu o bună aproximație, cu un punct material liber. Astfel de exemple se întîlnesc în mișcarea unei pietre lăsată să cadă într-un puț, în mișcarea unui proiectil lansat la suprafața Pămîntului, în mișcarea unei rachete cosmice, în mișcarea unui corp greu suspendat de un resort etc.

Ceea ce interesează, în primul rînd, în dinamica punctului material este stabilirea modului în care forțele aplicate punctului material determină elementele cinematice ale mișcării lui.

În aceste condiții, majoritatea problemelor de dinamica punctului material liber se încadrează în primele două tipuri generale, menționate la § 11, adică:

1° Problema directă. *Cunoscîndu-se mișcarea punctului material liber, de masă constantă dată, să se determine rezultanta forțelor care acționează punctul material.*

2° Problema inversă. *Cunoscîndu-se forţele care acţionează punctul material liber, de masă constantă dată, să se determine mişcarea punctului material.*

b. În raport cu un reper fix, ecuaţia fundamentală a dinamicii se scrie sub forma:

$$m\ddot{\bar{r}} - \bar{F} = 0, \tag{10.1}$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziţie, în raport cu sistemul de referinţă cu originea în O, iar m masa punctului acţionat de forţa $\bar{F}$.

1° În *problema directă* se cunoaşte *mişcarea*:

$$\bar{r} = \bar{r}\,(t), \tag{10.2}$$

funcţia $\bar{r}\,(t)$ fiind dată; necunoscută este *forţa $\bar{F}$ rezultantă.*

Derivînd relaţia (10.2):

$$\dot{\bar{r}} = \bar{v} = \dot{\bar{r}}\,(t) \text{ şi } \ddot{\bar{r}} = \bar{a} = \ddot{\bar{r}}\,(t)$$

şi înlocuind în (10.1), se găseşte:

$$F = m\ddot{\bar{r}}\,(t). \tag{10.3}$$

Observaţie. Relaţia (10.3) poate fi soluţia unică a problemei directe doar din punct de vedere numeric.

În general, expresia forţei este o funcţie de t, $\dot{\bar{r}}$ şi $\bar{r}$:

$$\bar{F} = \bar{F}\,(t,\ \dot{\bar{r}},\ \bar{r}). \tag{10.4}$$

Precizarea expresiei depinde de natura fizică a forţei care poate avea diferite forme, astfel:

α) Greutatea unui corp la suprafaţa Pămîntului este o forţă constantă în direcţie, sens şi modul.

β) Rezistenţa aerului sau a unui fluid, forţele de frecare sînt funcţii de viteza punctului material ($\dot{\bar{r}}$).

γ) Forţa de atracţie newtoniană, forţa elastică a unui resort sînt funcţii de poziţia punctului material ($\bar{r}$).

δ) Forţele electromagnetice sînt funcţii de timp (t).

2° În *problema inversă* se cunoaşte funcţia $\bar{F}$ reprezentînd *forţa rezultantă* aplicată punctului material; necunoscută este *mişcarea*, adică funcţia $\bar{r}\,(t)$, care se poate afla prin integrarea ecuaţiei diferenţiale vectoriale, de ordinul II:

$$m\ddot{\bar{r}} - \bar{F}\,(t, \dot{\bar{r}}, \bar{r}) = 0. \tag{10.5}$$

Integrala generală a ecuaţiei (10.5), $\bar{r} = \bar{r}\,(t, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$, conţine două constante vectoriale de integrare şi prin aceasta are un caracter nedeterminat, adică, deşi acţionat de forţe cunoscute, punctul material poate avea diferite mişcări. Astfel, un corp lansat în vid la suprafaţa Pămîntului, acţionat numai de greutatea sa, o forţă constantă în direcţie, sens şi modul, se poate mişca pe diferite traiectorii şi în diferite moduri, în funcţie de locul şi de viteza de lansare.

Pentru ca mişcarea să fie determinată în mod univoc, trebuie ca din integrala generală $\bar{r} = \bar{r}\,(t, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$ să se poată determina o singură integrală particulară a ecuaţiei (10.5). Soluţia căutată rezultă din ecuaţiile ce se obţin

scriind că integrala satisface *condiţiile iniţiale ale mişcării*, că în *momentul iniţial* ($t = 0$) punctul material trece prin *poziţia iniţială* M_0, determinată în raport cu reperul considerat prin $\bar{r}_0 = \overline{OM_0}$, cu *viteza iniţială* $\bar{v}_0$. Vectorii $\bar{r}_0$ şi $\bar{v}_0$ fac parte din datele problemei inverse. În consecinţă, înlocuind în (10.5):

$$\bar{r}\,(0, \bar{C}_1, \bar{C}_2) = \bar{r}_0 \text{ şi } \dot{\bar{r}}\,(0, \bar{C}_1, \bar{C}_2) = \bar{v}_0,$$

se obţin cele două ecuaţii vectoriale necesare determinării constantelor de integrare $\bar{C}_1$ şi $\bar{C}_2$.

Problemele de tipul invers sînt mai dificile, necesitînd rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale.

c. Deoarece cazurile cînd se poate integra ecuaţia diferenţială sub forma ei vectorială sînt mai rare, se folosesc proiecţiile ecuaţiei (10.5) pe cele trei axe ale triedrului $Oxyz$:

$$m\ddot{x} - X = 0, \quad m\ddot{y} - Y = 0, \quad m\ddot{z} - Z = 0, \tag{10.6}$$

unde X, Y şi Z sînt valorile proiecţiilor forţei $\bar{F}$ pe axele triedrului, iar x, y şi z sînt coordonatele punctului material a cărui mişcare este necunoscută.

Dacă mişcarea este plană, se alege în planul mişcării sistemul de referinţă Oxy şi se păstrează numai primele două ecuaţii din (10.6).

Folosirea proiecţiilor ecuaţiei (10.5) pe axele triedrului natural $Mtnb$ permite scrierea ecuaţiilor:

$$m\frac{dv}{dt} - F_t = 0, \quad m\frac{v^2}{R} - F_n = 0, \quad F_b = 0, \tag{10.7}$$

unde F_t, F_n şi F_b sînt valorile proiecţiilor forţei $\bar{F}$ pe axele triedrului.

Aplicaţie. Un punct material de masă m descrie un cerc de rază R cu acceleraţie tangenţială nulă. Să se calculeze, în funcţie de timpul t, forţa care acţionează punctul material (problemă directă).

Rezolvare. Folosind ecuaţiile (10.7) se calculează:

$$F_t = m\frac{dv}{dt} = 0, \qquad \text{de unde } v = v_0,$$

iar:

$$F_n = m\frac{v^2}{R} = m\frac{v_0^2}{R}, \quad F_b = 0,$$

deci forţa este constantă în modul, are direcţia razei şi sensul spre centrul cercului (centripetă).

În paragrafele următoare se rezolvă probleme de tipul invers, în care sînt cunoscute legile de variaţie ale forţelor aplicate punctului material şi condiţiile iniţiale ale mişcării.

§ 102. Punct material acţionat de o forţă constantă

a. Punctul material de masă m este acţionat de forţa $\bar{F}$ constantă în direcţie, sens şi modul. Poziţia M_0 şi viteza în momentul $t=0$, în raport cu originea O a reperului, sînt date prin $\bar{r}_0$ şi $\bar{v}_0$. Mişcarea se determină rezolvînd ecuaţia (10.5) sau :

$$\ddot{\bar{r}} = \frac{\bar{F}}{m} = \bar{a}_0, \tag{10.8}$$

unde $\bar{a}_0$ este acceleraţia constantă, în orice moment, a punctului material.

Se calculează integrala generală a ecuaţiei (10.8) :

$$\dot{\bar{r}} = \bar{v} = \bar{a}_0 t + \bar{C}_1; \quad \bar{r} = \bar{a}_0 \frac{t^2}{2} + \bar{C}_1 t + \bar{C}_2.$$

Dacă în momentul $t = 0$:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 = \bar{C}_1, \; \bar{r} = \bar{r}_0 = \bar{C}_2,$$

se obţine ecuaţia vectorială a mişcării :

$$\bar{r} = \bar{a}_0 \frac{t^2}{2} + \bar{v}_0 t + \bar{r}_0. \tag{10.9}$$

b. **Traiectoria este plană.** Se notează cu $\bar{r}'$ vectorul de poziţie al punctului curent M în raport cu un reper cu originea în M_0 şi cu axele paralele cu cele ale reperului cu originea în O (fig. 268) :

$$\bar{r} - \bar{r}_0 = \bar{r}' = \bar{a}_0 \frac{t^2}{2} + \bar{v}_0 t \tag{10.10}$$

şi se multiplică scalar cu $\bar{v}_0 \times \bar{a}_0$, un vector constant perpendicular pe planul osculator din M_0 al traiectoriei.

Deoarece :

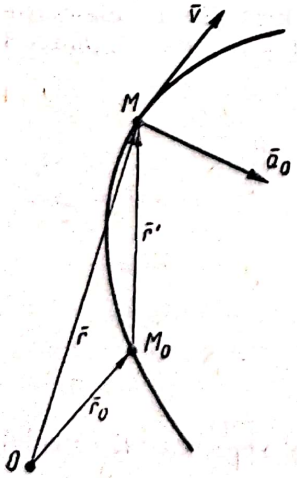


Fig. 268

$$\bar{r}'(\bar{v}_0 \times \bar{a}_0) = \left(\bar{a}_0 \frac{t^2}{2} + \bar{v}_0 t\right)(\bar{v}_0 \times \bar{a}_0) =$$

$$= \frac{t^2}{2}(\bar{a}_0 \times \bar{a}_0)\,\bar{v}_0 + t\,(\bar{v}_0 \times \bar{v}_0)\,\bar{a}_0 \equiv 0,$$

se constată că $\bar{r}'$ este mereu perpendicular pe o direcţie constantă, şi cum M_0 este fix, traiectoria punctului M este plană.

c. **Aplicaţie.** Mişcarea unui proiectil la suprafaţa Pămîntului [1], acţionat de greutatea sa, dacă se neglijează rezistenţa aerului, constituie un caz particular al problemei precedente, iar ecuaţia mişcării se obţine înlocuind în (10.10) $\bar{a}_0$ prin $\bar{g}$:

$$\bar{r}' = \bar{g}\frac{t^2}{2} + \bar{v}_0 t. \tag{10.11}$$

[1] În ipoteza că Pămîntul este un reper imobil faţă de un reper inerţial. Importanţa erorii care rezultă din această ipoteză se analizează la § 122.

Traiectoria fiind plană, se aleg axele M_0xy rectangulare în planul traiectoriei (fig. 269). Ecuațiile parametrice ale mișcării sînt:

$$x = (v_0 \cos \alpha)\, t, \quad y = -g\frac{t^2}{2} + (v_0 \sin \alpha)\, t, \tag{10.12}$$

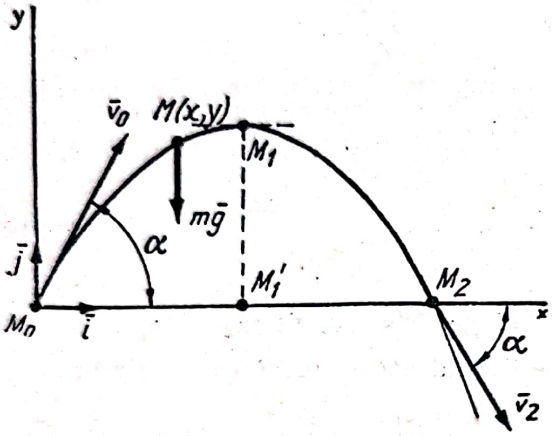


Fig. 269

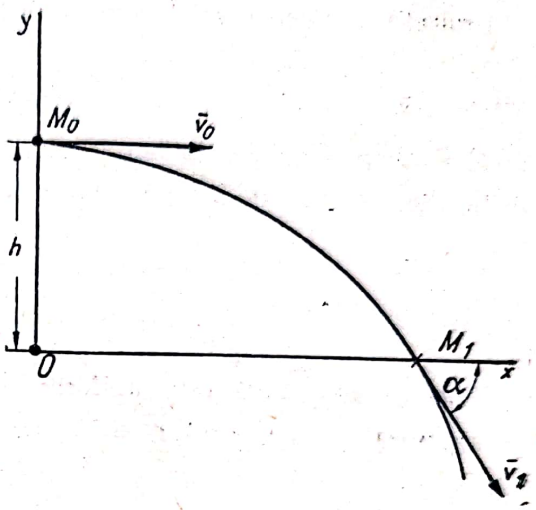


Fig. 270

unde α este înclinarea vitezei inițiale $\bar{v}_0$ față de axa M_0x.

Prin eliminarea parametrului t între ecuațiile (10.12) se găsește:

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \tag{10.13}$$

ecuația traiectoriei, o parabolă cu axa verticală.

Proiectilul atinge înălțimea maximă:

$$M_1'M_1 = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2 \alpha, \text{ în timpul } t_1 = \frac{v_0}{g}\sin\alpha.$$

Bătaia proiectilului și timpul necesar atingerii poziției M_2 sînt:

$$M_0M_2 = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha, \qquad t_2 = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha.$$

Proiectilul atinge poziția M_2 cu o viteză $\bar{v}_2$ egală în modul cu viteza inițială, dar cu înclinarea $-\alpha$.

Observații. 1° Dacă proiectilul este lansat dintr-un avion care zboară orizontal la înălțimea h cu viteza $\bar{v}_0$, ecuațiile mișcării în raport cu axele rectangulare Oxy (fig. 270) deduse din (10.9) sînt:

$$x = v_0 t; \quad y = -g\frac{t^2}{2} + h. \tag{10.14}$$

Ecuaţia traiectoriei este:

$$y = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2. \tag{10.15}$$

Proiectilul atinge nivelul zero la distanţa $OM_1 = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$ în timpul $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, cu viteza $|\bar{v}_1| = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ şi cu înclinarea $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{2gh}}{v_0}$.

2° Dacă proiectilul este lansat pe verticală în sus cu viteza v_0, ecuaţiile mişcării se deduc din (10.12), dînd unghiului α valoarea $\frac{\pi}{2}$:

$$x = 0, \quad y = v_0 t - g\frac{t^2}{2}. \tag{10.16}$$

Mişcarea *ascendentă* este uniform întîrziată şi se face cu viteza $v = v_0 - gt$, care se anulează în momentul $t_1 = \frac{v_0}{g}$, în care proiectilul atinge înălţimea maximă:

$$M_0M_1 = h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

În M_1 se schimbă sensul de mişcare (fig. 271).

3° Mişcarea *descendentă* este aceea a unui proiectil lăsat să cadă liber în vid, mişcare uniform accelerată.

Ecuaţiile acestei mişcări se deduc din (10.14) prin anularea vitezei iniţiale v_0:

$$x = 0, \quad y = h - g\frac{t^2}{2}, \tag{10.17}$$

iar viteza în momentul t este: $v = -gt$.

Proiectilul atinge nivelul zero în timpul: $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ cu viteza: $v_1 = -\sqrt{2gh}$, adică

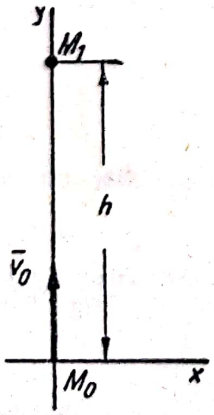


Fig. 271

egală, în modul, cu viteza de lansare necesară pentru ca, în mişcarea ascendentă, proiectilul să atingă înălţimea h.

4° Toate aceste rezultate nu sînt confirmate de practică, deoarece efectul rezistenţei aerului nu este neglijabil decît la viteze foarte mici. În problema lansării proiectilelor la suprafaţa Pămîntului, de care se ocupă balistica, rezistenţa aerului joacă un rol deosebit de important. De pildă, tragerile cu proiectile de artilerie de cîmp au dovedit covîrşitoarea influenţă pe care o are rezistenţa aerului. Astfel, dacă proiectilul, este lansat cu viteza iniţială de 650 m/s, pentru a obţine bătaia maximă în vid, ar trebui ca $\sphericalangle\ \alpha$ să fie de 45°. Bătaia maximă în vid ar fi de 40 000 m, iar înălţimea maximă, corespunzătoare acestei lansări, ar fi de 10 000 m. La trageri s-a constatat că bătaia maximă, care se obţine la o înclinare cuprinsă între 30° şi 33°, este de 4 000 m, iar înălţimea maximă numai de 500 m.

§ 103. Punct material acționat de o forță funcție de viteză

a. Rezistențele pe care le opun diferite medii la mișcările unui corp în aceste medii sînt forțe funcții de viteză. Astfel, aerul opune mișcării corpului o forță $\bar{R}$, tangentă la traiectorie, de sens contrar vitezei $\bar{v}$ (fig. 272) de modul:

$$|\bar{R}| = kf(v), \tag{10.18}$$

unde k este o constantă pozitivă care depinde de o serie de factori (forma și secțiunea corpului, densitatea aerului etc.), iar $f(v)$este o funcție pozitivă, continuă și derivabilă, pentru v cuprins între zero și $+\infty$, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ și finit pentru v finit.

Ecuația diferențială a mișcării unui solid, asimilat cu un punct material de masă m, în aer, la suprafața Pămîntului, este:

$$m\dot{\bar{v}} + k f(v) \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} - m\bar{g} = 0. \tag{10.19}$$

Pentru anumite expresii ale funcției $f(v)$, ecuația (10.19) se poate integra complet, pentru alte expresii se pot folosi metode aproximative de integrare.

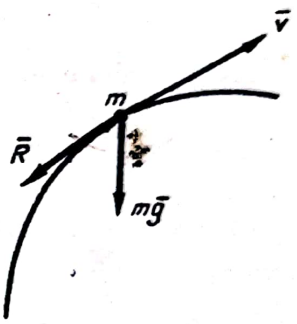


Fig. 272

b. Teoretic, se pot găsi multe forme de funcții pentru rezistența aerului, însă nici una din ele nu reproduce, decît aproximativ și numai pentru un anumit interval de variație a vitezei, rezistența reală.

Forma cea mai des folosită este: $|\bar{R}| = kv^n$.

În această formulă empirică, exponentul n depinde de ordinul de mărime al vitezei. Se dau cîteva valori ale exponentului n, folosite în aplicații:

pentru viteze mici	$n = 1$
pentru viteze cuprinse între 50— 250 m/s	$n = 2$
pentru viteze cuprinse între 250— 300 m/s	$n = 3$
pentru viteze cuprinse între 300— 375 m/s	$n = 5$
pentru viteze cuprinse între 375— 425 m/s	$n = 3$
pentru viteze cuprinse între 425— 550 m/s	$n = 2$
pentru viteze cuprinse între 550— 800 m/s	$n = 1{,}7$
pentru viteze cuprinse între 800—1 000 m/s	$n = 1{,}55$.

Se observă că exponentul cel mai mare corespunde vitezelor din apropierea vitezei sunetului în aer $\left(v = 330 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$.

Forțele de frecare dintre solide sînt și ele funcții de viteza lor relativă. În tehnică se stabilesc variate formule empirice, după tipul mișcării, după natura materialelor și a substanțelor interpuse, în raport cu intervalul de viteză etc. În particular, în cazul frecării uscate de alunecare, dacă $v \leqslant 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, se consideră că forța de frecare este independentă de viteză.

c. **Aplicații.** 1° Să se studieze căderea pe verticală a unui proiectil de masă m în aer în ipoteza că rezistența aerului este proporțională cu viteza.

Rezolvare. Dacă se notează cu kv rezistenţa aerului şi se studiază mişcarea în raport cu axa Oy orientată în jos, se ajunge la ecuaţia diferenţială :

$$m\ddot{y} + k\dot{y} = mg. \tag{10.20}$$

Se integrează prin substituţia $\dot{y} = v$ şi prin separarea variabilelor :

$$\frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = dt, \qquad \frac{k}{m}v - g = C_1 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Deoarece la momentul : $t = 0$, $v_0 = 0$, $C_1 = -g$, rezultă :

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right). \tag{10.21}$$

Integrînd din nou şi punînd condiţia : $t = 0$, $y_0 = 0$, se ajunge la :

$$y = \frac{mg}{k^2}\left(kt - m + me^{-\frac{k}{m}t}\right). \tag{10.22}$$

Din expresia (10.21) rezultă că viteza creşte cu timpul, tinzînd asimptotic ($t = \infty$) spre $v_{max} = \frac{mg}{k}$.

Calculul arată că o valoare cu puţin mai mică decît viteza maximă este atinsă după un timp foarte scurt, aceasta din cauza exponenţialei care descreşte foarte repede.

2° Să se studieze mişcarea unui proiectil de masă m lansat vertical în sus cu viteza iniţială v_0, în ipoteza că rezistenţa aerului este proporţională cu viteza.

Rezolvare. Ecuaţia diferenţială a mişcării în raport cu axa Oy orientată în sus este :

$$m\ddot{y} + k\dot{y} = -mg.$$

Concluziile sînt :

Viteza în momentul t este : $v = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$

şi se anulează în momentul : $t_1 = \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{v_0 k}{mg}\right)$,

în care proiectilul atinge : $h_{max} = \frac{m^2}{k^2}g\ln\frac{mg}{mg + kv_0} + \frac{mv_0}{k}$.

3° Să se studieze căderea pe verticală a punctului material de masă m în ipoteza că rezistenţa aerului are expresia :

$$|\bar{R}| = \frac{mg}{c^4}(2c^2 - v^2)v^2.$$

Rezolvare. Ecuaţia diferenţială a mişcării este :

$$m\dot{v} + \frac{mg}{c^4}(2c^2 - v^2)v^2 = mg$$

sau :

$$\frac{dv}{(c^2 - v^2)^2} = \frac{g dt}{c^4}.$$

Înmulțind ambele părți cu v și integrînd, se găsește :

$$y = \frac{c^2 v^2}{2g\,(c^2 - v^2)} \qquad \text{sau} \qquad v = c\sqrt{\frac{y}{y + \frac{c^2}{2g}}},$$

unde y este drumul pe verticală din momentul inițial, cînd : $y_0 = 0$ și $v_0 = 0$, pînă în momentul t, axa Oy fiind dirijată în jos.

Se constată că viteza tinde asimptotic către c.

Relația dintre timp și viteză este :

$$t = \frac{c^2 v}{2g(c^2 - v^2)} + \frac{c}{4g} \ln \frac{c + v}{c - v}.$$

§ 104. Punct material acționat de o forță centrală

a. Dacă suportul forței trece necontenit printr-un centru fix O, forța se numește centrală. Dacă sensul forței este spre centru, atît forța cît și centrul sînt *atractive*. În caz contrar, forța și centrul sînt *repulsive*.

Notînd cu $\bar{r}$ vectorul de poziție, în momentul t, al punctului material M de masă m în raport cu sistemul de referință cu originea în O, cu $\bar{\rho}$ versorul razei OM și cu f o funcție scalară oarecare, *negativă* în cazul forței *atractive* și *pozitivă* dacă forța este *repulsivă* (fig. 273), forța centrală se exprimă prin :

$$\bar{F} = \bar{\rho} f.$$

Pentru a studia mișcarea punctului material sub acțiunea forței centrale f, trebuie cunoscute : expresia funcției f și condițiile inițiale ale problemei, adică $\bar{r}_0$ și $\bar{v}_0$.

Ecuația diferențială a mișcării este :

$$m\ddot{\bar{r}} - \bar{\rho} f = 0. \qquad (10.23)$$

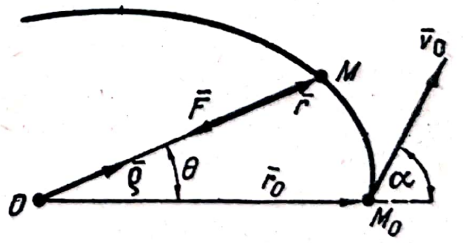


Fig. 273

Consecințe și observații. 1° Multiplicînd ecuația (10.23) vectorial cu $\bar{r}$, prin transformări succesive :

$$\bar{r} \times \ddot{\bar{r}} = 0, \quad \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \dot{\bar{r}}) = 0, \quad \bar{r} \times \bar{v} = \bar{C}, \qquad (10.24)$$

și după multiplicarea relației (10.24) scalar cu $\bar{r}$, se găsește :

$$(\bar{r} \times \bar{v})\,\bar{r} = \bar{C}\,\bar{r} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatul exprimă că vectorul de poziţie $\bar{r}$, care trece prin centrul fix O, este necontenit perpendicular pe un vector constant; deci *traiectoria punctului M este plană.*

2° *Viteza areolară* a razei OM este constantă, deoarece:

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2}\bar{r} \times \bar{v} = \frac{\bar{C}}{2} = \frac{\bar{r}_0 \times \bar{v}_0}{2}.$$

3° Ecuaţia diferenţială a mişcării în coordonate polare se deduce din (10.23), pe baza relaţiei (9.30) (v. § 100):

$$m\ddot{\bar{r}} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{\rho} + m\frac{\bar{v}}{r}\frac{\mathrm{d}(r^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t} = f\bar{\rho}. \tag{10.25}$$

Deoarece viteza areolară este constantă, din (9.34) se deduce:

$$r^2\dot{\theta} = C, \tag{10.26}$$

iar ecuaţia (10.25) se reduce la:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{f}{m} \qquad \text{sau} \qquad \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{f}{m}, \tag{10.27}$$

după eliminarea lui $\dot{\theta}$.

Pe de altă parte, ţinînd seama de (10.26):

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -C\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta},$$

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = -\frac{C^2}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta^2},$$

şi înlocuind în (10.27) se ajunge la ecuaţia diferenţială stabilită de *Binet:*

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{1}{r} + \frac{fr^2}{mC^2} = 0. \tag{10.28}$$

b. **Aplicaţie.** *Cazul forţei de atracţie newtoniană.* 1° Expresia forţei, dată la § 7 şi § 61, după ce se înlocuieşte m_1 prin m masa punctului atras, m_2 prin M masa centrului atractiv, d prin r şi se ţine seama de orientare, devine:

$$f = -k\frac{mM}{r^2}. \tag{10.29}$$

Ecuaţia diferenţială (10.28) se scrie:

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{1}{r} - \frac{1}{p} = 0, \tag{10.30}$$

unde s-a notat cu:

$$p = \frac{C^2}{kM}. \tag{10.31}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin integrarea ecuației diferențiale (10.30), se obține:

$$\frac{1}{r} = \frac{e}{p}\cos(\theta - \theta_1) + \frac{1}{p}, \qquad r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_1)}, \tag{10.32}$$

unde e și θ_1 sînt constantele de integrare.

Traiectoria este o conică avînd unul din focare în centrul O, parametrul p și excentricitatea e.

Pentru a afla natura conicei se determină constantele de integrare în funcție de condițiile inițiale ale problemei. În momentul $t = 0$, $\theta = \theta_0 = 0$, $\bar{r} = \bar{r}_0$ și $\bar{v} = \bar{v}_0$, iar α este unghiul dintre $\bar{r}_0$ și $\bar{v}_0$ (fig. 273). Din (10.24) rezultă:

$$C = r_0 v_0 \sin\alpha; \tag{10.33}$$

din (10.26):

$$C = r_0^2 \dot{\theta}_0, \tag{10.34}$$

ținînd seama de (10.31), se găsește:

$$p = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{kM}. \tag{10.35}$$

Din ecuația (10.32), pentru condițiile inițiale, se deduce

$$\cos\theta_1 = \frac{p - r_0}{e\, r_0}, \tag{10.36}$$

apoi, din ecuația (10.32), scrisă sub forma întreagă, după derivare, pentru condițiile inițiale, se găsește:

$$\dot{r}_0(1 + e\cos\theta_1) + e\, r_0\dot{\theta}_0 \sin\theta_1 = 0.$$

Cum: $\dot{r}_0 = v_0\cos\alpha$, valoarea componentei pe direcția razei polare a vitezei inițiale, ținînd seama de (10.34), de (10.33) și de (10.36) se obține:

$$\sin\theta_1 = -\frac{p\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{e\, r_0}. \tag{10.37}$$

Se elimină θ_1 între (10.36) și (10.37):

$$e^2 = \frac{1}{r_0^2}[(p - r_0)^2 + p^2\,\mathrm{ctg}^2\alpha]. \tag{10.38}$$

Ținînd seama de (10.35), rezultă·

$$e = \sqrt{1 + \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{k^2M^2}\left(v_0^2 - \frac{2\,kM}{r_0}\right)}. \tag{10.39}$$

Relațiile (10.35) și (10.39) determină parametrii de formă p și e ai conicei în funcție de datele problemei.

2° *Discuție.* Dacă $v_0 < \sqrt{\frac{2\,kM}{r_0}}$, $e < 1$, traiectoria este o elipsă;

dacă $v_0 = \sqrt{\frac{2\,kM}{r_0}}$, $e = 1$, traiectoria este o parabolă;

dacă $v_0 > \sqrt{\frac{2\,kM}{r_0}}$, $e > 1$, traiectoria este o hiperbolă.

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că în aceste cazuri natura conicei nu depinde de unghiul α, adică de direcţia vitezei iniţiale.

Pentru ca traiectoria să fie un cerc, adică o elipsă cu excentricitate nulă ($e = 0$), este necesar ca:

$$v_0 = \sqrt{\frac{kM}{r_0}} \quad \text{şi} \quad \alpha = \pm \frac{\pi}{2}.$$

3° *Lansarea rachetelor.* Problema precedentă, rezolvată în condiţiile cu totul particulare ale unui punct material, cu masă constantă, acţionat de o singură forţă de atracţie newtoniană, este asociată unei probleme cu mult mai complexe, aceea a lansării, de pe suprafaţa Pămîntului, a sateliţilor artificiali, a rachetelor cosmice.

Pentru a aprecia ordinul de mărime a vitezei de lansare v_0 se presupune că lansarea s-ar face în vid şi la suprafaţa Pămîntului. Din relaţia (10.29) se deduce:

$$\frac{kmM}{R^2} = mg \quad \text{sau} \quad kM = gR^2,$$

unde R este raza Pămîntului (în calcule aproximativ 6 400 km).

Pentru ca orbita satelitului (traiectoria în raport cu corpul al cărui satelit devine) să fie un cerc, este necesar ca $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ şi:

$$v_0 = \sqrt{\frac{kM}{r_0}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R}} = \sqrt{gR} \cong \sqrt{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6\,400\,000 \text{ m}} = 8\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Aceasta este *prima viteză cosmică.*

Atît timp cît viteza de lansare:

$$v_0 < \sqrt{\frac{2kM}{r_0}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{gR} \cong 11{,}2 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

orbita rachetei lansate este o elipsă avînd unul din focare în centrul atractiv, adică racheta devine un satelit al Pămîntului.

Dacă viteza de lansare atinge sau depăşeşte $11{,}2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ şi care reprezintă ce de-*a doua viteză cosmică*, orbita este o parabolă sau o hiperbolă, iar racheta părăseşte Pămîntul şi devine o planetă a sistemului solar.

Aceste rezultate nu corespund decît aproximativ soluţiei problemei reale. Factorul care modifică foarte mult rezultatele este rezistenţa aerului. De aceea, lansarea la suprafaţa Pămîntului se face pornind cu viteze mici, care cresc foarte mult de îndată ce racheta trece de păturile dense ale atmosferei pămînteşti.

Astfel dacă se presupune că lansarea s-ar face la înălţimea h pentru ca orbita rachetei să fie un cerc trebuie ca:

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{şi} \quad v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} \text{ (prima viteză cosmică).}$$

Pentru ca orbita să fie o elipsă este necesar ca:

$$v_0 < \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}} \text{ (a doua viteză cosmică).}$$

De exemplu, la înălţimea de $h = 800$ km, cele două viteze cosmice sînt aproximativ $7{,}6 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ şi $10{,}8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a atinge înălțimea și viteza necesare ca satelitul să se stabilească pe orbita sa, se folosesc rachete purtătoare cu mai multe trepte. Prima treaptă a rachetei poartă satelitul și celelalte trepte (de ex. II și III) pînă ce i se epuizează combustibilul, în care moment, prin comenzi automate, reglate înainte de lansare, intră în funcțiune treapta II ș.a.m.d. treptele I și II cad, dar treapta III, după desprinderea satelitului, avînd înălțimea și viteza destul de apropiate de cele ale satelitului, nu cade imediat, ci ajunge și ea un timp satelit al Pămîntului. Se înțelege că dacă corpul lansat atinge sau depășește cea de-a doua viteză cosmică, el devine o planetă a sistemului solar.

Legile lui Kepler[1] sînt legi empirice, enunțate ca urmare a observațiilor astronomice ale lui Tycho-Brahe și Kepler.

Legea I. *Planetele descriu în jurul Soarelui elipse avînd Soarele într-unul din focare.*

Legea a II-a. *Viteza areolară a planetelor este constantă (legea ariilor).*

Legea a III-a. *La toate planetele, raportul dintre pătratul timpului de revoluție (T) și cubul semiaxei mari (a). este același.*

Aceste legi se deduc din rezultatele obținute la § 104, pe baza ecuației fundamentale: $m\ddot{\bar{r}} - \bar{F} = 0$, unde $\bar{F} = f\bar{\rho}$ și pe baza legii atracției newtoniene: $f = -k\dfrac{mM}{r^2}$.

În adevăr, s-a arătat că dacă centrul atractiv O, de masă M, este fix, traiectoria punctului material atras, de masă m, este o conică avînd pe O ca focar și ecuația:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_1)},$$

unde e (excentricitatea) și θ_1 sînt constantele de integrare. Natura conicei este determinată de e. Planetele descriind în raport cu Soarele conice închise, $e < 1$, orbitele sînt elipse, iar vitezele lor areolare sînt constante. Astfel sînt verificate legile I și a II-a. Pentru legea a III-a se observă că:

$$r_{min} = \frac{p}{1+e}, \text{ la periheliu, și } r_{max} = \frac{p}{1-e}, \text{ la afeliu.}$$

În consecință:

$$r_{min} + r_{max} = 2a = \frac{2p}{1-e^2},$$

de unde: $p = a\,(1-e^2)$.

Pe de altă parte, din legea ariilor:

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C,$$

unde:

$$\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta = 2\pi ab \quad \text{și} \quad \int_0^T C\,dt = CT,$$

în care b, semiaxa elipsei, se scrie $b = a\sqrt{1-e^2}$, iar C, constanta legii ariilor, ținînd seama de (10.31), devine $C = \sqrt{kMp} = \sqrt{kMa(1-e^2)}$.

Deci, relația dată de legea ariilor:

$$2\pi ab = CT$$

duce succesiv la legea a III-a a lui Kepler:

$$2\pi a a\sqrt{1-e^2} = \sqrt{kMa(1-e^2)}\,T,$$

[1] *Iohann Kepler* (1571 – 1630), astronom german, asistentul astronomului danez *Tycho-Brahe*.

sub forma ei finală :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{kM} = \text{const.}$$

Observaţie. Deducerea matematică a legilor empirice ale lui Kepler cere o explicaţie. Pînă la Newton puţine erau legile enunţate în urma unor procese de sinteză. Ca exemple se dau : principiul inerţiei şi, într-o oarecare măsură, legea căderii corpurilor, enunţate de Galilei. În general, legile erau enunţate pe baza unui mare număr de experienţe şi de observaţii făcute într-o anumită problemă. Aşa a fost cu legile lui Kepler şi cu legea atracţiei dintre corpuri, care, în linii mari, era cunoscută pe vremea lui Newton. Meritul cel mare al lui Newton este că, printr-o sinteză genială a tuturor rezultatelor obţinute în mecanică de înaintaşii lui, a stabilit, pe de o parte, o expresie corectă a legii atracţiei universale, care rămîne totuşi o lege aproximativă, iar pe de altă parte, a formulat principiile fundamentale ale unei ştiinţe în care legile se deduc din principii întocmai ca teoremele geometriei din axiomele ei.

Această ştiinţă este mecanica newtoniană, iar faptul că există legi care sînt deduse pe cale matematică nu trebuie să fie altfel interpretat decît că această mecanică teoretică are şi o puternică bază experimentală.

§ 105. Punct material acţionat de o forţă elastică

a. *Exemplu.* Acţiunea unui resort asupra unui corp solid se traduce printr-o forţă care are direcţia axului resortului, modulul proporţional cu deformaţia lui şi este orientată în sensul anulării acestei deformaţii (v. § 66).

Se consideră un resort, de masă neglijabilă, aşezat *liber* pe un plan orizontal fără frecare. Un capăt este fixat de un perete vertical, iar de capătul celălalt este fixată o mică sferă M grea, aşezată de asemenea pe planul orizontal. În poziţia din figura 274, *a*, resortul nu este deformat, iar sfera M se află în repaus în poziţia O, nefiind acţionată de resort, greutatea ei fiind echilibrată de reacţiunea normală a planului.

Dacă resortul este întins (fig. 274, *b*), el acţionează asupra sferei M cu o forţă :

$$F = -kx, \tag{10.40}$$

spre poziţia de repaus O considerată originea axei Ox.

Dacă resortul este comprimat (fig. 274, *c*), el acţionează asupra sferei cu o forţă tot spre O. Deoarece, în cazul cînd resortul este comprimat, deformaţia x se consideră negativă, expresia (10.40) corespunde şi pentru acest caz. Se poate da forţei o expresie în care să intervină versorul axei Ox :

$$\bar{F} = -kx\bar{i}.$$

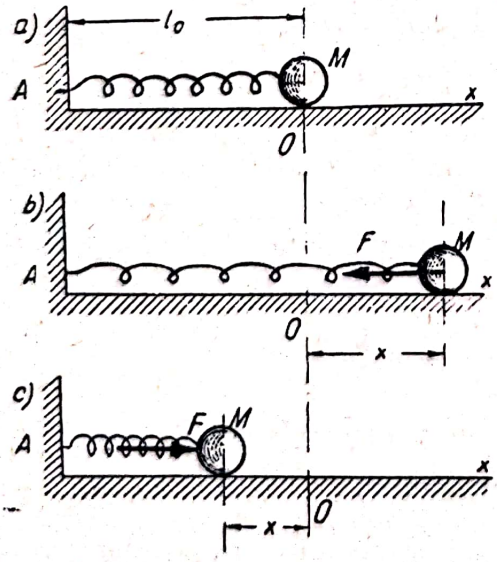


Fig. 274.

b. Din analiza acestui exemplu se constată că lucrurile se petrec ca şi cum în poziţia de repaus O ar exista un *centru atractiv*, iar forţa de atracţie ar fi proporţională cu vectorul de poziţie r al centrului sferei, în raport cu sistemul de referinţă, avînd originea în O, adică :

$$\bar{F} = -k\bar{r}. \tag{10.41}$$

Deci, forţa elastică poate fi considerată ca un caz particular al forţei centrale :

$$\bar{F} = \bar{\rho}f, \text{ unde } f = -k\,|\,\bar{r}\,|.$$

c. Se va studia mişcarea unui punct material M, de masă m, acţionat de o forţă elastică. Se alege centrul atractiv O ca origine a unui sistem de referinţă. Se notează cu $\bar{r}_0$, $\bar{v}_0$ vectorul de poziţie şi viteza în momentul iniţial, în M_0, şi cu α unghiul dintre $\bar{r}_0$ şi $\bar{v}_0$ (fig. 275). Ecuaţia diferenţială a mişcării este :

$$m\ddot{\bar{r}} = -k\bar{r}, \text{ sau } \ddot{\bar{r}} + \omega^2\bar{r} = 0,$$

$$\text{unde } \omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{10.42}$$

Integrala generală[1] a ecuaţiei diferenţiale vectoriale de ordinul II cu coeficienţi constanţi fără membrul doi este :

$$\bar{r} = \bar{C}_1 \cos \omega t + \bar{C}_2 \sin \omega t,$$

unde constantele de integrare $\bar{C}_1$ şi $\bar{C}_2$ se determină prin condiţiileiniţiale : $t = 0$, $\bar{r}_0 = \bar{C}_1$, $\dot{\bar{r}}_0 = \bar{v}_0 = \bar{C}_2\,\omega$, astfel că, pînă la sfîrşit, ecuaţia mişcării devine :

$$\bar{r} = \bar{r}_0 \cos \omega t + \frac{\bar{v}_0}{\omega} \sin \omega t. \tag{10.43}$$

Traiectoria punctului material este plană, iar raza OM are viteza areolară constantă, deoarece forţa elastică poate fi considerată ca un caz particular al forţei centrale.

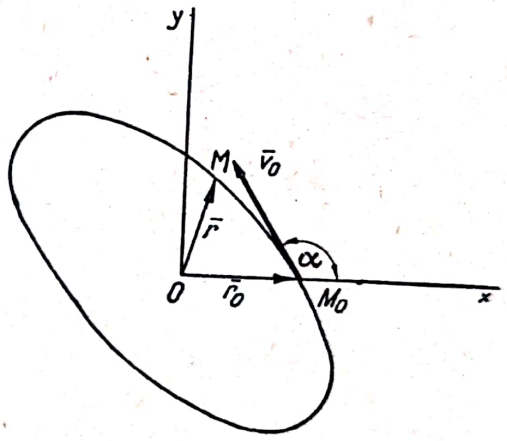


Fig. 275

d. *Ecuaţiile scalare.* Se aleg axele Oxy în planul traiectoriei, astfel ca Ox să treacă prin poziţia iniţială M_0 (fig. 275). În aceste condiţii :

$$\bar{r}_0 = r_0\bar{i}, \quad \bar{v}_0 = (v_0 \cos\alpha)\,\bar{i} + (v_0 \sin\alpha)\,\bar{j}$$

şi :

$$\bar{r}\,\bar{i} = x = r_0 \cos \omega t + \frac{v_0 \cos\alpha}{\omega} \sin \omega t, \quad \bar{r}\,\bar{j} = y = \frac{v_0 \sin\alpha}{\omega} \sin \omega t \tag{10.44}$$

---

[1] Deoarece : $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$ şi $\ddot{\bar{r}} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j}$,
ecuaţiei diferenţiale (10.42) îi corespund ecuaţiile :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \text{ şi } \ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

ale căror integrale generale sînt :

$$x = C \cos \omega t + C' \sin \omega t \text{ şi } y = C'' \cos \omega t + C''' \sin \omega t,$$

care înlocuite în expresia complexă dau :

$$\bar{r} = (C\bar{i} + C''\bar{j}) \cos \omega t + (C'\,\bar{i} + C'''\,\bar{j}) \sin \omega t \text{ etc.}$$

sînt ecuaţiile scalare ale mişcării.

Traiectoria se determină prin eliminarea lui t între ecuaţiile (10.44) şi se obţine :

$$\left(\frac{x - y \operatorname{ctg} \alpha}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega y}{v_0 \sin \alpha}\right)^2 = 1, \tag{10.45}$$

ecuaţie care reprezintă *o elipsă cu centrul în O* şi cu axele înclinate faţă de axele alese.

Mişcarea este periodică, deoarece x şi y sînt funcţiuni liniare de $\cos \omega t$ şi de $\sin \omega t$, la rîndul lor, funcţii periodice de aceeaşi perioadă $T = \frac{2\pi}{\omega}$, *iar după intervale de timp egale cu T mobilul trece prin aceeaşi poziţie şi cu aceeaşi viteză în mărime, direcţie şi sens.*

e. *Cazuri particulare.* 1° Dacă $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, ecuaţia traiectoriei este $\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{\frac{v_0^2}{\omega^2}} - 1 = 0$ şi reprezintă o elipsă cu axele după Ox şi Oy.

2° Dacă $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ şi $v_0 = \omega r_0 = r_0 \sqrt{\frac{k}{m}}$, ecuaţia traiectoriei este : $x^2 + y^2 - r_0^2 = 0$, care reprezintă un cerc cu centrul în O şi raza r_0.

3° Dacă $v_0 = 0$, deoarece $y = 0$,

$$x = r_0 \cos \omega t, \tag{10.46}$$

mişcarea este *rectilinie* (pe Ox), *oscilatorie* (în raport cu centrul O) şi *armonică*.

4° Dacă $v_0 \neq 0$, $\alpha = 0$ sau $\alpha = \pi$, deoarece :

$$y = 0 \text{ şi } x = r_0 \cos \omega t \pm \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \tag{10.47}$$

adică :

$$x = r_0 \left(\cos \omega t \pm \frac{v_0}{r_0 \omega} \sin \omega t\right) = \frac{r_0}{\cos \varphi} \cos (\omega t \mp \varphi),$$

unde :

$$\frac{v_0}{r_0 \omega} = \operatorname{tg} \varphi;$$

se ajunge la :

$$x = \sqrt{r_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \cos \left(\omega t \mp \operatorname{arc\ tg} \frac{v_0}{r_0 \omega}\right), \tag{10.48}$$

care reprezintă tot o mişcare rectilinie oscilatorie armonică. Se precizează că în relaţia (10.48) se ia valoarea $\operatorname{arc\ tg} \frac{v_0}{r_0 \omega} < \frac{\pi}{2}$, deoarece $\sin \varphi > 0$.

f. *Caracteristicile cinematice ale mişcării rectilinie oscilatorie armonică.* O imagine cinematică a acestei mişcări se găseşte în următorul exemplu :

Scanned with OKEN Scanner

dacă M' este un punct care descrie un cerc de rază r_0, cu viteză unghiulară constantă ω, şi trece în momentul iniţial prin poziţia M_0', proiecţia M a punctului M' pe axa Ox paralelă cu $O'M_0'$ (fig. 276) are o mişcare a cărei ecuaţie este:

$$x = OM = OM' \cos \sphericalangle M_0'O'M' = r_0 \cos \omega t,$$

identică cu ecuaţia (10.46).

Deci, dacă un punct descrie un cerc cu viteză unghiulară constantă, proiecţia lui pe un diametru fix al cercului are o mişcare oscilatorie armonică, cu următoarele caracteristici:

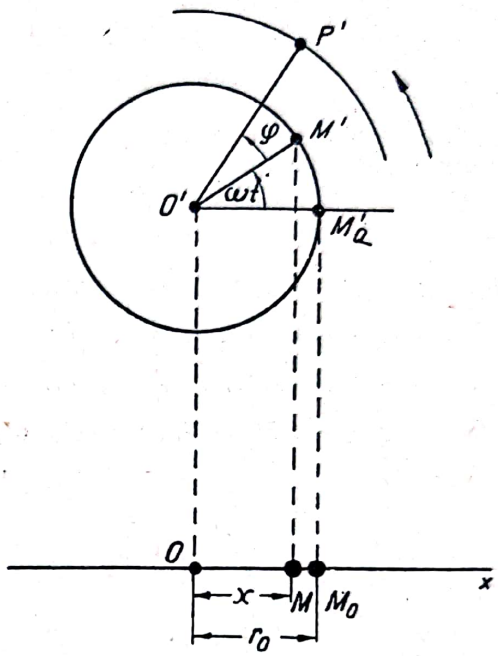


Fig. 276

x *este elongaţia*, adică depărtarea mobilului, într-un moment t, de centrul de oscilaţie O;

r_0 *este amplitudinea mişcării*, adică elongaţia maximă;

2π *este perioada mişcării în argument*, deoarece $\cos(\omega t + 2\pi) = \cos \omega t$;

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ *este perioada mişcării în timp*, deoarece $\cos \omega (t + T) = \cos \omega t$, după timpul T mişcarea *se repetă*; T este timpul necesar unei oscilaţii complete;

$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ *este frecvenţa mişcării*[1], adică numărul de cîte ori se repetă mişcarea în unitatea de timp sau numărul de oscilaţii complete în unitatea de timp (secunda);

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ *este pulsaţia mişcării*, adică numărul de cîte ori se repetă mişcarea în 2π secunde; în mişcarea circulară îi corespunde viteza unghiulară;

φ *este diferenţa de fază în argument* între mişcările reprezentate de ecuaţia (10.48) faţă de mişcarea reprezentată de ecuaţia (10.46), mişcare denumită *fundamentală*;

$t_1 = \frac{\varphi}{\omega}$ *este diferenţa de fază în timp* între aceleaşi mişcări; dacă $t_1 > 0$, mişcarea este în avans, iar dacă $t_1 < 0$, mişcarea este în întîrziere faţă de mişcarea fundamentală.

Dacă un alt punct P' descrie un cerc de rază $OP' = \frac{r_0}{\cos \varphi}$, cu aceeaşi viteză unghiulară ω, proiecţia lui pe Ox are mişcarea oscilatorie armonică reprezentată de ecuaţia (10.48) cu semnul + (plus) pentru situaţia din figura 276.

[1] Ceea ce caracterizează o mişcare oscilatorie este, în primul rînd, frecvenţa. Frecvenţele industriale sînt de 10—100 perioade pe secundă; de exemplu, curentul alternativ din Bucureşti are o frecvenţă de 50 perioade pe secundă.

Diferenţa de fază se mai numeşte şi *decalaj* sau *defazaj*.

Dacă decalajul a două mişcări oscilatorii este $\frac{\pi}{2}$, mişcările sînt în *cuadratură*, iar dacă decalajul este π, ele sînt în *opoziţie*.

g. *Aplicaţii.* 1° Să se arate că mişcările oscilatorii reprezentate de ecuaţiile:

$$1)\ x = r_0 \cos \omega t; \quad 2)\ v = \dot{x}; \quad 3)\ a = \dot{v} = \ddot{x}$$

au amplitudinile r_0, $r_0\,\omega$, $r_0\,\omega^2$ şi aceeaşi pulsaţie; cea de-a doua este în cuadratură şi în avans faţă de prima, iar cea de-a treia, în opoziţie şi în avans faţă de prima.

2° Să se determine caracteristicile mişcării de ecuaţie:

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + C,$$

unde A, B şi C sînt trei constante date.

Răspuns: Ecuaţia reprezintă o mişcare oscilatorie armonică cu pulsaţia ω, cu punctul de abscisă C ca centru de oscilaţie, cu amplitudinea $\frac{A}{\cos \varphi}$ şi decalajul $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{B}{A}$.

3° Să se construiască diagramele mişcărilor de la aplicaţia 1°.

§ 106. Mişcări rectilinii oscilatorii

a. Exemplul de mişcare cu care începe § 105, în ipoteza că sfera M este deplasată pe axa Ox spre dreapta cu distanţa $OM_0 = r_0$ şi apoi lăsată liber ($v_0 = 0$) sub acţiunea resortului, îşi găseşte exprimarea în ecuaţia (10.46).

Dacă în momentul iniţial, după deplasarea r_0, sfera mai are o mişcare cu $v_0 \neq 0$, ecuaţia mişcării este (10.47), iar mişcarea este decalată cu φ faţă de mişcarea fundamentală ($v_0 = 0$). Dacă v_0 este orientat spre centrul O, mişcarea este în avans faţă de mişcarea fundamentală, iar dacă v_0 este orientat în sens opus, mişcarea este în întîrziere faţă de mişcarea fundamentală.

În acest exemplu s-au neglijat rezistenţa aerului, frecările, precum şi masa resortului.

b. În cele ce urmează se va studia mişcarea rectilinie oscilatorie a punctului material de masă m, ţinînd seama[1] de o *forţă rezistentă proporţională cu viteza* şi de o *forţă perturbatoare* de forma:

$$F = A \cos (\alpha t + \beta) \tag{10.49}$$

acţionînd pe aceeaşi direcţie cu forţa elastică şi rezistenţa mediului. Ecuaţia diferenţială a mişcării este:

$$m\ddot{x} = A \cos (\alpha t + \beta) - kx - l\dot{x},$$

unde α, β, k şi l sînt constante, ultimele două fiind pozitive.

$$\text{Notînd: } \frac{k}{m} = \omega^2,\ \frac{A}{m} = a_0;\ \frac{l}{m} = 2\lambda\ (\lambda > 0),$$

[1] Masa resortului se neglijează.

ecuația diferențială a mișcării devine :

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega^2 x = a_0 \cos(\alpha t + \beta). \tag{10.50}$$

Ecuația diferențială liniară de ordinul doi, fără membrul II, se integrează cu ajutorul ecuației caracteristice :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0, \text{ de unde : } r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}.$$

1°. La început se ia în considerare *ipoteza rezistențelor mici :*

$$\lambda^2 - \omega^2 < 0 \text{ cu notația : } \lambda^2 - \omega^2 = -\omega_1^2, \tag{10.51}$$

adică :

$$r_{1,2} = -\lambda \pm i\omega_1 \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

și apoi *ipoteza rezistențelor mari :*

$$\omega^2{}_1 = \nu^2 - \omega^2 \geqslant 0. \tag{10.52}$$

Integrala generală a ecuației diferențiale (10.50) fără membrul II este :

$$X_1 = C_1 e^{-\lambda t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \tag{10.53}$$

unde C_1 și φ_1 sînt constantele de integrare.

Integrala generală a ecuației (10.50) cu membrul II se obține din (10.53), la care se adaugă o integrală particulară care să o satisfacă.

Se știe din analiza matematică că integrala particulară este de forma :

$$X = C \cos(\alpha t + \varphi), \tag{10.54}$$

unde C și φ sînt constante care se pot determina punînd condiția ca X să satisfacă ecuația (10.50).

După identificare, se obțin ecuațiile :

$$C(\omega^2 - \alpha^2)\cos\varphi - 2C\lambda\alpha\sin\varphi = a_0\cos\beta,$$
$$C(\omega^2 - \alpha^2)\sin\varphi + 2C\lambda\alpha\cos\varphi = a_0\sin\beta,$$

care rezolvate în raport cu C și φ dau :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(\omega^2 - \alpha^2)\operatorname{tg}\beta - 2\lambda\alpha}{\omega^2 - \alpha^2 + 2\lambda\alpha\operatorname{tg}\beta}; \quad C = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4\lambda^2\alpha^2}}. \tag{10.55}$$

Pentru determinarea constantelor de integrare C_1 și φ_1 se pun condițiile inițiale : la $t = 0$, $x = x_0$ și $\dot{x} = v_0$, ca pînă la sfîrșit să se găsească integrala completă a ecuației (10.50) :

$$x = X_1 + X = C_1 e^{-\lambda t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C\cos(\alpha t + \varphi). \tag{10.56}$$

Deci, în ipoteza rezistențelor mici, mișcarea punctului material acționat de forța elastică și de forța perturbatoare (10.49) se obține prin suprapunerea a două mișcări oscilatorii, prima cu amplitudinea $C_1 e^{-\lambda t}$, care se micșorează repede cu timpul, și cealaltă datorită forței care întreține mișcarea oscilatorie.

Se vor analiza următoarele cazuri speciale :

1° *Mişcarea oscilatorie amortizată.* Aceasta este caracterizată prin condiţia (10.51) şi lipsa forţei perturbatoare.

Ecuaţia mişcării este : $x = C_1 e^{-\lambda t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$. (10.57)

Condiţiile iniţiale dau :

$$x_0 = C_1 \cos \varphi_1, \quad v_0 = -(C_1 \lambda \cos \varphi_1 + C_1 \omega_1 \sin \varphi_1),$$

cu care se determină constantele de integrare φ_1 şi C_1 :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{v_0 + x_0 \lambda}{x_0 \omega_1}, \qquad C_1 = \frac{1}{\omega_1} \sqrt{x_0^2 \omega_1^2 + (v_0 + x_0 \lambda)^2}.$$

Diagrama (x, t) (fig. 277) dă o imagine mai clară a mişcării oscilatorii amortizate. Diagrama este limitată de exponenţialele :

$$x = C_1 e^{-\lambda t} \quad \text{şi} \quad x = -C_1 e^{-\lambda t}.$$

Cu toate că mişcarea *nu este periodică*, deoarece mobilul nu trece prin aceeaşi poziţie cu aceeaşi viteză, totuşi se obişnuieşte a se numi *pseudoperioadă* timpul T după care elongaţia oscilaţiei trece în acelaşi sens prin valoarea zero, sau timpul după care punctul curent P de pe diagramă atinge două maxime [1] sau două minime consecutive, de exemplu, P_1 şi P_3 sau P_2 şi P_4. Acest timp este :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}.$$

Amplitudinea mişcării descreşte periodic după o progresie geometrică cu raţia $e^{-\frac{2\pi\lambda}{\omega_1}}$:

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{C_1 e^{-\lambda t_3}}{C_1 e^{-\lambda t_1}} = e^{-\lambda(t_1 - t_3)} = e^{-\lambda T} = e^{-\frac{2\pi\lambda}{\omega_1}}.$$

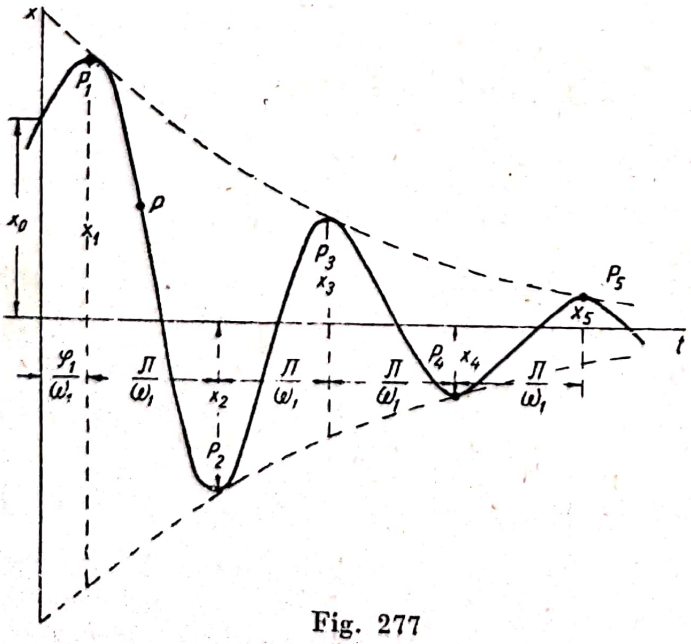


Fig. 277

Constanta $\frac{2\pi\lambda}{\omega_1}$ *se numeşte decrementul logaritmic al mişcării oscilatorii amortizate.*

2° *Rezonanţa.* În cazul rezistenţelor foarte mici, neglijabile, dacă punctul material mai este acţionat în afara forţei elastice şi de forţa perturbatoare (10.49), ecuaţia mişcării se deduce din (10.56), înlocuind $\lambda = 0$ şi $\omega_1 = \omega$, adică :

$$x = C_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + C \cos(\alpha t + \varphi).$$

Ţinînd seama de condiţiile iniţiale, se determină constantele C_1 şi φ_1, deoarece C şi φ sînt determinate prin relaţiile (10.55), adică :

$$\varphi = \beta \text{ şi } C = \frac{a_0}{\omega^2 - \alpha^2}.$$

[1] Maximele şi minimele nu sînt situate pe cele două exponenţiale.

Deci în cazul $\lambda = 0$, integrala completă a ecuației (10.50) este :

$$x = C_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \frac{a_0}{\omega^2 - \alpha^2} \cos(\alpha t + \beta), \qquad (10.58)$$

rezolvarea fiind corectă atît timp cît $\alpha \neq \omega$.

Din (10.58) se observă că, *dacă perioada forței perturbatoare* $\frac{2\pi}{\alpha}$ *este foarte apropiată de perioada oscilației proprii* $\frac{2\pi}{\omega}$, adică dacă diferența $\omega - \alpha$ este foarte mică, amplitudinea mișcării, în absența rezistențelor amortizoare, poate crește foarte mult, dînd naștere fenomenului de *rezonanță*.

Efectul rezonanței în mișcările vibratorii ale sistemelor solide deformabile poate fi dăunător. Grinzile unui pod au o anumită perioadă de vibrație proprie. Dacă trece pe pod o trupă în cadență cu o altă perioadă nu se întîmplă nimic deosebit, însă dacă cele două perioade sînt foarte apropiate se poate produce fenomenul de rezonanță și distrugerea podului. O asemenea catastrofă s-a întîmplat în Franța la finele secolului trecut. De asemenea, din cauza coincidenței dintre perioada de vibrație proprie a avionului cu perioada de rotație a elicei s-au produs accidente prin ruperea avionului în aer.

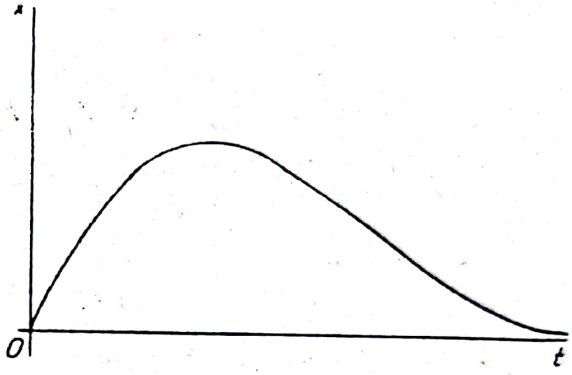


Fig. 278

Fenomenul este foarte des întîlnit în tehnică și în viața practică. Fenomenul de rezonanță are și aplicații deosebit de importante. Astfel, toate recepțiile radiofonice se bazează pe acordarea circuitului receptor pe frecvența oscilației forțate a emițătorului.

3° *Mișcări aperiodice.* În cazul rezistențelor mari (v. (10.52)) și în lipsa forței perturbatoare, integrala generală a ecuației diferențiale este :

$$x = (C_1 + C_2 t)\ e^{-\lambda t} \text{ sau } x = (C_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{-\omega_1 t})\ e^{-\lambda t}.$$

Ambele mișcări sînt aperiodice și se amortizează foarte repede.

Pentru a determina constantele de integrare se presupun următoarele condiții inițiale : la $t = 0$, $x_0 = 0$ și $v_0 > 0$.

Se găsește pentru prima ipoteză ($\lambda = \omega$) : $x = v_0 t e^{-\lambda t}$ și pentru cea de-a doua ($\lambda > \omega$) :

$$x = \frac{v_0}{2\omega_1} (e^{\omega_1 t} - e^{-\omega_1 t})\ e^{-\lambda t}.$$

Curbele reprezentative ale celor două mișcări aperiodice au aspectul din figura 278.

Deplasarea maximă la prima mișcare : $x_{max} = \frac{v_0}{\lambda} e^{-1}$ pentru $t = \frac{1}{\lambda}$, iar la cea de-a doua : $x_{max} = \frac{v_0}{\lambda - \omega_1} \left(\frac{\lambda + \omega_1}{\lambda - \omega_1}\right)^{-\frac{\lambda+\omega_1}{2\omega}}$ după timpul : $t = \frac{1}{2\omega_1} \ln \frac{\lambda + \omega_1}{\lambda - \omega_1}$.

B. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL CU LEGĂTURI

§ 107. Generalități

a. Ca și problemele de statica punctului material cu legături, problemele de dinamica punctului cu legături se rezolvă începînd cu eliberarea punctului material, adică prin înlocuirea legăturilor cu forțe de legătură (reacțiuni).

Corpul de care este legat punctul material în mișcare poate fi asimilat, din punct de vedere geometric, cu o linie sau cu o suprafață. De obicei, în probleme, linia sau suprafața sînt cunoscute. Necunoscutele sînt : *legea*

mişcării şi *forţele de legătură.* Dacă legătura este considerată fără frecare (legătură ideală), forţa de legătură este dirijată normal la curbă sau la suprafaţă. Dacă se ţine seama de frecare, forţa de legătură are şi o componentă tangentă la curbă sau la suprafaţă.

În ipoteza că frecarea ascultă de legile lui Coulomb (v. § 69), se studiază mişcarea considerînd că forţa de frecare are modulul proporţional cu modulul forţei de legătură normale, coeficientul de proporţionalitate fiind μ, coeficientul de frecare la alunecare.

b. **Mişcarea pe o curbă dată.** Dacă legătura este reonomă[1], ecuaţia vectorială a curbei se poate exprima prin : $\bar{r} = \bar{r}\,(s, t)$, unde parametrii s şi t sînt arcul de curbă şi timpul. Dacă legătura este scleronomă[1], ecuaţia curbei nu depinde de t.

În problemele care urmează se presupune că legăturile sînt scleronome.

Datele problemelor sînt : *traiectoria* : $\bar{r} = \bar{r}\,(s)$, *rezultanta forţelor date* $\bar{F}$ şi *condiţiile*[2] *iniţiale* : la $t = 0$, $\bar{r} = \bar{r}_0$ şi $\bar{v} = \bar{v}_0$.

Necunoscutele sînt : *ecuaţia orară a mişcării* $s = \varphi\,(t)$ şi *forţa de legătură* (reacţiunea) *totală* : $\bar{N} + \bar{T}$.

Problemele se studiază fie cu ajutorul ecuaţiei vectoriale :

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F} + \bar{N} + \bar{T}, \tag{10.59}$$

fie cu ecuaţiile scalare deduse prin proiectarea ecuaţiei (10.59) pe axele triedrului fix $Oxyz$ sau pe axele triedrului natural $Mtnb$ al curbei. Astfel, ecuaţiile în raport cu triedrul natural sînt :

$$m\dot{v} = F_t - T, \quad \frac{mv^2}{R} = F_n + N_n, \quad 0 = F_b + N_b, \tag{10.60}$$

unde :

F_t, F_n, F_b sînt valorile componentelor, faţă de axe, ale rezultantei forţelor date;

N_n şi N_b — valorile componentelor, după normala principală şi binormală, ale reacţiunii normale.

Dacă reacţiunea tangenţială este neglijabilă, prima ecuaţie din (10.60) permite cunoaşterea legii mişcării, după care din celelalte :

$$N_n = \frac{mv^2}{R} - F_n, \quad N_b = -F_b,$$

se determină reacţiunea normală.

Dacă reacţiunea tangenţială nu este neglijabilă şi se cunoaşte legea ei de variaţie în funcţie de reacţiunea normală sau în funcţie de viteză, se poate ajunge, de asemenea, la o ecuaţie diferenţială după eliminarea reacţiunilor.

În cazul particular al mişcărilor pe o linie dreaptă, $R = \infty$, iar componenta normală a reacţiunii este aceeaşi ca în statică.

---

[1] v. § 67.

[2] Se înţelege că $\bar{v}_0$ este tangent în $M_0(\bar{r}_0)$ la traiectoria dată.

Scanned with OKEN Scanner

Exceptînd cazul mişcărilor pe o linie dreaptă, în toate celelalte cazuri reacţiunea depinde de caracteristicile mişcării (traiectorie, viteză) şi de masa punctului mobil.

În concluzie: *Reacţiunile dinamice sînt, în general, diferite de cele statice.*

§ 108. Aplicaţii

1° Un punct material de masă m este lansat cu viteza $\bar{v}_0$ pe linia de cea mai mare pantă a unui plan înclinat cu unghiul α faţă de planul orizontal. Să se studieze mişcarea punctului ţinînd seama de frecare (coeficient μ).

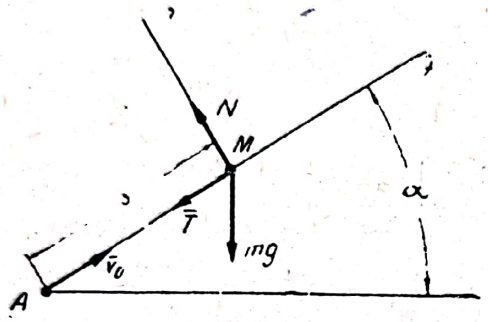


Fig. 279

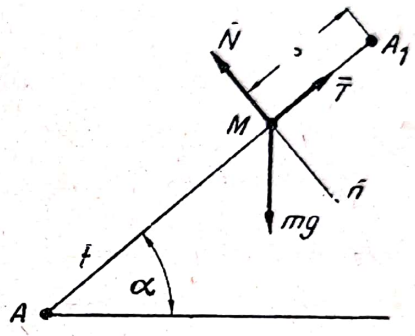


Fig. 280

Rezolvare. Pe figura 279, A este originea drumului s pe care-l parcurge punctul material M. Forţa dată este $\bar{F} = m\bar{g}$.

Ecuaţiile mişcării *ascendente*, în raport cu axele mobile $Mt\bar{n}$, sînt:

$$m\dot{v} = -mg \sin \alpha - T, \quad \frac{mv^2}{R} = 0 = N - mg \cos \alpha;$$

$$T = \mu N = \mu\, mg \cos \alpha.$$

Ţinînd seama de unghiul de frecare φ:

$$\dot{v} = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = -\frac{g}{\cos \varphi} \sin (\alpha + \varphi),$$

iar: $\dot{s} = v = v_0 - \frac{gt}{\cos \varphi} \sin (\alpha + \varphi)$ şi $s = v_0 t - \frac{gt^2}{2 \cos \varphi} \sin (\alpha + \varphi)$, (10.61)

deoarece condiţiile iniţiale sînt: la $t = 0$, $v = v_0$ şi $s = s_0 = 0$.

Din ecuaţiile (10.61) rezultă că mişcarea este uniform întîrziată cu acceleraţia $-\frac{g}{\cos \varphi} \sin (\alpha + \varphi)$ şi că viteza se anulează în momentul $t_1 = \frac{v_0 \cos \varphi}{g \sin (\alpha + \varphi)}$, după ce mobilul a parcurs drumul:

$$AA_1 = s_1 = \frac{v_0^2 \cos \varphi}{2g \sin (\alpha + \varphi)}.$$

În *mişcarea descendentă*, situaţia forţelor este cea arătată în figura 280, iar ecuaţia mişcării este:

$$m\dot{v} = mg \sin \alpha - \mu\, mg \cos \alpha.$$

După integrare se găseşte :

$$v = \frac{gt}{\cos \varphi} \sin (\alpha - \varphi), \tag{10.62}$$

deoarece viteza iniţială, în A_1, este nulă.

Se înţelege că, dacă $\alpha \leqslant \varphi$, mobilul rămîne în A_1.

Dacă $\alpha > \varphi$, din (10.62) se deduce :

$$s = \frac{gt^2}{2 \cos \varphi} \sin (\alpha - \varphi), \tag{10.63}$$

ecuaţie care reprezintă o mişcare uniform accelerată cu acceleraţia :

$$\frac{g}{\cos \varphi} \sin (\alpha - \varphi).$$

În mişcarea descendentă, după timpul $t_1 = \frac{v_0 \cos \varphi}{g \sin (\alpha + \varphi)}$, mobilul, pornit din A_1, are viteza :

$$v_2 = \frac{v_0 \sin (\alpha - \varphi)}{\sin (\alpha + \varphi)} < v_0$$

şi a parcurs drumul :

$$s_2 = \frac{v_0^2 \cos \varphi \sin (\alpha - \varphi)}{2 g \sin^2 (\alpha + \varphi)} < s_1 .$$

Se înţelege că, dacă frecarea ar fi neglijabilă, s-ar găsi :

$$t_1 = \frac{v_0}{g \sin \alpha}, \quad s_1 = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}, \quad v_2 = v_0, \quad s_2 = s_1.$$

Ca exerciţiu se va studia mişcarea descendentă cu viteză iniţială diferită de zero. Se atrage atenţia asupra cazurilor : $\alpha < \varphi$ şi $\alpha = \varphi$.

2° *Pendulul simplu.* Se numeşte pendul simplu sau matematic un punct material greu, care se mişcă fără frecare pe un cerc fix, situat într-un plan vertical [1].

Un pendul simplu se poate concepe în următoarele moduri :

— dacă punctul material se mişcă fără frecare în interiorul unui tub circular (fig. 281, *a*);

— dacă punctul material se mişcă fără frecare, ca o mărgea petrecută printr-o sîrmă circulară (rigidă şi perfect netedă) (fig. 281, *b*);

— dacă punctul material este legat de un punct fix O, printr-o bară rigidă de masă neglijabilă şi dacă bara este articulată fără frecare în O (fig. 281, *c*);

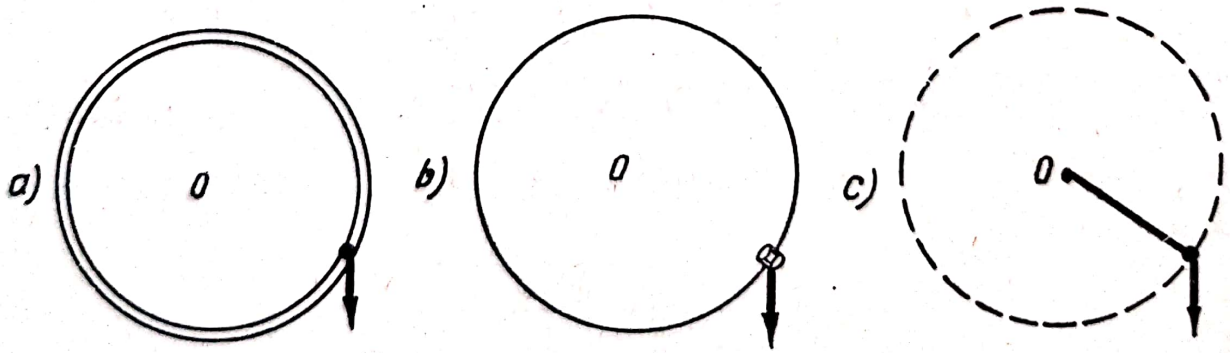


Fig. 281

[1] Dacă punctul material se mişcă fără frecare pe o sferă fixă, pendulul se numeşte sferic.

— punctul material este legat de un punct fix O, printr-un fir de masă neglijabilă. În toate aceste cazuri, planul cercului descris de punct trebuie să fie vertical. Primele trei legături sînt *bilaterale*, iar legătura prin fir este *unilaterală*. În acest din urmă caz, punctul material, în anumite condiții de mișcare, se poate elibera de legătură și se poate mișca după legea căderii în vid (pe o parabolă).

Problemă. Pendulul simplu, conceput printr-o legătură bilaterală pe un cerc de rază R, este deplasat din poziția verticală de repaus OA pînă la poziția OM_0 și lansat cu viteza inițială $\bar{v}_0$ tangentă la cerc (fig. 282).

Se cere mișcarea punctului material de masă m și reacțiunea legăturii.

Rezolvare. Se consideră punctul A ca originea arcelor descrise de M, măsurate în sens trigonometric. Se alege ca reper sistemul natural Mtn și se notează cu $s = R\theta$ arcul AM care determină poziția punctului M în momentul t. Condițiile inițiale ale mișcării sînt:

$$\text{arc } AM_0 = s_0 = R\theta_0 \text{ și } v_0 = R\dot{\theta}_0.$$

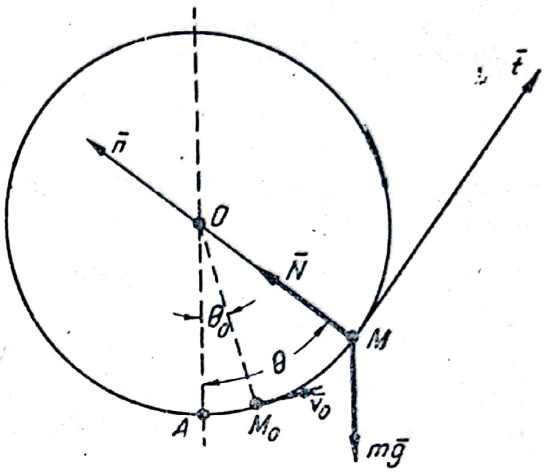


Fig. 282

Ecuațiile mișcării sînt:

$$m\dot{v} = -mg\sin\theta, \quad \frac{mv^2}{R} = N - mg\cos\theta, \quad (10.64)$$

unde N este valoarea, în raport cu axa Mn, a reacțiunii normale.

Deoarece: $v = R\dot{\theta}$ și $\dot{v} = R\ddot{\theta}$, din prima ecuație (10.64) se deduce ecuația diferențială a pendulului simplu:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0, \quad (10.65)$$

din care s-ar obține legea mișcării $\theta = f_1(t)$, după care cea de-a doua ecuație din (10.64) ar permite calcularea reacțiunii $N = f_2(\theta) = f_3(t)$ în orice poziție și moment.

Pentru integrarea ecuației (10.65) se multiplică cu $2\dot{\theta}$:

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{2g}{R}\dot{\theta}\sin\theta = 0, \qquad \dot{\theta}^2 - \frac{2g}{R}\cos\theta = C. \quad (10.66)$$

Condițiile inițiale dau:

$$C = \dot{\theta}_0^2 - \frac{2g}{R}\cos\theta_0 = \frac{v_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R}\cos\theta_0;$$

după înlocuirea constantei în (10.66), ecuația devine:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}\left(\cos\theta - \cos\theta_0 + \frac{v_0^2}{2gR}\right). \quad (10.67)$$

După transformări se ajunge la o integrală eliptică de prima speță:

$$t = \sqrt{\frac{R}{2g}}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0 + \frac{v_0^2}{2gR}}} \quad (10.68)$$

Scanned with OKEN Scanner

şi care nu se poate efectua decît prin metode aproximative (dezvoltări în serii, tabele etc).

Reacţiunea se determină în funcţie de θ, eliminînd pe v, respectiv pe $\dot{\theta}$, între (10.64) şi (10.67):

$$N = mg\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_0 + \frac{v_0^2}{gR}\right). \tag{10.69}$$

Discuţie. α) Dacă $\theta_0 = 0$ şi $v_0 = 0$, ecuaţia (10.67) se reduce la:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(\cos\theta - 1)$$

şi care nu admite altă soluţie reală decît $\theta = 0$, adică repausul în care reacţiunea este $N_0 = mg$.

β) Dacă $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ şi $v_0 = 0$, (10.68) devine:

$$t = -\sqrt{\frac{R}{2g}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}},$$

iar reacţiunea în momentul trecerii pendulului prin poziţia verticală ($\theta = 0$) este $N_1 = 3\,mg$, adică reacţiunea în mişcare este diferită de reacţiunea statică; în condiţiile arătate, este de trei ori cît reacţiunea statică.

γ) Dacă pendulul este lăsat să oscileze liber de la o poziţie iniţială OM_0, foarte puţin înclinată faţă de poziţia de repaus, este cazul micilor oscilaţii $\left(\text{de obicei cu } \theta_0 \leqslant \frac{\pi}{45}\right)$.

În acest caz: $\sin\theta \approx \theta$, iar ecuaţia (10.65) devine:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0,$$

o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul II fără membrul II. Integrala generală este:

$$\theta = C_1\cos\sqrt{\frac{g}{R}}\,t + C_2\sin\sqrt{\frac{g}{R}}\,t;$$

după ce se determină constantele de integrare, $C_1 = \theta_0$ şi $C_2 = 0$, ea devine:

$$\theta = \theta_0\cos\sqrt{\frac{g}{R}}\,t \tag{10.70}$$

şi reprezintă o mişcare oscilatorie armonică cu perioada:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Se regăsesc concluziile cunoscute din fizică:

— durata micilor oscilaţii nu depinde de amplitudinea θ_0, adică micile oscilaţii sînt *izocrone*;

— durata micilor oscilaţii nu depinde de masa punctului material care oscilează;

— durata este proporţională cu $\sqrt{R}$ şi invers proporţională cu $\sqrt{g}$.

Se mai ştie că cu ajutorul pendulului se determină *acceleraţia greutăţii* pe Pămînt.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL XI
CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

A. MIŞCĂRILE SIMPLE

§ 109. Generalităţi. Exemple de mişcări

a. Asimilarea unui sistem material cu un punct material aduce importante simplificări în studiul mişcării mecanice şi permite folosirea unui instrument matematic precis. Totuşi, cu toată preciziunea matematică a rezultatului, acesta nu reprezintă decît aproximativ mişcarea sistemului. Pentru o mai bună cunoaştere a acestei mişcări trebuie să se ţină seama şi de caracteristicile geometrice şi fizice ale sistemului material.

Astfel, dacă se analizează mişcarea numai din punct de vedere cinematic, ar trebui să se cunoască traiectoria, viteza şi acceleraţia în orice moment, ale oricărui punct material al sistemului.

Acest studiu dificil pentru sistemul material deformabil se simplifică dacă se presupune că sistemul este un *solid rigid.*

Pentru studiul cinematic al mişcării solidului rigid se va folosi schema următoare :

1° Din observarea deplasărilor diferitelor solide, întîlnite în practică sau în tehnică, se vor scoate în evidenţă caracteristicile esenţiale ale unor deplasări particulare.

2° După definirea deplasărilor particulare se vor studia teoretic mişcările corespunzătoare.

3° Se va studia teoretic mişcarea oarecare, generală, care trebuie să cuprindă atît mişcările particulare studiate cît şi orice mişcare posibilă a unui solid rigid.

4° Se va completa studiul mişcărilor particulare cu mişcările deduse din mişcarea generală.

5° Se vor rezolva unele aplicaţii practice ale cinematicii solidului rigid.

b. **Exemple.** Observînd şi analizînd deplasările pe care le au, în condiţii normale de funcţionare, următoarele solide : 1) tabla neagră din clasă (fig. 283, *a*), 2) carcasa vagonului de cale ferată, în mers pe o linie dreaptă (fig. 283, *b*), 3) cabinele roţii uriaşe dintr-un parc de odihnă şi de cultură (fig. 283, *c*), 4) biela cuplară a locomotivei în mers pe o linie dreaptă (fig. 283, *d*), 5) uşile şi ferestrele imobilelor (fig. 283, *e*), 6) volantul unui motor stabil, 7) roata unei locomotive care patinează pe loc, 8) sfîrleaza (fig. 283, *f*), 9) şurubul în mişcare faţă de mutelca sa, 10) elicea avionului cu motorul pornit, înaintea decolării, 11) elicea avionului în zbor, 12) roata locomotivei în mers pe o şină dreaptă (fig. 283, *d*), 13) mişcarea bielei din sistemul bielă-manivelă (fig. 215) etc., se constată că unele din aceste deplasări au anumite caracteristici comune.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, în exemplele (1), (2), (3) şi (4) deplasările se caracterizează prin aceea că : *o dreaptă care uneşte cîte două puncte arbitrare A şi B, ale fiecărui solid* (fig. 283, *a*, 283, *b*, 283, 283, *c* şi *d*), *rămîne paralelă cu ea însăşi.*

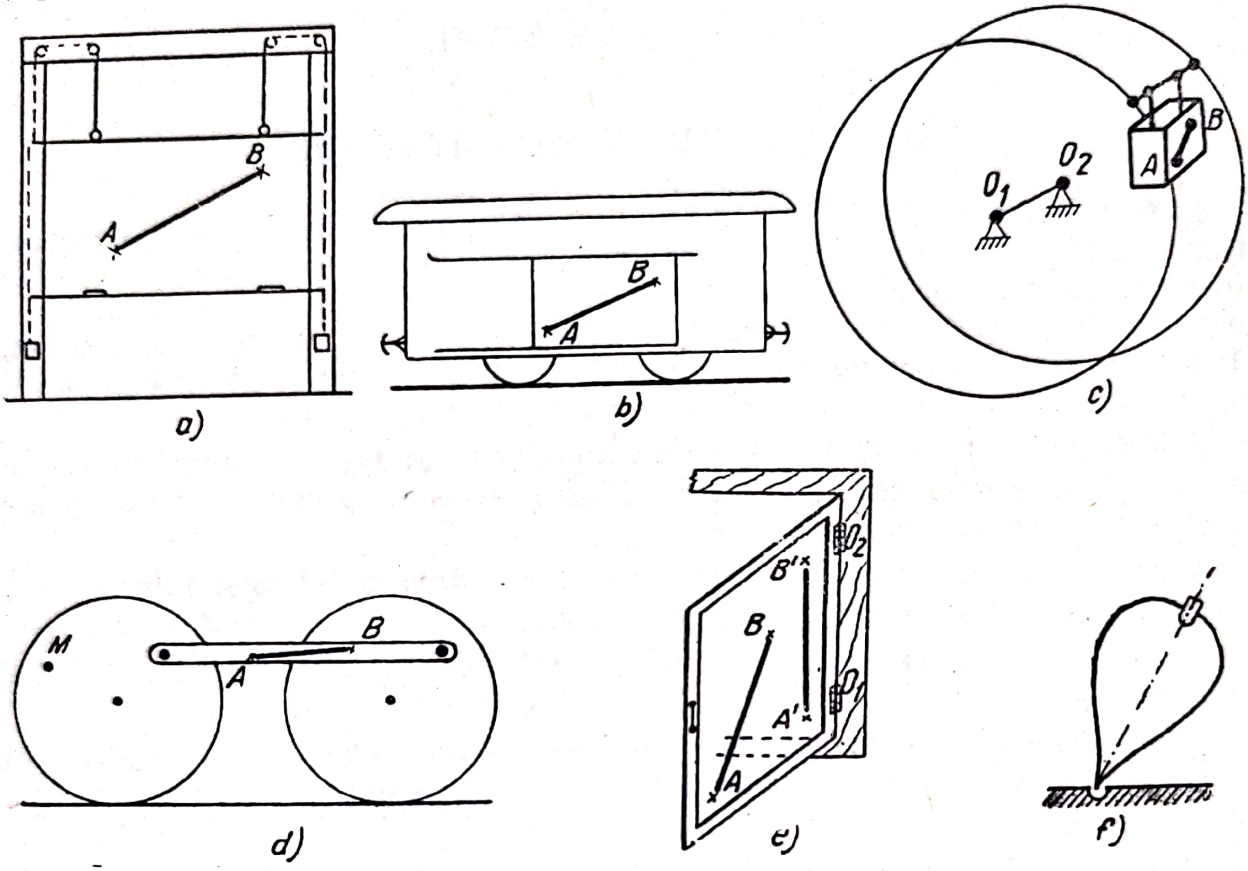


Fig. 283

Asemenea deplasări se numesc *translaţii.*

Definiţie. *Un solid rigid este în translaţie dacă, în cursul deplasării, dreapta care uneşte două puncte arbitrare ale solidului rămîne paralelă cu ea însăşi.*

Deplasările (1), (2), (3) şi (4) mai sînt caracterizate, în consecinţă, prin faptul că toate curbele descrise de punctele solidului sînt *egale şi paralele între ele.*

După forma curbelor egale şi paralele, translaţiile pot fi denumite astfel : (1) şi (2) *rectilinii*, iar (3) şi (4) *curbilinii*, şi anume (3) este o *translaţie circulară*, iar (4), o *translaţie cicloidală.*

Deplasările (5), (6), (7) şi (10) sînt esenţial diferite de primele patru deplasări analizate.

Astfel, dacă A şi B sînt două puncte oarecare ale ferestrei (fig. 283, *e*), în cursul deplasării dreapta AB nu rămîne paralelă cu ea însăşi, iar cercurile descrise de A şi B nu sînt egale. Este adevărat că se pot găsi anumite drepte, de exemplu $A'B'$, care rămîn paralele cu ele însele în cursul deplasării, iar cercurile descrise sînt paralele şi egale. Totuşi, deplasarea solidului *nu* este o translaţie, deoarece în definiţia translaţiei se precizează că *punctele trebuie să fie oarecare*, pe cînd A' şi B' sînt alese la egală distanţă de dreapta punctelor fixe O_1 şi O_2 ale ferestrei.

Deplasările (5), (6), (7) și (10) mai sînt caracterizate și prin faptul că toate punctele solidelor respective descriu cercuri cu planele paralele și cu centrele situate pe o dreaptă fixă, perpendiculară pe planele cercurilor. Asemenea deplasări se numesc *rotații.*

Definiție. *Un solid rigid este în rotație dacă, în cursul deplasării, cel puțin două puncte ale sale, sau solidare cu el, rămîn fixe. Dreapta determinată de aceste puncte fixe se numește* **axa de rotație.**

În exemplul ferestrei, dreapta fixă O_1O_2 este axa de rotație a ferestrei.

Solidele din exemplele (5), (6), (7) și (10) au deplasări de rotație.

Translațiile și rotațiile sînt denumite deplasări *simple.*

Deplasările solidelor considerate în exemplele (8), (9), (11), (12), și (13) sînt deplasări *compuse*, deoarece ele se pot reduce la diferite compuneri de translații și rotații.

Deplasările legate de timp se numesc **mișcări.** *Deplasărilor simple le corespund mișcările simple de translație sau de rotație. Deplasărilor compuse le corespund mișcările complexe, care, după cum se va vedea, pot fi asimilate, dar numai din anumite puncte de vedere, cu compuneri de mișcări simple.*

Exemple de mișcări se pot găsi foarte multe, dar, oricîte exemple s-ar căuta, nu este sigur că prin analizarea tuturor exemplelor întîlnite s-a epuizat numărul celor posibile.

Pentru un studiu complet este necesar ca, printr-un proces de abstractizare, să se ajungă la mișcarea oarecare, cea mai generală cu putință, care să le cuprindă pe toate cele posibile.

§ 110. Vectorii care determină poziția unui solid rigid

a. Se știe că poziția unui punct M poate fi determinată cu ajutorul vectorului său de poziție $\bar{r}' = \overline{O'M}$ în raport cu un reper $O'x'y'z'$, de obicei un triedru tridreptunghic drept, sau cu cele trei coordonate ale sale (fig. 284).

De asemenea, se știe că un solid rigid (C) este fix, în raport cu reperul $O'x'y'z'$, dacă trei puncte arbitrare ale sale O, A și B, formînd un triunghi veritabil, sînt fixe în raport cu reperul considerat (v. § 63). În adevăr, dacă numai un punct, de pildă O, este fix, solidul se poate mișca ca o sfîrlează în jurul acestui punct; dacă două puncte, de pildă O și A, sînt fixe, solidul se poate roti în jurul axei OA. Numai dacă și cel de-al treilea punct B, nesituat pe dreapta OA, este fix, solidul este și el fix.

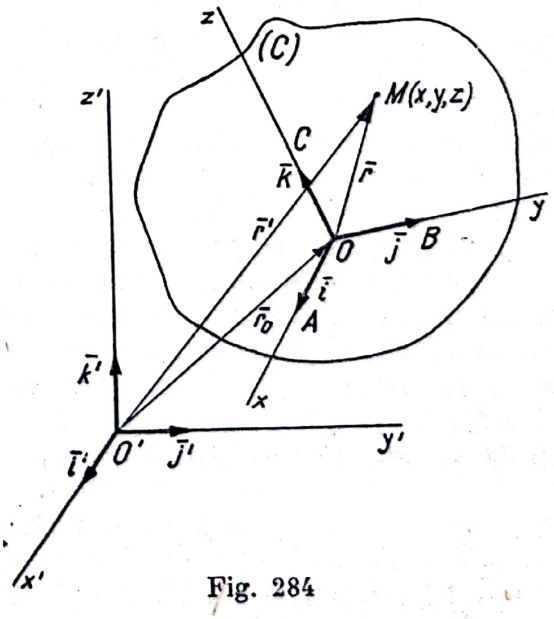


Fig. 284

Punctele O, A şi B pot fi alese astfel încît triunghiul OAB să fie isoscel şi dreptunghic în O. Dacă se notează $\overline{OA} = \vec{i}$ şi $\overline{OB} = \vec{j}$ şi deoarece

$$\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}, \tag{11.1}$$

se poate forma cu punctul O şi cu versorii $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi $\vec{k}$ un triedru tridreptunghic drept $Oxyz$.

În general, se va determina poziţia unui solid rigid (C) în raport cu un reper $O'x'y'z'$ cu ajutorul unui triedru tridreptunghic drept $Oxyz$, *invariabil legat* de solidul (C). La rîndul său, triedrul $Oxyz$ va fi determinat, în raport cu reperul $O'x'y'z'$, prin vectorii $\vec{r}_o$, $\vec{i}$ $\vec{j}$ şi $\vec{k}$, ultimul fiind dat de relaţia (11.1) şi de convenţia de orientare.

Dacă solidul (C) este fix în raport cu reperul cu originea în O', vectorii $\vec{r}_o$, $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi $\vec{k}$ sînt constanţi (în direcţie, sens şi modul) şi reciproc.

În general, dacă solidul (C) este în mişcare în raport cu reperul O', vectorii $\vec{r}_o$, $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi $\vec{k}$ sînt funcţii de scalarul timp.

Poziţia unui punct M al solidului (C) este determinată, în raport cu reperul $Oxyz$, prin vectorul său de poziţie $\vec{r}$, respectiv prin coordonatele sale x, y şi z:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{11.2}$$

Poziţia aceluiaşi punct M, în raport cu reperul $O'x'y'z'$, este determinată prin vectorul de poziţie $\vec{r}'$ sau prin coordonatele $x'y'$şi z':

$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' = \vec{r}_o + \vec{r} = \vec{r}_o + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{11.3}$$

Dacă solidul (C) şi, o dată cu el, triedrul $Oxyz$ se mişcă în raport cu $O'x'y'z'$, punctul M solidar cu (C) este în mişcare şi el, iar $\vec{r}'$ variază din cauza variaţiei în timp a vectorilor $\vec{r}_o$, $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi $\vec{k}$.

În acest caz, coordonatele x, y şi z nu depind de timp.

Însă, dacă M nu este solidar cu (C), ci în mişcare în raport cu (C), respectiv cu reperul $Oxyz$, şi coordonatele lui (x, y, z) sînt funcţii de timp. În acest din urmă caz există o suprapunere de mişcări: M se mişcă în raport cu (C), şi, o dată cu el, se mişcă în raport cu reperul din O'. Prima mişcare se numeşte *relativă*, iar mişcarea punctului M în raport cu reperul din O' se numeşte *absolută*[1].

În cinematica solidului rigid, M este un punct solidar cu (C) şi se mişcă o dată cu triedrul $Oxyz$, numit *triedru mobil*, în raport cu *triedrul fix* $O'x'y'z'$.

b. Pentru a cunoaşte mişcarea solidului rigid, adică mişcarea oricărui punct M al solidului, este suficient să se cunoască mişcarea triedrului invariabil legat de solid, adică variaţia în timp a vectorilor $\vec{r}_o$, $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi $\vec{k}$, precum şi coordonatele x, y, z ale punctului oarecare M.

Din (11.3) se deduce: $\vec{r}' = \vec{f}(t)$, care reprezintă atît traiectoria cît şi mişcarea punctului M, adică viteza şi acceleraţia:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{f}}(t), \qquad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{f}}(t). \tag{11.4}$$

[1] v. §§ 119, 120 şi 121.

Deoarece M poate fi orice punct al solidului (C), ecuaţiile (11.4) poartă numele de *ecuaţia de distribuţie a vitezelor*, respectiv a *acceleraţiilor* punctelor în mişcarea solidului (C).

Reciproc, dacă este dată una din ecuaţiile de distribuţie şi se cunosc condiţiile iniţiale, adică $\bar{r}(0)$ şi $\bar{v}(0)$ în momentul $t = 0$ pentru oricare din puncte, se poate determina mişcarea solidului. Astfel, dacă este dată ecuaţia $\bar{a} = \bar{\varphi}(t)$, prin integrări:

$$\bar{v} - \bar{v}(0) = \int_0^t \bar{a}\,dt, \qquad \bar{r}' - \bar{r}'(0) = \int_0^t \bar{v}\,dt, \tag{11.5}$$

se calculează ecuaţia de distribuţie a vitezelor, precum şi ecuaţiile traiectoriilor punctelor şi se determină mişcarea solidului.

Observaţie. S-au notat vectorii care reprezintă condiţiile iniţiale ale punctului M cu $\bar{r}'(0)$ şi $\bar{v}(0)$ şi nu cu $\bar{r}_0'$ respectiv $\bar{v}_0$, ca în cinematica punctului. Aceasta, pentru a se evita confuzia care s-ar putea face cu caracteristicile cinematice ale punctului O. În consecinţă, $\bar{r}_o$, $\bar{v}_o$ şi $\bar{a}_o$ sînt, în cinematica solidului, vectorul de poziţie, viteza şi acceleraţia, într-un moment oarecare, ale punctului O, originea triedrului mobil.

§ 111. Mişcarea de translaţie

a. Se consideră un solid rigid (C). Punctele solidului sînt reprezentate prin punctul oarecare M, triedrul fix prin O', iar cel mobil prin O (fig. 285).

Pentru ca solidul (C) să aibă o mişcare de translaţie este necesar şi suficient ca o dreaptă oarecare solidară cu (C), cum ar fi dreapta determinată de punctul M şi originea O, să rămînă paralelă cu ea însăşi. Deoarece solidul este rigid, este necesar şi suficient ca vectorul $\overline{OM} = \bar{r}$ să fie constant în direcţie, sens şi modul. Cum:

$$\dot{\bar{r}}' = \bar{r}_o + \dot{\bar{r}}, \tag{11.6}$$

prin derivare, deoarece $\dot{\bar{r}} = 0$, se conchide că:

$$\bar{v} = \bar{v}_o, \qquad \bar{a} = \bar{a}_o, \tag{11.7}$$

adică: *toate punctele unui solid rigid în mişcare de translaţie au în orice moment vitezele egale şi acceleraţiile egale, în direcţie, sens şi modul, iar traiectoriile paralele şi egale.*

Deci, în mişcarea de translaţie este suficient să se cunoască mişcarea unui singur punct al solidului rigid, oricare ar fi el. De obicei se alege punctul O, originea triedrului mobil.

Mişcarea de translaţie este caracterizată vectorial prin $\bar{v}_o$, viteza în orice moment a originii O a triedrului invariabil legat de solidul în mişcare.

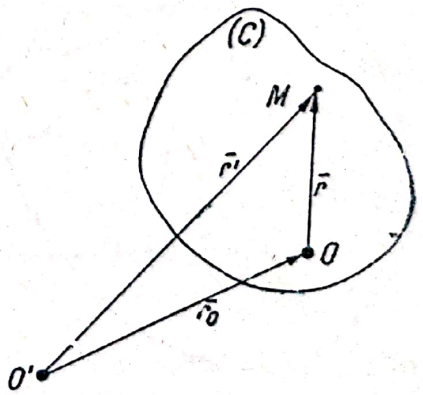


Fig. 285

Ecuaţiile de distribuţie pentru viteze şi acceleraţii sînt (11.7), iar traiectoriile punctelor solidului se deduc din traiectoria punctului O pe baza relaţiei (11.6).

b. Reciproc, dacă viteza $\bar{v}$ a oricărui punct M este egală în orice moment cu viteza unui punct O:

$$\bar{v} = \bar{v}_o, \tag{11.8}$$

solidul are o mişcare de translaţie.

În adevăr, integrînd (11.8) în raport cu t, se găseşte:

$$\bar{r}' = \bar{r}_o + \bar{c} = \bar{r}_o + \bar{r}; \qquad \bar{r} = \overline{OM} = \bar{c},$$

adică segmentul de dreaptă OM este constant şi îşi păstrează direcţia, ceea ce este — potrivit definiţiei — caracteristic mişcării de translaţie.

Observaţie. Dacă toate punctele solidului rigid au, numai într-un moment oarecare t, aceeaşi viteză şi aceeaşi acceleraţie cu punctul O, solidul rigid posedă o distribuţie instantanee a vitezelor şi a acceleraţiilor, ca şi cum ar efectua o mişcare de translaţie.

§ 112. Mişcarea de rotaţie

a. Se consideră un solid rigid cu o axă fixă OA (fig. 286). Se alege unul din punctele fixe, O, atît ca origine a triedrului fix $O'x'y'z'$ cît şi a triedrului mobil $Oxyz$. Ca o consecinţă imediată a definiţiei (v. § 109) rezultă că, în mişcarea de rotaţie, punctele solidului rigid — cu excepţia celor de pe axa OA — descriu cercuri cu planele perpendiculare pe axă, cu centrele pe axă, avînd razele egale cu distanţele lor pînă la axă.

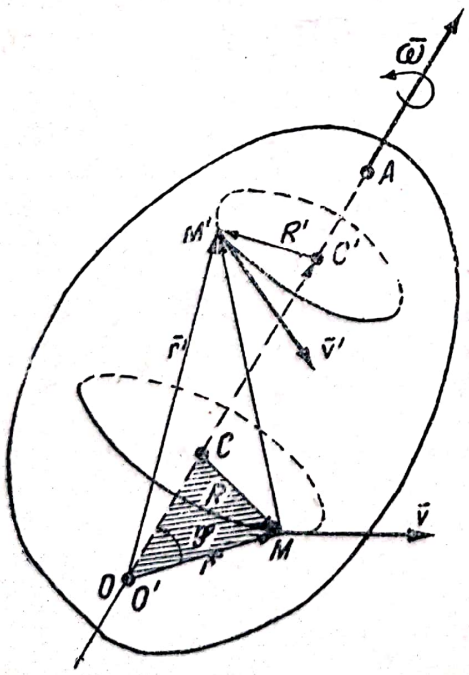


Fig. 286

b. Se demonstrează că, deoarece solidul este rigid, toate punctele lui descriu cercurile respective cu aceeaşi viteză unghiulară ω.

Este suficient să se arate că, dacă un punct oarecare $M(\bar{r})$ are în momentul t viteza unghiulară ω, orice alt punct la întîmplare, $M'(\bar{r}')$, are în acelaşi moment viteza unghiulară $\omega' = \omega$.

Vectorul $\overline{MM'}$ variază în direcţie, dar $|\overline{MM'}| = \text{const.}$, solidul fiind rigid. Însă:

$$\overline{MM'} = \bar{r}' - \bar{r}, \text{ iar } \mathrm{d}|\overline{MM'}| = 0.$$

Ţinînd seama de relaţia (3.5) (v. § 32), rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}|\bar{r}' - \bar{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\bar{r}' - \bar{r}}{|\bar{r}' - \bar{r}|}(\dot{\bar{r}}' - \dot{\bar{r}}) = 0,$$

$$\bar{u}\bar{v}' = \bar{u}\bar{v} \tag{11.9}$$

unde s-a notat cu $\bar{u}$ versorul vectorului $\overline{MM'}$, iar $\bar{v}'$ şi $\bar{v}$ sînt vitezele în momentul t ale punctelor M' şi M.

Deci, *proiecţiile vitezelor a două puncte solidare între ele, pe dreapta care le uneşte, sînt egale.*

Această proprietate este adevărată, oricare ar fi mişcarea punctelor solidare între ele M şi M', deoarece în demonstraţie nu s-a precizat felul mişcării.

Pe de altă parte:

$$\bar{u} = \frac{\overline{MM'}}{|\overline{MM'}|} = \frac{\overline{MC} + \overline{CC'} + \overline{C'M'}}{|\overline{MM'}|},$$

astfel că relaţia (11.9) devine:

$$(\overline{CC'} + \overline{C'M'} - \overline{CM})\bar{v}' = (\overline{CC'} + \overline{C'M'} - \overline{CM})\bar{v}.$$

Dezvoltînd şi observînd că, în cazul mişcării de rotaţie, $\bar{v}'$ este perpendicular pe $\overline{C'M'}$, $\bar{v}$ este perpendicular pe $\overline{CM}$, iar $\bar{v}'$ şi $\bar{v}$ sînt perpendiculari pe axă, deci pe $\overline{CC'}$, se obţine relaţia:

$$-\overline{CM} \cdot \bar{v}' = \overline{C'M'} \cdot \bar{v}. \tag{11.10}$$

Se notează cu R' şi R razele cercurilor descrise, respectiv de M' şi M, şi cu α unghiul dintre vectorii $\overline{C'M'}$ şi $\overline{CM}$.

Expresia scalară a relaţiei (11.10) este:

$$-R\,|\bar{v}'|\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = R'\,|\bar{v}|\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)^*,$$

şi deoarece:

$$|\bar{v}'| = R'\omega' \quad \text{şi} \quad |\bar{v}| = R\omega,$$

rezultă:

$$\omega' = \omega. \qquad \text{c.c.t.d.}$$

c. În aceste condiţii se poate caracteriza mişcarea de rotaţie a unui solid rigid cu ajutorul unui vector axial $\bar{\omega}$ cu originea în O, orientat în sensul în care observatorul aşezat pe axă în sensul vectorului $\bar{\omega}$ vede solidul rotindu-se de la dreapta spre stînga sa.

Dar modulul vitezei unui punct oarecare M se poate scrie sub forma:

$$|\bar{v}| = |\bar{\omega}|\,R = |\bar{\omega}|\,|\bar{r}|\sin\varphi, \tag{11.11}$$

unde: $\bar{r}$ este vectorul de poziţie al punctului M în raport cu triedrul $Oxyz$, iar φ — unghiul pe care-l formează acest vector cu axa de rotaţie, respectiv cu $\bar{\omega}$.

---

* Dacă $\alpha < \frac{\pi}{2}$, prima paranteză devine $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, ceea ce nu modifică cu nimic mersul demonstraţiei.

Se observă că, în relaţia (11.11), partea a doua este chiar modulul produsului vectorial dintre $\bar{\omega}$ şi $\bar{r}$. Pentru ca $\bar{v}$ să fie efectiv acest produs, mai este necesar ca $\bar{v}$ să fie perpendicular pe planul $\bar{\omega}$, $\bar{r}$ şi orientat astfel încît triedrul format cu vectorii $\bar{\omega}$, $\bar{r}$ şi $\bar{v}$ să fie drept. Ambele condiţii sînt satisfăcute şi în consecinţă:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{11.12}$$

este *ecuaţia de distribuţie a vitezelor în mişcarea de rotaţie a solidului rigid.*

Observaţii. 1° Deoarece:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = (-\bar{r}) \times \bar{\omega} = \overline{MO} \times \bar{\omega},$$

se mai poate exprima viteza unui punct oarecare M al unui solid rigid în mişcare de rotaţie prin momentul vectorului $\bar{\omega}$ în raport cu punctul M. Se observă că exprimarea nu se modifică, chiar dacă $\bar{\omega}$ este un vector alunecător, avînd axa de rotaţie ca suport.

2° Cunoaşterea în orice moment a vectorului alunecător $\bar{\omega}$, determinat prin suport (axa de rotaţie), sens şi modul $|\bar{\omega}| = f(t)$ (legea mişcării de rotaţie), caracterizează pe deplin mişcarea de rotaţie a solidului rigid.

3° Dacă $\bar{\omega} = \bar{c}$, mişcarea de rotaţie a solidului se numeşte *uniformă*. Este necesar să se precizeze că solidul are o rotaţie uniformă, însă punctele lui, descriind cercuri, nu pot avea mişcări uniforme, ci mişcări circulare, cu viteza constantă în modul, dar cu direcţia variabilă.

d. *Ecuaţia de distribuţie a acceleraţiilor* se obţine din (11.12) prin derivare:

$$\bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}.$$

Se observă că, dacă $\bar{\omega}$ şi $\bar{\omega}'$ reprezintă rotaţia solidului în momentele t şi $t' = t + \Delta t$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{\omega}' - \bar{\omega}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{\omega}}{\Delta t} = \dot{\bar{\omega}}, \tag{11.13}$$

unde $\dot{\bar{\omega}}$ este un vector coliniar cu $\bar{\omega}$, deoarece $\bar{\omega}$ şi $\bar{\omega}'$ au acelaşi suport. Sensul lui $\dot{\bar{\omega}}$ coincide cu sensul lui $\bar{\omega}$ dacă $|\bar{\omega}|$ creşte cu timpul şi, invers, $\dot{\bar{\omega}}$ este de sens contrar cu $\bar{\omega}$ dacă $|\bar{\omega}|$ descreşte cu timpul. În aceste condiţii:

$$\bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \tag{11.14}$$

Scanned with OKEN Scanner

este ecuația de distribuție a accelerațiilor în mișcarea de rotație a solidului rigid.

Observații. 1° Cu ajutorul vectorilor $\bar{\omega}$ și $\dot{\bar{\omega}}$, coliniar cu $\bar{\omega}$, se poate da o construcție grafică a accelerației unui punct M (fig. 287).

Se observă că $\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}$, *accelerația tangențială* ($\bar{a}_t$) a punctului M este coliniară cu $\bar{v}$, iar sensul coincide sau nu cu sensul vitezei $\bar{v}$, după cum $\dot{\bar{\omega}}$ și $\bar{\omega}$ au sau nu același sens.

Accelerația normală ($\bar{a}_n$) se exprimă prin $\bar{\omega} \times \bar{v}$ și este orientată mereu spre centrul cercului descris de M.

Prin construirea diagonalei din M a dreptunghiului de însumare a accelerației tangențiale și a celei normale se obține accelerația $\bar{a}$ a punctului M.

2° Modulul accelerației $\bar{a}$ este:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2},$$

dar:

$$|\bar{a}_t| = |\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}| = |\dot{\bar{\omega}}|\,|\bar{r}| \sin\varphi = R|\dot{\bar{\omega}}|,$$

$$|\bar{a}_n| = |\bar{\omega} \times \bar{v}| = |\bar{\omega}|\,R\,|\bar{\omega}| = R\omega^2,$$

deci:

$$|\bar{a}| = R\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}. \qquad (11.15)$$

3° Merită să fie scos în evidență faptul că mișcările simple ale solidului rigid sînt caracterizate vectorial cu ajutorul vectorilor $\bar{v}_o$ și $\bar{\omega}$. În mișcarea de translație, $\bar{v}_o$, funcție de timp, are toate caracteristicile sale variabile, cu excepția originii, care este legată de originea triedrului mobil $Oxyz$. În mișcarea de rotație, $\bar{\omega}$ este un vector alunecător pe un suport fix — axa fixă de rotație a solidului rigid — și are atît modulul cît și sensul variabile cu timpul.

De aceea, se mai poate scrie:

$$\bar{\omega} = \omega\bar{u}, \qquad \omega = f(t), \qquad (11.16)$$

unde: $\bar{u}$ este versorul axei de rotație, iar ω este valoarea algebrică a vectorului $\bar{\omega}$ în raport cu axa.

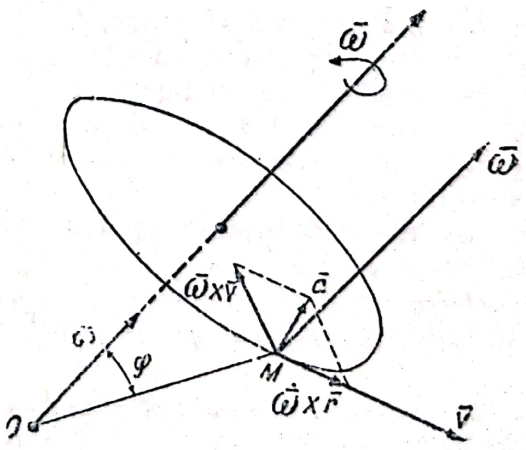


Fig. 287

B. MIŞCĂRI COMPLEXE

§ 113. Mişcarea solidului cu un punct fix

a. Unul din exemplele date la § 109 a fost şi mişcarea sfîrlezei. Se ştie că o sfîrlează, lansată cu o viteză unghiulară foarte mare în jurul axei de simetrie, are o mişcare asemănătoare mişcării de rotaţie. Totuşi mişcarea nu este o rotaţie, deoarece sfîrleaza nu are decît un singur punct fix, punctul de reazem cu podeaua. De altfel, îndată ce, din cauza rezistenţelor, mişcarea se încetineşte, devine evidentă deosebirea dintre mişcarea sfîrlezei şi mişcarea de rotaţie, deoarece axa de simetrie a sfîrlezei are o mişcare destul de complexă.

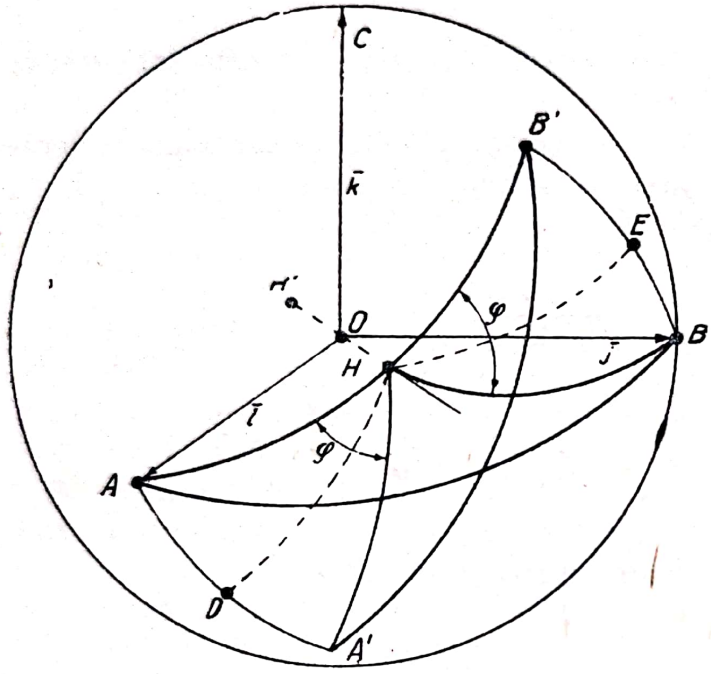


Fig. 288

Pentru studiul cinematic al solidului cu un punct fix se poate alege, ca sistem de referinţă legat de solid, un triedru tridreptunghic drept, cu originea în punctul fix O (fig. 288). Se ştie (§ 110) că, pentru determinarea poziţiei triedrului mobil în raport cu triedrul fix, este suficient să se cunoască în orice moment vectorii $\bar{r}_o$, $\bar{i}$ şi $\bar{j}$, iar pentru determinarea poziţiei solidului sînt necesare coordonatele x, y, z ale punctelor solidului în raport cu triedrul mobil.

Se ştie că aceste coordonate sînt independente de timp.

Originea O' a triedrului fix poate fi tot punctul $O(\bar{r}_o = 0)$, astfel că pentru determinarea poziţiei triedrului mobil nu mai sînt necesare decît versorii $\bar{i}$ şi $\bar{j}$ sau vîrfurile lor A şi B, deoarece vîrful C al versorului $\bar{k}$ se determină, de fiecare dată, prin construcţia indicată de relaţia $\bar{k} = \bar{i} \times \bar{j}$.

Se observă că vîrfurile A, B şi C se mişcă pe o sferă cu centrul în O şi cu raza unitatea. În aceste condiţii, studiul mişcării solidului cu un punct fix se reduce la studiul mişcării unei suprafeţe sferice pe propria-i suprafaţă.

b. Pentru studiul cinematic al mişcării se poate folosi următoarea *teoremă a lui Euler*:

Orice solid cu un punct fix poate fi adus dintr-o poziţie oarecare în orice altă poziţie, printr-o rotaţie finită în jurul unei axe care trece prin punctul fix.

Demonstraţie. Se consideră planul razelor OA şi OB care intersectează sfera după arcul de cerc mare AB. Razele OA, OB şi arcul AB formează un triunghi curbiliniu OAB. La început se va demonstra că triunghiul OAB poate fi adus din poziţia iniţială în orice

altă poziție $OA'B'$, printr-o rotație finită în jurul unei axe fixe care trece prin centrul sferei O (fig. 288).

În adevăr, deoarece triunghiul OAB este rigid :

$$\text{arc c.m. } AB = \text{arc c.m. } A'B'. \tag{11.17}$$

Se construiesc arcele de cerc mare AA', BB' și se determină mijloacele D și E ale acestor arce. Planul care trece prin D și O perpendicular pe planul arcului AA' intersectează sfera tot după un cerc mare, la fel și planul care trece prin E și O perpendicular pe planul arcului BB'. Cele două cercuri mari se intersectează în punctele H și H' diametral opuse.

Se mai construiesc și arcele de cerc mare AH, $A'H$, BH și $B'H$.

În geometrie se demonstrează că :

$$\text{arc c.m. } HA = \text{arc c.m. } HA' \quad \text{și} \quad \text{arc c.m. } HB = \text{arc c.m. } HB'. \tag{11.18}$$

Din (11.17) și (11.18) rezultă că triunghiurile sferice AHB și $A'HB'$ sînt egale, avînd laturile respective egale; deci și unghiurile curbilinii AHB și $A'HB'$ sînt egale.

Scăzînd din unghiurile egale unghiul curbiliniu comun $A'HB$, rămîne că :

$\sphericalangle$ curb. $AHA' = \sphericalangle$ curb. BHB'.

De asemenea sînt egale și unghiurile diedre dintre planele $HH'A$ și $HH'A'$, pe de o parte, și $HH'B$ și $HH'B'$, pe de altă parte. S-a notat cu φ unghiul plan corespunzător celor două diedre.

De aici reiese că planele $HH'A$ și $HH'B$ pot fi aduse în poziția $HH'A'$, respectiv $HH'B'$, printr-o rotație finită de unghiul φ în jurul axei fixe HH'.

Se înțelege că, o dată cu punctele A și B, întreg triedrul $OABC$, precum și solidul invariabil legat de el pot fi aduse dintr-o poziție în oricare alta, printr-o rotație finită în jurul unei axe care trece prin punctul fix O, iar unghiul de rotație φ este același pentru toate punctele solidului.

c. **Consecințele teoremei lui Euler** sînt următoarele :

1° Axa de rotație HH' este fixă numai pentru schimbarea de poziție considerată. Pentru o altă schimbare de poziție se determină, prin aceeași construcție, o altă axă de rotație și rezultă un alt unghi de rotație.

2° Dacă se presupune că punctele A și B trec, în intervalul de timp Δt, dintre momentele t și $t' = t + \Delta t$, prin pozițiile A' și B' infinit vecine cu A și B și dacă se notează unghiul de rotație infinit mic cu $\Delta\theta$, la limită, cînd $\Delta t \to 0$:

— axa OH tinde către o poziție limită OI, care este axa de rotație în momentul t și se numește axă momentană sau *instantanee* de rotație;

— viteza unghiulară de rotație, în momentul t, este :

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dot{\theta}.$$

3° Întocmai ca la mișcarea de rotație propriu-zisă, mișcarea solidului cu un punct fix poate fi caracterizată, *din punct de vedere cinematic*, cu ajutorul unui vector. Acest vector, *variabil în timp*, $\bar{\omega}(t)$, *are ca suport* axa instantanee, *sensul* potrivit convenției observatorului în funcție de sensul mișcării, *modulul*, rezultînd din *legea mișcării*.

În consecință, distribuția de viteze este dată de aceeași relație vectorială :

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \tag{11.19}$$

ca la mişcarea de rotaţie propriu-zisă, cu deosebirea *esenţială* că la mişcarea solidului cu un punct fix suportul vectorului $\bar{\omega}$ (axa instantanee OI) îşi schimbă necontenit direcţia.

4° Ecuaţia de distribuţie a acceleraţiilor se deduce din (11.19) prin derivare în raport cu timpul:

$$\bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \qquad (11.20)$$

Cu toate că, *formal*, se obţine aceeaşi ecuaţie de distribuţie ca la mişcarea de rotaţie, totuşi există şi aici deosebiri esenţiale. Pe lîngă faptul că suportul lui $\bar{\omega}$ nu este fix, nici $\dot{\bar{\omega}}$ (vectorul reprezentînd *acceleraţia unghiulară*) nu este coliniar cu $\bar{\omega}$, ca la mişcarea de rotaţie.

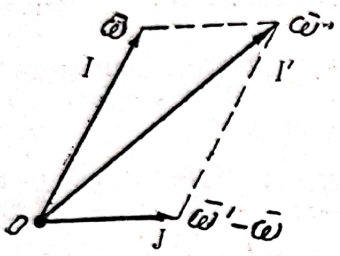


Fig. 289

În adevăr, dacă în momentele t şi $t' = t + \Delta t$, $\bar{\omega}$ şi $\bar{\omega}'$ sînt vectorii asociaţi axelor instantanee OI şi OI', se observă că, deoarece:

$$\dot{\bar{\omega}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{\omega}' - \bar{\omega}}{\Delta t},$$

direcţia vectorului $\dot{\bar{\omega}}$, limita direcţiei OJ (fig. 289), cînd $\Delta t \to 0$, nu coincide cu direcţia lui $\bar{\omega}$.

5° Denumirea de mişcare de rotaţie instantanee, dată uneori mişcării solidului cu un punct fix, este *improprie*, deoarece, în momentul considerat t, punctele axei instantanee OI au numai vitezele nule, *nu şi acceleraţiile*.

Astfel, dacă M este un punct oarecare al axei OI, vectorul său de poziţie, în raport cu reperul fix, cu originea în O, este $\bar{r}_M = \lambda\bar{\omega}$, unde λ este un parametru oarecare.

Evident, în momentul t:

$$\bar{v}_M = \omega \times \lambda\bar{\omega} = 0.$$

dar, în general:

$$\bar{a}_M = \dot{\bar{\omega}} \times \lambda\bar{\omega} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \lambda\bar{\omega}) = \lambda\dot{\bar{\omega}} \times \bar{\omega} \neq 0.$$

6° În particular, $\bar{a}_M = 0$ în următoarele cazuri:

$\lambda = 0$, punctul M este chiar punctul fix O;

$\bar{\omega} = 0$, solidul este fix;

$\dot{\bar{\omega}} = 0$, deci $\bar{\omega} = \bar{c}$, solidul are o mişcare de rotaţie uniformă în jurul unei axe fixe;

$\dot{\bar{\omega}}$ coliniar cu $\bar{\omega}$, în cazul cînd direcţia lui $\bar{\omega}$ nu variază, solidul are o axă fixă de rotaţie.

De altfel, se poate demonstra că în mişcarea solidului cu un singur punct fix O, acesta este unicul punct al solidului care, în momentul t, are acceleraţia nulă.

7° În consecinţă, este evident că *numai în ceea ce priveşte distribuţia instantanee de viteze lucrurile se petrec ca şi cum, în momentul t, solidul ar avea o mişcare de rotaţie în jurul axei instantanee, suportul vectorului* $\bar{\omega}$.

În fiecare moment, o altă dreaptă care trece prin O devine axă instantanee de rotație. Mulțimea continuă de axe instantanee formează, în raport cu triedrul fix $O'x'y'z'$, o suprafață conică, numită *axoida fixă.*

Axa instantanee nu este fixă nici în raport cu triedrul mobil $Oxyz$, solidar cu solidul în mișcare. Mulțimea continuă de axe instantanee formează și în raport cu acest triedru o suprafață conică, numită *axoida mobilă* a mișcării (fig. 290).

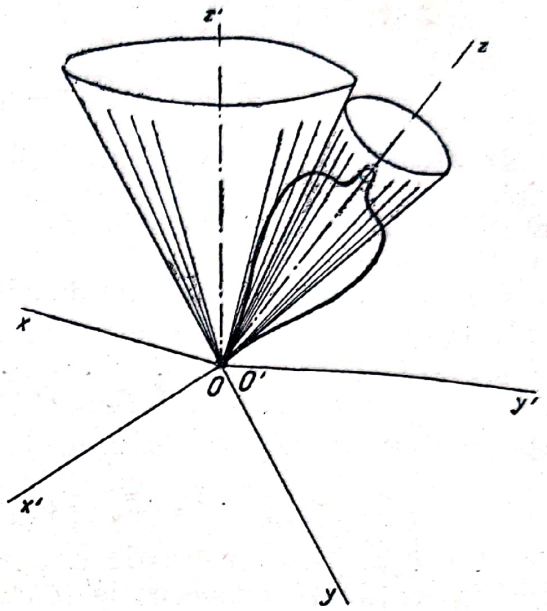


Fig. 290

Se demonstrează[1] că, în tot timpul mișcării solidului cu un punct fix, *axoida mobilă este tangentă, după o generatoare comună, la axoida fixă, se rostogolește fără să alunece peste axoida fixă*, iar generatoarea comună este chiar axa instantanee din acel moment *(Conurile și mișcarea Poinsot).*

8° În mișcarea solidului cu un punct fix, versorii triedrului invariabil legat de solid sînt vectori variabili în direcție, iar vîrfurile lor A, B și C se mișcă o dată cu solidul.

Calculîndu-se vitezele acestor vîrfuri cu ecuația generală (11.19), în care:

$$\bar{r}_A = \bar{i}, \quad \bar{r}_B = \bar{j}, \quad \bar{r}_C = \bar{k},$$

se găsesc formulele lui *Poisson*:

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i}, \quad \dot{\bar{j}} = \bar{\omega} \times \bar{j}, \quad \dot{\bar{k}} = \bar{\omega} \times \bar{k}. \tag{11.21}$$

§ 114. Mișcarea oarecare a unui solid rigid

a. La § 110 s-a stabilit expresia vectorului de poziție $\bar{r}'(t)$ al unui punct oarecare M al solidului rigid, în raport cu triedrul $O'x'y'z'$, și anume:

$$\bar{r}' = \bar{r}_o + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

în care:

$\bar{r}_o(t)$ este vectorul de poziție al originii triedrului $Oxyz$, solidar cu solidul în mișcare;

$\bar{i}\ (t)$, $\bar{j}(t)$, $\bar{k}(t)$ — versorii triedrului mobil;

x,y,z — coordonatele punctului M în raport cu $Oxyz$.

Se știe că x,y,z nu depind de timp.

[1] v. G. K. Suslov. *Mecanica rațională.* Editura tehnică, 1950, p. 116, 117.

Distribuţia vitezelor se obţine prin derivarea relaţiei precedente în raport cu t şi folosirea formulelor lui Poisson (11.21) :

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}' = \dot{\bar{r}}_o + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}} = \bar{v}_o + x\bar{\omega} \times \bar{i} + y\bar{\omega} \times \bar{j} + z\bar{\omega} \times \bar{k},$$

deci :

$$\bar{v} = \bar{v}_o + \bar{\omega} \times \bar{r}. \tag{11.22}$$

În această ecuaţie, $\bar{v}_o\,(t)$ şi $\bar{\omega}\,(t)$ sînt *vectorii caracteristici* ai mişcării solidului rigid, $\bar{v}(t)$ este viteza punctului arbitrar M în raport cu triedrul fix $O'x'y'z'$, iar poziţia punctului M în raport cu triedrul mobil $Oxyz$ este dată de $\bar{r}(t)$.

Pentru a obţine ecuaţia de distribuţie a acceleraţiilor se derivează ecuaţia (11.22) în raport cu t :

$$\dot{\bar{v}} = \dot{\bar{v}}_o + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}},$$

deci :

$$\bar{a} = \bar{a}_o + \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \tag{11.23}$$

în care $\bar{a}_o(t)$ este acceleraţia originii triedrului mobil.

Observaţii : 1° Din ecuaţia (11.22) se constată că, în mişcarea cea mai generală a solidului rigid, distribuţia de viteze se obţine prin suprapunerea a două distribuţii :

$$\bar{v}' = \bar{v}_o \qquad \text{şi} \qquad \bar{v}'' = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Prima corespunde unei translaţii, iar cea de-a doua, mişcării solidului cu un punct fix.

Pe de altă parte, s-a arătat la § 113, 7° că, în această din urmă mişcare, distribuţia instantanee de viteze corespunde unei rotaţii în jurul axei instantanee din momentul t, şi anume suportul vectorului $\bar{\omega}$.

În consecinţă, *în mişcarea cea mai generală a solidului rigid, distribuţia instantanee de viteze se obţine prin suprapunerea a două distribuţii : una corespunzătoare unei translaţii, iar alta, unei rotaţii în jurul unei axe instantanee.*

2° Se precizează că *solidul are o mişcare unică* şi nu una compusă dintr-o translaţie şi o rotaţie. Numai din punctul de vedere al distribuţiei *instantanee* de viteze lucrurile se petrec *ca şi cum* s-ar suprapune două cîmpuri de viteze.

3° În ceea ce priveşte distribuţia de acceleraţii se poate de asemenea descompune ecuaţia (11.23) în două ecuaţii de distribuţie :

$$\bar{a}' = \bar{a}_o \text{ şi } \bar{a}'' = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}).$$

Ca şi în cazul distribuţiei de viteze, prima componentă corespunde unei translaţii, iar cea de-a doua, mişcării solidului cu un punct fix.

Dar s-a arătat, tot la § 113, că distribuţia instantanee de acceleraţii, în mişcarea solidului cu un punct fix, *nu corespunde unei rotaţii.*

b. *Cazuri particulare de mişcări.* Discuţia mişcărilor pe care le poate avea un solid rigid se face în funcţie de particularităţile vectorilor caracteristici $\bar{\omega}(t)$ şi $\bar{v}_o(t)$, întocmai cum s-a făcut discuţia cazurilor de reducere la un sistem

de vectori alunecători, în funcţie de componentele torsorului echivalent sistemului, adică în funcţie de $\bar{V}$ şi $\bar{M}$ (v. § 46).

Astfel, dacă :

1° $\bar{\omega} = 0$ şi $\bar{v}_o = 0$, solidul rigid este în repaus faţă de reperul $O'x'y'z'$.

2° $\bar{\omega} = 0$ şi $\bar{v}_o \neq 0$, ecuaţiile de distribuţii sînt date la (11.7), adică :

$$\bar{v} = \bar{v}_o \qquad \text{şi} \qquad \bar{a} = \bar{a}_o,$$

iar mişcarea este o *translaţie.*

3° $\bar{v}_o = 0$, $\bar{\omega} \neq 0$, dar cu *suportul invariabil,* ecuaţiile de distribuţii sînt :

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (11.12) \text{ şi } \bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \qquad (11.14)$$

iar mişcarea este o *rotaţie propriu-zisă.*

4° $\bar{v}_o = 0$, $\bar{\omega} \neq 0$, dar cu *suportul variabil* trecînd mereu prin punctul fix O. Ecuaţiile de distribuţie, deşi au aceleaşi forme cu (11.12) şi (11.14), totuşi mişcarea nu este o rotaţie, ci este *mişcarea solidului cu un punct fix.*

După cum se vede, s-au regăsit cazurile particulare studiate mai pe larg la §§ 111, 112 şi 113.

5° $\bar{\omega} \neq 0$, $\bar{v}_o \neq 0$, dar *ambii vectori caracteristici au acelaşi suport invariabil.* La § 109, *b*, s-a dat un exemplu care corespunde acestui caz : mişcarea şurubului faţă de mutelca sa. Un alt exemplu : mişcarea elicei unui avion care înaintează în direcţia axului elicei.

Mişcarea se numeşte *elicoidală,* suportul comun fiind *axa mişcării elicoidale* (v. § 115).

6° $\bar{\omega} \neq 0$, dar cu direcţia invariabilă, $\bar{v}_o \neq 0$ situat mereu într-un plan fix, dus prin O perpendicular pe direcţia lui $\bar{\omega}$.

La § 109, *b*, s-a dat ca exemplu mişcarea roţii de locomotivă pe o şină dreaptă. În tot timpul mişcării, un plan solidar cu roata se mişcă într-un plan fix. Mişcarea se numeşte *plan-paralelă* (v. § 116).

Alte aspecte particulare se vor studia la §§ 115, 116, 117, în funcţie de valorile vectorilor caracteristici $\bar{\omega}$ şi $\bar{v}_o$.

c. Reluînd studiul mişcării generale a solidului rigid, caracterizată prin $\bar{\omega}$ şi $\bar{v}_0$ variabili în timp, se demonstrează că această mişcare poate fi asimilată, *însă numai din punctul de vedere al distribuţiei instantanee de viteze, cu o mişcare elicoidală.*

În primul rînd, se observă că, înmulţind ecuaţia (11.22) scalar cu $\bar{\omega}$, se obţine :

$$\bar{\omega}\bar{v} = \bar{\omega}(\bar{v}_o + \bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega}\bar{v}_o,$$

adică : *proiecţia vitezei oricărui punct $M(\bar{r})$ al solidului pe direcţia vectorului $\bar{\omega}$ este un invariant, independent de poziţia punctului.*

Apoi, se descompune viteza $\bar{v}_o$, din momentul considerat, a originii O a triedrului mobil, după direcţia $\bar{\omega}$ şi după perpendiculara pe $\bar{\omega}$ din planul $Ov_0\omega$, adică :

$$\bar{v}_o = \bar{v}'_o + \bar{v}''_o,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\bar{v}'_o$ este componenta invariantă a vitezei oricărui punct al solidului. Se alege un alt triedru mobil, de asemenea solidar cu solidul, avînd originea într-un punct O_1 (fig. 291) şi cu axele paralele cu primul triedru, adică :

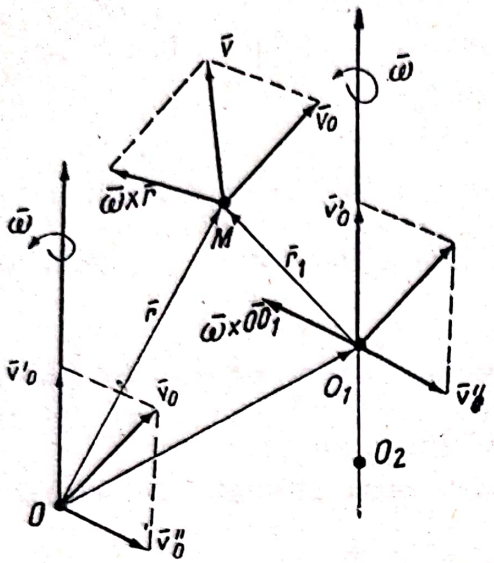


Fig. 291

$$\bar{r} = \overline{OO_1} + \bar{r}_1.$$

În aceste condiţii, expresia vitezei punctului arbitrar M devine :

$$\bar{v} = \bar{v}'_o + \bar{v}''_o + \bar{\omega} \times (\overline{OO_1} + \bar{r}_1) =$$

$$= \bar{v}'_o + \bar{\omega} \times \bar{r}_1 + \bar{v}''_o + \bar{\omega} \times \overline{OO_1}.$$

Se poate alege noua origine O_1, astfel încît :

$$\bar{v}''_o + \bar{\omega} \times \overline{OO_1} = 0. \qquad (11.24)$$

Se ştie că această ecuaţie vectorială admite o infinitate de soluţii exprimate prin :

$$\overline{OO_1} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}''_o}{\omega^2} + \lambda\bar{\omega}, \qquad (11.25)$$

unde λ este un parametru scalar.

Toate punctele O_1 care satisfac ecuaţia (11.24) se găsesc, după cum se vede din (11.25), pe o paralelă la $\bar{\omega}$.

Folosind noul triedru mobil cu originea în O_1, expresia vitezei unui punct arbitrar M, în raport cu triedrul fix O', devine :

$$\bar{v} = \bar{v}'_o + \bar{\omega} \times \bar{r}_1, \qquad (11.26)$$

în care apar vectorii $\bar{v}'_o$ şi $\bar{\omega}$ avînd acelaşi suport.

Prin urmare, potrivit ecuaţiei (11.26), *mişcarea generală a solidului rigid corespunde, din punctul de vedere al distribuţiei instantanee de viteze, cu o mişcare elicoidală.*

Axa instantanee a mişcării elicoidale este dată de ecuaţia (11.25).

d. *Axoidele mişcării generale.* Axa instantanee se schimbă în fiecare moment, în mod continuu. Mulţimea axelor instantanee formează, în raport cu triedrul fix, o suprafaţă riglată S', *axoida fixă*, iar în raport cu triedrul mobil, o suprafaţă de asemenea riglată S, *axoida mobilă.*

Se demonstrează [1] *că, în tot timpul mişcării solidului, axoida mobilă se rostogoleşte peste axoida fixă şi alunecă în acelaşi timp în lungul generatoarei de contact, care, în momentul considerat, este axa instantanee a mişcării elicoidale.*

e. **Expresiile analitice** se deduc din ecuaţiile vectoriale în care vectorii sînt înlocuiţi prin expresiile lor complexe.

Astfel, un punct oarecare M al solidului în mişcare este determinat în raport cu triedrul mobil $Oxyz$, respectiv triedrul fix $O'x'y'z'$, prin relaţiile :

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad \bar{r}' = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}',$$

[1] v. G. K. Suslov. *Mecanica raţională.* Editura tehnică, 1950, p. 125, 126.

iar expresiile complexe ale vitezei originii triedrului mobil O în raport cu cele două triedre sînt:

$$\bar{v}_o = v_{ox}\bar{i} + v_{oy}\bar{j} + v_{oz}\bar{k}, \quad \bar{v}_o = v_{ox}'\bar{i}' + v_{oy}'\bar{j}' + v_{oz}'\bar{k}'.$$

De asemenea, expresiile complexe ale vectorului $\bar{\omega}$, în raport cu cele două triedre sînt:

$$\bar{\omega} = \omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k}, \quad \bar{\omega} = \omega_x'\bar{i}' + \omega_y'\bar{j}' + \omega_z'\bar{k}'.$$

Expresiile complexe ale vectorului $\dot{\bar{\omega}}$ se deduc prin derivarea expresiilor vectorului $\bar{\omega}$ în raport cu timpul.

f. **Exemple de calcul**: 1° Pentru expresiile proiecţiilor, pe axele triedrului mobil, ale vitezei unui punct $M(x, y, z)$. se aplică operaţiile indicate de ecuaţia (11.22) şi apoi se egalează coeficienţii versorilor, adică:

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k} = v_{ox}\bar{i} + v_{oy}\bar{j} + v_{oz}\bar{k} + (\omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k}) \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}).$$

Pînă la sfîrşit se găseşte:

$$v_x = v_{ox} + z\omega_y - y\omega_z, \quad v_y = v_{oy} + x\omega_z - z\omega_x,$$
$$v_z = v_{oz} + y\omega_x - x\omega_y.$$

2° Tot ca o aplicaţie a calculului cu expresii complexe se pot determina ecuaţiile axei instantanee a mişcării elicoidale raportate la triedrul $Oxyz$.

Din cele arătate la § 114, c, reiese că axa instantanee este locul punctelor solidului care au, în momentul t, viteza paralelă cu $\bar{\omega}$.

Dacă O_1 (x_1, y_1, z_1) este un asemenea punct, condiţia de paralelism se exprimă prin:

$$\frac{v_{ox} + z_1\omega_y - y_1\omega_z}{\omega_x} = \frac{v_{oy} + x_1\omega_z - z_1\omega_x}{\omega_y} = \frac{v_{oz} + y_1\omega_x - x_1\omega_y}{\omega_z},$$

care sînt ecuaţiile axei instantanee a mişcării elicoidale.

3° Alte exemple de calcul cu expresii analitice se vor da la mişcarea elicoidală şi la mişcarea plană.

§ 115. Mişcarea elicoidală

a. Mişcarea şurubului în raport cu mutelca sa, a elicei avionului care înaintează în direcţia axei elicei sînt două din multele exemple de mişcări elicoidale care se întîlnesc în tehnică şi în viaţa practică.

Mişcarea elicoidală poate fi caracterizată *geometric* prin faptul că o dreaptă, solidară cu rigidul în mişcare, alunecă în lungul unei drepte fixe, care este axa mişcării elicoidale.

Punctele solidului rigid descriu elice cilindrice.

După cum s-a arătat la § 114, aceste mişcări sînt caracterizate *cinematic* prin vectorii $\bar{\omega}(t)$ şi $\bar{v}_o(t)$, cu acelaşi suport fix, axa mişcării elicoidale (fig. 292).

Mişcările solidelor din cele două exemple date se deosebesc prin aceea că punctele elicei de avion descriu elice cu *pas variabil*, pe cînd cele ale şurubului descriu elice circulare, cu *pas constant*.

La mişcarea elicoidală oarecare nu există o relaţie între valorile vectorilor caracteristici $\bar{\omega}$ şi $\bar{v}_o$.

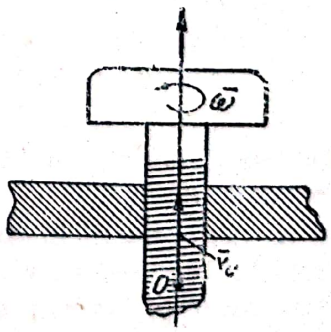


Fig. 292

Mişcarea de şurub este un caz particular al mişcării elicoidale, deoarece între ω şi v_o există o relaţie.

Relaţia dintre valorile vectorilor care caracterizează mişcarea de şurub se stabileşte exprimînd proporţia :

$$\lim \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{2\pi}{p} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta\theta}{\Delta t}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}} = \frac{\omega}{v_o} = \frac{1}{R \operatorname{tg} \alpha}, \tag{11.27}$$

unde :

$\Delta\theta$ este unghiul elementar de rotaţie, în timpul Δt, în jurul axei;
Δs — deplasarea, elementară în timpul Δt, în direcţia axei;
ω — valoarea, raportată la axă, a vitezei unghiulare în mişcarea de rotaţie;
v_o — valoarea, raportată la axă, a vitezei liniare în mişcarea de translaţie;
R — raza cilindrului elicei circulare;
α — înclinarea elicei circulare considerate.

Dacă $\bar{\omega}$ şi $\bar{v}_o$ au acelaşi sens (ω şi v_o au acelaşi semn), şurubul are filetul *drept*; în caz contrar, filetul se numeşte *stîng*. La mişcarea de şurub există o corespondenţă perfectă între sensul de rotaţie şi sensul de translaţie al solidului.

Relaţia dintre valoarea acceleraţiei unghiulare $\dot{\bar{\omega}}$ în mişcarea de rotaţie şi valoarea acceleraţiei liniare $\bar{a}_o$ în mişcarea de translaţie se deduce din (11.27) :

$$\frac{\dot{\omega}}{a_o} = \frac{2\pi}{p} = \frac{1}{R \operatorname{tg} \alpha}. \tag{11.28}$$

În cazul mişcării elicoidale oarecare, ecuaţiile de distribuţie pentru viteze şi acceleraţii au aceeaşi formă ca în cazul mişcării generale :

$$\bar{v} = \bar{v}_o + \bar{\omega} \times \bar{r}, \tag{11.29}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_o + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \tag{11.30}$$

cu deosebirea esenţială că aici vectorii $\bar{\omega}$, $\dot{\bar{\omega}}$, $\bar{v}_o$ şi $\bar{a}_o$ sînt coliniari şi au direcţia invariabilă.

În consecinţă, în mişcarea elicoidală, atît distribuţia de viteze cît şi distribuţia de acceleraţii se obţin prin suprapunerea a două distribuţii, una corespunzînd unei mişcări de translaţie în direcţia axei şi alta corespunzînd unei mişcări de rotaţie în jurul axei mişcării elicoidale.

Scanned with OKEN Scanner

b. **Construcțiile grafice** pentru viteza unui punct M (fig. 293) și pentru accelerația lui (fig. 294) dau o imagine mai clară a mișcării elicoidale. Astfel, în figura 293, $\bar{\omega} \times \bar{r}$ reprezintă viteza corespunzătoare mișcării de rotație, iar $\bar{v}_o$, viteza corespunzătoare mișcării de translație.

Viteza în mișcarea elicoidală este :

$$\bar{v} = \bar{v}_o + \bar{v}_{rot}, \quad |\bar{v}| = \sqrt{v_o^2 + R^2\omega^2}, \qquad (11.31)$$

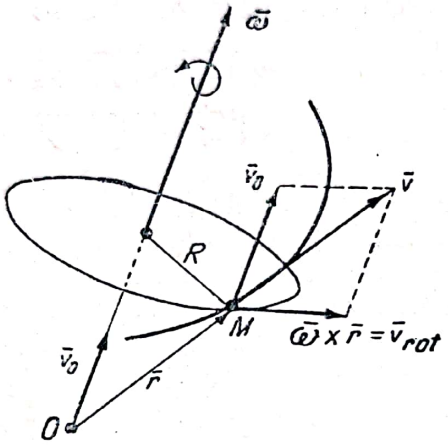


Fig. 293

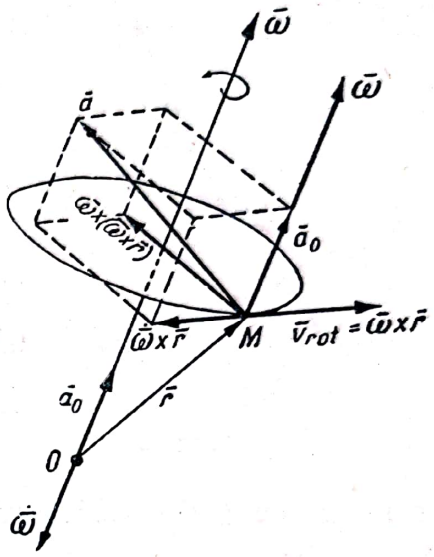


Fig. 294

iar traiectoria este o elice, tangentă în M la $\bar{v}$, trasată pe un cilindru circular drept de rază R.

În figura 294, $\bar{a}_o$ este accelerația corespunzătoare unei translații, $\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}$ este accelerația tangențială, iar $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$, accelerația normală corespunzînd unei mișcări de rotație.

Accelerația punctului M este :

$$\bar{a} = \bar{a}_o + \bar{a}_{tg} + \bar{a}_{norm}, \qquad |\bar{a}| = \sqrt{a_o^2 + R^2(\dot{\omega}^2 + \omega^4)}. \qquad (11.32)$$

c. **Expresii analitice.** Din relațiile vectoriale, prin înlocuirea vectorilor cu expresiile lor complexe în raport cu sistemul tridreptunghic de axe față de care se calculează, se deduc expresiile analitice ale vitezei și accelerației punctului $M(x, y, z)$ al solidului.

Pentru simplificarea calculelor s-a ales axa Oz coincizînd cu axa mișcării elicoidale, deci :

$$\bar{\omega} = \omega\bar{k}, \quad \bar{v}_o = v_o\bar{k},$$

unde ω și v_o sînt valorile vectorilor caracteristici, în raport cu axa lor comună : Apoi :

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega}\bar{k} \text{ și } \bar{a}_o = \dot{\bar{v}}_o = \dot{v}_o\bar{k} = a_o\bar{k},$$

unde $\dot{\omega}$ și a_o sînt valorile vectorilor $\dot{\bar{\omega}}$ și $\bar{a}_o$. Deoarece :

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

înlocuind în ecuaţiile (11.29) şi (11.30) şi egalînd coeficienţii versorilor $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi $\bar{k}$, se obţin expresiile:

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = v_o,$$

$$a_x = -\dot{\omega} y - \omega^2 x, \quad a_y = \dot{\omega} x - \omega^2 y,$$

$$a_z = a_o$$

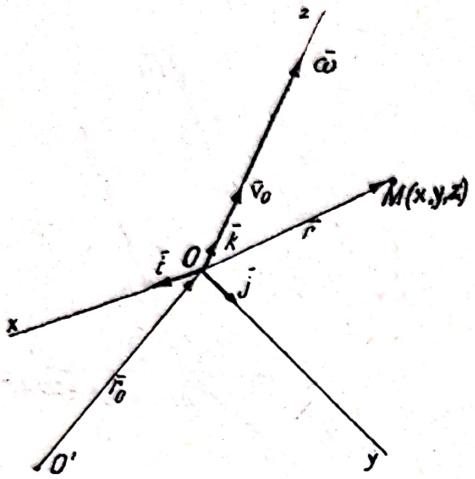


Fig. 295

şi, în fine, cu ajutorul relaţiilor:

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

se regăsesc formulele (11.31) şi (11.32).

Observaţii. 1° Calculul componentelor vitezei şi acceleraţiei punctului M, în raport cu triedrul fix $O'x'y'z'$, se face cu ajutorul formulelor de transformare sau direct, exprimînd vectorii caracteristici şi derivatele lor în raport cu axele triedrului fix şi efectuînd operaţiile indicate de ecuaţiile vectoriale.

2° Expresiile analitice corespunzătoare mişcării de rotaţie se deduc imediat, anulînd peste tot pe v_o şi a_o.

§ 116. Mişcarea plan-paralelă

a. Printre exemplele de mişcări, date la § 109, mai sînt: roata unei locomotive care se deplasează pe o şină dreaptă şi mişcarea bielei din sistemul bielă-manivelă.

O analiză sumară a acestor mişcări arată că ele *nu sînt mişcări simple*, nu au caracterul nici al unei translaţii şi nici al unei rotaţii.

Aceste *mişcări complexe* par a fi compuse din mişcările simple de translaţie şi rotaţie, dar se va constata că şi această impresie este greşită.

Mişcările din exemplele alese pot fi caracterizate *geometric* astfel: în tot timpul mişcării solidul rigid are cel puţin trei puncte nesituate pe o linie dreaptă, adică un plan solidar cu rigidul, care se mişcă într-un plan fix.

Aceeaşi caracterizare o are şi mişcarea unui echer ale cărui vîrfuri se mişcă pe o planşetă fixă.

Toate aceste trei exemple de mişcări se încadrează în *mişcarea plan-paralelă*.

b. **Definiţie.** *Un solid rigid are o mişcare plan-paralelă dacă există un plan, invariabil legat de solid, care se mişcă într-un plan fix.*

La § 114 s-a arătat că această mişcare este caracterizată, din punct de vedere *cinematic*, prin vectorii $\bar{\omega}(t)$, avînd direcţia invariabilă şi $\bar{v}_o(t)$ situat în permanenţă într-un plan fix, dus prin O, perpendicular pe direcţia vectorului $\bar{\omega}$.

c. *Observaţii şi consecinţe.* 1° Orice punct al rigidului în mişcare plan-paralelă rămîne la distanţă invariabilă faţă de planul fix al mişcării.

2° În tot timpul mişcării plan-paralele, toate punctele rigidului situate pe aceeaşi perpendiculară pe planul fix au mişcări identice. În adevăr, dreapta fiind perpendiculară pe planul fix, rămîne mereu paralelă cu ea însăşi în timpul mişcării. Deci, această dreaptă a rigidului are o mişcare de translaţie. În consecinţă, toate punctele rigidului situate pe această dreaptă descriu traiectorii paralele şi au, în acelaşi moment, aceeaşi viteză şi aceeaşi acceleraţie.

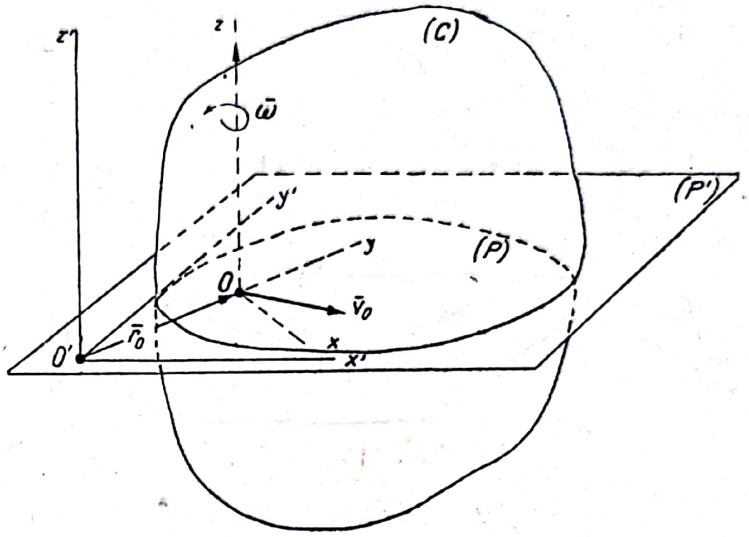


Fig. 296

3° Ca urmare, în mişcarea plan-paralelă, oricare din punctele rigidului are aceeaşi mişcare ca şi corespunzătorul lui din planul solidar cu rigidul şi care se mişcă în planul fix.

4° De aici mai rezultă că mişcările tuturor planelor rigidului, paralele cu planul fix, sînt identice cu mişcarea planului care se mişcă în planul fix.

5° În consecinţă, dacă un solid rigid (C) are o mişcare plan-paralelă cu planul fix (P') (fig. 296), este suficient să se studieze mişcarea *secţiunii* (P) a rigidului prin planul fix (P'), secţiune care se mişcă rămînînd mereu în planul fix.

6° Prin *mişcare plană* se înţelege mişcarea unei plăci rigide plane (P) în raport cu propriul ei plan fix (P').

7° În figura 296, planul fix (P') secţionează solidul rigid (C) după planul mobil (P). Triedrul fix $O'x'y'z'$ se compune din axele $O'x'$, $O'y'$, situate în planul (P'), şi axa $O'z'$, perpendiculară pe acest plan. Triedrul mobil $Oxyz$ se compune din axele Ox, Oy, situate în planul mobil (P), şi axa Oz, perpendiculară pe acest plan şi care, în tot timpul mişcării, rămîne paralelă cu $O'z'$.

8° Vectorii caracteristici ai mişcării sînt: $\bar{\omega}$, după Oz şi $\bar{v}_o$, viteza originii O a triedrului mobil $Oxyz$.

9° Studiul mişcării plane se va face la § 117, urmînd ca, prin mijlocirea observaţiilor precedente, să se facă legătura dintre mişcarea plană a plăcii plane (P) şi mişcarea plan-paralelă a solidului rigid (C).

§ 117. Mişcarea plană

a. *Distribuţia de viteze.* De obicei, datele unei probleme de mişcare plană sînt funcţiile vectoriale:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}(t) \quad \text{şi} \quad \bar{v}_o = \bar{v}_o(t).$$

În figura 297 nu este reprezentat decît vectorul $\bar{v}_o$, deoarece $\bar{\omega}$ este perpendicular pe planul (P), respectiv (P'). Planul (P') este chiar planul hîrtiei, O' este originea triedrului fix, iar O a celui mobil.

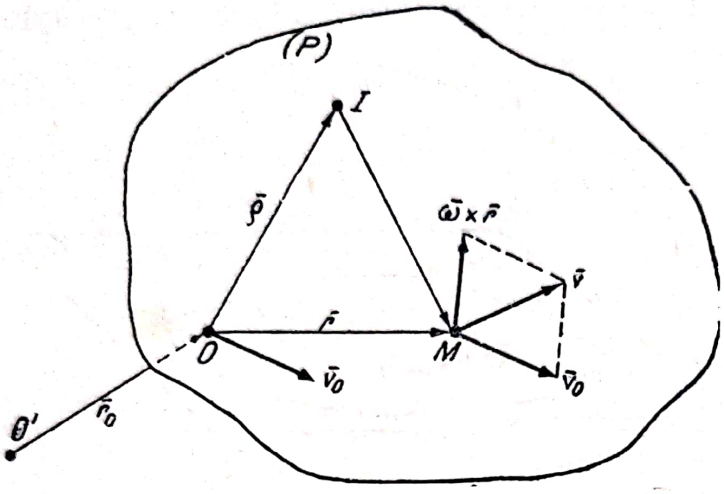


Fig. 297

Se ştie că viteza unui punct arbitrar M al planului mobil este dată de ecuaţia :

$$\bar{v} = \bar{v}_o + \bar{\omega} \times \bar{r},$$

adică rezultă din însumarea a două distribuţii instantanee de viteze, una corespunzătoare unei mişcări de translaţie ($\bar{v}_o$) şi alta unei rotaţii ($\bar{\omega}$) în jurul axei duse prin O, perpendicular pe planul fix. În consecinţă, viteza oricărui punct al planului (P) este un vector situat în acest plan.

b. În momentul considerat (t), se poate găsi în plan un punct I ($\bar{\rho}$) cu viteză nulă :

$$\bar{v}_I = \bar{v}_o + \bar{\omega} \times \bar{\rho} = 0, \tag{11.33}$$

unde $\bar{\rho}$ este vectorul de poziţie al punctului căutat I.

Din (11.33), înmulţind vectorial cu $\bar{\omega}$:

$$\bar{\omega} \times \bar{v}_o + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) = \bar{\omega} \times \bar{v}_o + (\bar{\omega}\bar{\rho})\,\bar{\omega} - (\bar{\omega}\bar{\omega})\,\bar{\rho} = \bar{\omega} \times \bar{v}_o - \omega^2\bar{\rho} = 0,$$

deoarece $\bar{\omega}\bar{\rho} = 0$, se deduce :

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_o}{\omega^2} \quad \text{şi} \quad |\bar{\rho}| = \frac{|\bar{v}_o|}{|\bar{\omega}|}, \tag{11.34}$$

adică : *I se află pe perpendiculara din planul (P) dusă în O la $\bar{v}_o$, în sensul în care triedrul $O\omega v_o \rho$ este drept, la distanţa* $\frac{|\bar{v}_o|}{|\bar{\omega}|}$.

Dacă în expresia vitezei punctului M se înlocuieşte $\bar{r}$ prin $\bar{\rho} + \overline{IM}$, în baza relaţiei (11.33), se găseşte :

$$\bar{v} = \bar{v}_o + \bar{\omega} \times (\bar{\rho} + \overline{IM}) = \bar{v}_o + \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times \overline{IM} = \bar{\omega} \times \overline{IM},$$

adică : distribuţia instantanee de viteze a planului (P) este corespunzătoare unei rotaţii, reprezentată prin $\bar{\omega}$, în jurul punctului I, ca şi cum acesta ar fi fix.

Se precizează din nou că nu este vorba de o rotaţie propriu-zisă, deoarece, în momentul $t + \Delta t$, punctul O are altă poziţie, $\bar{v}_o$ şi $\bar{\omega}$ au alte valori, astfel încît un alt punct I_1 are — în acel moment — viteza nulă, iar distribuţia de viteze din acel moment corespunde unei rotaţii în jurul punctului I_1.

În consecinţă, *mişcarea cea mai generală a unei plăci plane în propriul ei plan poate fi privită, din punctul de vedere al distribuţiei instantanee de viteze, ca o mulţime continuă de rotaţii în jurul unor centre instantanee de rotaţie, care se succed de asemenea în mod continuu.*

Scanned with OKEN Scanner

c. Mulțimea centrelor instantanee de rotație formează în planul fix (P') o curbă fixă numită *centroida fixă*, iar în planul mobil (P), o altă curbă, solidară cu acest plan numită *centroida mobilă.*

Se va demonstra la § 120 că în tot timpul mișcării planului (P), în raport cu planul (P'), centroida mobilă *se rostogolește fără să alunece* pe centroida fixă[1]. Punctul de tangență dintre cele două centroide este centrul instantaneu de rotație din momentul considerat.

d. La fel, *mișcarea plan-paralelă a unui solid rigid* (C) *poate fi privită, din punctul de vedere al distribuției instantanee de viteze, ca o mulțime continuă de rotații în jurul unor axe instantanee, care se succed de asemenea în mod continuu. Mulțimea axelor instantanee de rotație formează, în raport cu triedrul fix, o suprafață cilindrică numită* axoida fixă, *iar în raport cu triedrul mobil, solidar cu* (C), *o altă suprafață cilindrică, numită* axoida mobilă.

În tot timpul mișcării plan-paralele a solidului (C), *axoida mobilă rămîne tangentă, după o generatoare comună, la axoida fixă și se rostogolește fără să alunece peste axoida fixă. Generatoarea comună este, în momentul considerat, axa instantanee de rotație.*

Observație. Dacă axa de rotație ar fi mereu aceeași, mișcarea ar fi *o rotație propriu-zisă.* În consecință, mișcarea de rotație poate fi privită ca un caz particular al mișcării plan-paralele.

e. *Distribuția de accelerații.* Se știe că ecuația de distribuție a accelerațiilor este, ca și în cazul mișcării generale :

$$\bar{a} = \bar{a}_o + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \qquad (11.35)$$

cu deosebirea că, la mișcarea plană, $\dot{\bar{\omega}}$ este coliniar cu $\bar{\omega}$, iar $\bar{a}_o$ este situat ca și $\bar{v}_o$ în planul (P).

În figura 298 s-au reprezentat numai $\bar{v}_o$ și $\bar{a}_o$, deoarece $\bar{\omega}$ și $\dot{\bar{\omega}}$ sînt perpendiculari pe plan și orientați, de pildă, ambii spre observator. Dezvoltînd dublul produs vectorial din ecuația (11.35) și deoarece $\bar{\omega}\bar{r} = 0$, ecuația devine :

$$\bar{a} = \bar{a}_o + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} - \omega^2 \bar{r}. \qquad (11.36)$$

În orice moment t se poate găsi în planul (P) un punct J cu accelerația nulă :

$$\bar{a}_J = \bar{a}_o + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\eta} - \omega^2 \bar{\eta} = 0, \qquad (11.37)$$

ecuație din care se deduce vectorul de poziție $\bar{\eta}$ al punctului J. În adevăr, înmulțind (11.37) vectorial cu $\dot{\bar{\omega}}$:

$$\dot{\bar{\omega}} \times \bar{a}_o + \dot{\bar{\omega}} \times (\dot{\bar{\omega}} \times \bar{\eta}) - \omega^2 \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\eta} = 0,$$

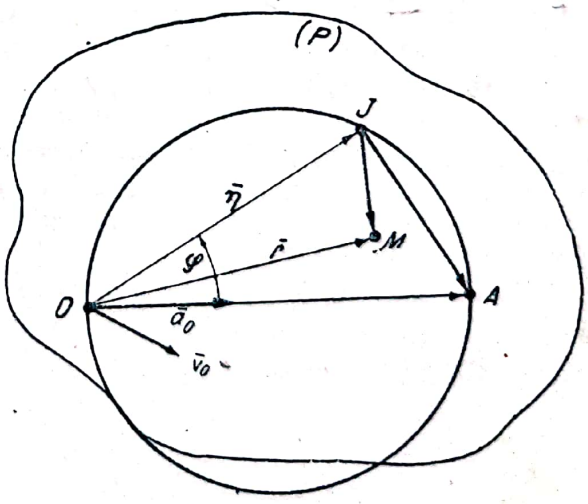


Fig. 298

[1] De aceea, centroida mobilă se mai numește și *rostogolitoarea*, iar centroida fixă, *baza* mișcării plane.

dezvoltînd :

$$\dot{\bar{\omega}} \times \bar{a}_o + (\dot{\bar{\omega}}\bar{\eta})\bar{\omega} - \bar{\omega}^2\bar{\eta} - \omega^2\dot{\bar{\omega}} \times \bar{\eta} = 0$$

şi observînd că :

$$\dot{\bar{\omega}}\bar{\eta} = 0 \qquad \text{iar :} \qquad \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\eta} = \omega^2\bar{\eta} - \bar{a}_o,$$

se găseşte :

$$\bar{\eta} = \frac{\dot{\bar{\omega}} \times \bar{a}_o + \omega^2\bar{a}_o}{\dot{\omega}^2 + \omega^4} \quad \text{şi} \quad |\bar{\eta}| = \frac{|\bar{a}_o|}{\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}}. \tag{11.38}$$

Dacă se exprimă acceleraţia unui punct curent M cu ajutorul vectorului de poziţie $\overline{JM}$:

$$\bar{r} = \bar{\eta} + \overline{JM},$$

se obţine succesiv :

$$\bar{a} = \bar{a}_o + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{\eta} + \overline{JM}) - \omega^2(\bar{\eta} + \overline{JM}),$$

$$\bar{a} = \underline{\bar{a}_o + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\eta} - \omega^2\bar{\eta}} + \dot{\bar{\omega}} \times \overline{JM} - \omega^2\overline{JM},$$

$$\bar{a} = \qquad 0 \qquad + \dot{\bar{\omega}} \times \overline{JM} - \omega^2\overline{JM}, \tag{11.39}$$

şi din care rezultă :

$$|\bar{a}| = |\overline{JM}|\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}, \tag{11.40}$$

adică : acceleraţia în momentul t a unui punct oarecare M se compune dintr-o acceleraţie perpendiculară pe $\overline{JM}$ şi una îndreptată spre punctul J, ca şi cum punctul M ar descrie un cerc cu centrul în punctul J. Din această cauză, punctul J se numeşte *centrul acceleraţiilor*. Acest punct joacă, în mişcarea plană, un rol asemănător cu centrul instantaneu de rotaţie, adică distribuţia *instantanee* de acceleraţii în mişcarea plană este corespunzătoare unei rotaţii în jurul punctului J. Centrul acceleraţiilor nu coincide cu centrul instantaneu de rotaţie. Este evident că numai în cazul mişcării de rotaţie propriu-zise cele două centre coincid cu punctul fix în care axa de rotaţie înţeapă cele două plane (P) şi (P').

f. Calculînd $\sphericalangle\varphi$ pe care $\bar{\eta}$ îl face cu $\bar{a}_o$ şi cunoscînd $|\bar{\eta}|$ din (11.38), se determină poziţia centrului acceleraţiilor (fig. 298). Se foloseşte formula (2.29) (v. § 26) :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|\bar{a}_o \times \bar{\eta}|}{\bar{a}_o\bar{\eta}} = \frac{\left|\bar{a}_o \times \dfrac{\dot{\bar{\omega}} \times \bar{a}_o + \omega^2\bar{a}_o}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}\right|}{\bar{a}_o \dfrac{\dot{\bar{\omega}} \times \bar{a}_o + \omega^2\bar{a}_o}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}} = \frac{|\dot{\bar{\omega}}|}{\omega^2}, \tag{11.41}$$

deoarece : $\bar{a}_o \times (\dot{\bar{\omega}} \times \bar{a}_o) = a_o^2\dot{\bar{\omega}}$, iar $\bar{a}_o \cdot (\dot{\bar{\omega}} \times \bar{a}_o) = 0$.

Unghiul φ, calculat cu formula (11.41), se consideră cuprins între 0 şi $\frac{\pi}{2}$, avînd aceeaşi orientare cu $\bar{\dot{\omega}}$. De pildă, în figura 298, $\bar{\dot{\omega}}$ fiind orientat spre, observator, sensul unghiului φ este de la $\bar{a}_o$ în sens trigonometric.

g. Perpendiculara dusă din J pe OJ întîlneşte pe $\bar{a}_o$ în A şi, calculînd segmentul OA :

$$OA = |\bar{\eta}|\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{|\bar{a}_o|}{\sqrt{\dot{\omega}^2+\omega^4}}\sqrt{1+\frac{\dot{\omega}^2}{\omega^4}} = \frac{|\bar{a}_o|}{\omega^2},$$

se ajunge la concluzia că centrul acceleraţiilor se găseşte pe cercul construit cu segmentul OA ca diametru.

h. *Metoda analitică* are o largă utilizare în aplicaţiile mişcării plane. Formulele se pot stabili uşor pe baza relaţiilor vectoriale.

În fig. 299 planul fix (P') coincide cu planul $O'x'y'$ al reperului $O'x'y'z'$, axa $O'z'$ şi $\bar{\omega}$ avînd direcţia perpendiculară pe plan şi sensul spre observator.

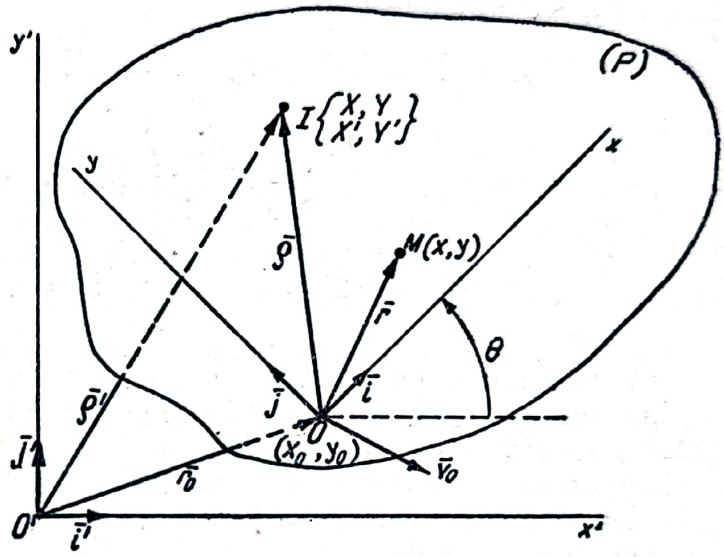


Fig. 299

Datele problemei sînt : $\bar{r}_o = \bar{r}_o(t)$ şi $\theta = \varphi(t)$ sau analitic : $x_o = f(t)$, $y_o = g(t)$ şi $\theta = \varphi(t)$, relaţii care determină în fiecare moment poziţia originii O, direcţia axelor mobile, viteza originii O, $\bar{v}_o = \dot{\bar{r}}_o$ şi valoarea $\omega = \dot{\theta}$ a vectorului $\bar{\omega}$. În acest fel, expresiile complexe ale vectorilor v_0 şi $\bar{\omega}$ sînt :

$$\bar{v}_o = \dot{x}_o\bar{i}' + \dot{y}_o\bar{j}', \qquad \bar{\omega} = \dot{\theta}\bar{k}' = \dot{\theta}\bar{k},$$

iar expresia vitezei punctului $M(x,y)$ solidar cu planul mobil este :

$$\bar{v} = \bar{v}_o + \bar{\omega}\times\bar{r} = \dot{x}_o\bar{i}' + \dot{y}_o\bar{j}' + \omega\bar{k}\times(x\bar{i}+y\bar{j}). \tag{11.42}$$

Ţinînd seamă de relaţiile evidente :

$$\bar{i}\bar{i}' = \cos\theta, \quad \bar{j}\bar{i}' = -\sin\theta, \quad \bar{i}\bar{j}' = \sin\theta, \quad \bar{j}\bar{j}' = \cos\theta,$$

din (11.42) se deduc valorile proiecţiilor vitezei punctului M atît pe axele mobile :

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \bar{v}\bar{i} = \dot{x}_o\cos\theta + \dot{y}_o\sin\theta - \omega y,\\ v_y &= \bar{v}\bar{j} = -\dot{x}_o\sin\theta + \dot{y}_o\cos\theta + \omega x \end{aligned}\right\} \tag{11.43}$$

cît şi pe cele fixe :

$$\left.\begin{aligned} v'_x &= \bar{v}\bar{i}' = \dot{x}_o - \omega x\sin\theta - \omega y\cos\theta,\\ v'_y &= \bar{v}\bar{j}' = \dot{y}_o + \omega x\cos\theta - \omega y\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{11.44}$$

Pentru calculul coordonatelor centrului instantaneu de rotaţie se foloseşte relaţia vectorială din (11.34) :

$$\bar{\rho} = X\bar{i} + Y\bar{j} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_o}{\omega^2} = \frac{\omega\bar{k}' \times (\dot{x}_o\bar{i}' + \dot{y}_o\bar{j}')}{\omega^2} = \frac{\dot{x}_o\bar{j}' - \dot{y}_o\bar{i}'}{\omega},$$

de unde se deduc coordonatele în raport cu axele mobile :

$$X = \bar{\rho}\bar{i} = \frac{\dot{x}_o \sin\theta - \dot{y}_o\cos\theta}{\omega}, \quad Y = \bar{\rho}\bar{j} = \frac{\dot{x}_o\cos\theta + \dot{y}_o\sin\theta}{\omega}, \qquad (11.45)$$

iar în raport cu axele fixe :

$$\bar{\rho}' = X'\bar{i}' + Y'\bar{j}' = \bar{r}_o + \bar{\rho} = x_o\bar{i}' + y_o\bar{j}' + \frac{\dot{x}_o\bar{j}' - \dot{y}_o\bar{i}'}{\omega} =$$

$$= \left(x_o - \frac{\dot{y}_o}{\omega}\right)\bar{i}' + \left(y_o + \frac{\dot{x}_o}{\omega}\right)\bar{j}',$$

de unde :

$$X' = x_o - \frac{\dot{y}_o}{\omega}; \quad Y' = y_o + \frac{\dot{x}_o}{\omega}. \qquad (11.46)$$

Prin eliminarea parametrului variabil θ (sau t) între ecuaţiile (11.45) se obţine ecuaţia centroidei mobile, iar eliminînd parametrul între ecuaţiile (11.46) se stabileşte ecuaţia centroidei fixe.

Componentele acceleraţiei în raport cu axele mobile se deduc din (11.43) prin derivare, iar cele în raport cu axele fixe se obţin derivînd ecuaţiile (11.44) în raport cu timpul.

§ 118. Aplicaţii

1° Un solid este în mişcare elicoidală determinată de vectorii $\bar{v}_o$ şi $\bar{\omega}$, avînd acelaşi suport fix.

Să se calculeze relaţia dintre distanţele pînă la axă R_1 şi R_2, a două puncte M_1 şi M_2 ale solidului, situate pe acelaşi diametru, astfel încît vitezele punctelor să fie mereu perpendiculare.

Rezolvare. Notînd cu $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}_2$ vectorii de poziţie şi cu $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ vitezele punctelor M_1 şi M_2 (fig. 300), condiţia este :

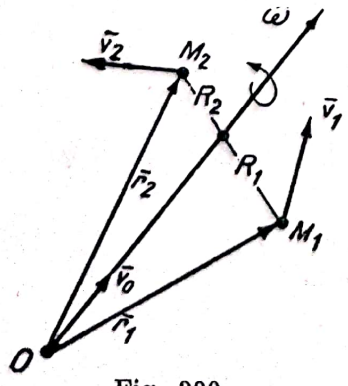


Fig. 300

$$\bar{v}_1\bar{v}_2 = (\bar{v}_o + \bar{\omega} \times \bar{r}_1)\ (\bar{v}_o + \bar{\omega} \times \bar{r}_2) = 0,$$

adică :

$$v_o^2 + \bar{v}_o\,(\bar{\omega} \times \bar{r}_1) + \bar{v}_o(\bar{\omega} \times \bar{r}_2) + (\bar{\omega} \times \bar{r}_1)\ (\bar{\omega} \times \bar{r}_2) = 0.$$

Deoarece :

$$\bar{v}_o(\bar{\omega} \times \bar{r}_1) = 0, \quad \bar{v}_o(\bar{\omega} \times \bar{r}_2) = 0,$$

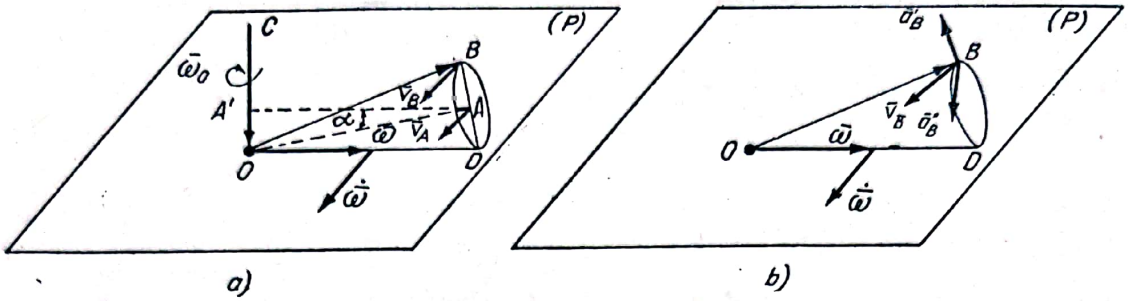
$$(\bar{\omega} \times \bar{r}_1)\ (\bar{\omega} \times \bar{r}_2) = -\ R_1R_2\omega^2,$$

relaţia căutată este :

$$R_1R_2 = \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2.$$

2° Un con circular drept, cu înălțimea $OA = h$ și unghiul la vîrf 2α, se rostogolește fără alunecare pe planul (P).

Se cere să se calculeze viteza și accelerația punctului B, cel mai depărtat de plan, cunoscînd că dreapta OA se rotește în jurul axei OC cu viteza unghiulară constantă ω_0 (fig. 301).



a) b)

Fig. 301

Rezolvare. În această mișcare, O, vîrful conului, este fix. Generatoarea în contact cu planul, OD, este axa instantanee de rotație. Din sensul lui $\bar{\omega}_0$ rezultă sensul lui $\bar{v}_A$, și de aici sensul vitezei instantanee de rotație $\bar{\omega}$. Pentru a calcula $|\bar{\omega}|$ se scrie în două moduri viteza punctului A:

$$|\bar{v}_A| = |\bar{\omega}|\, d = \omega_0 A'A; \quad \text{deci:} \quad |\bar{\omega}| = \omega_0 \frac{A'A}{d} = \omega_0 \operatorname{ctg} \alpha,$$

unde d este distanța punctului A la axa OD, iar AA', distanța lui la axa OC.

Calculul vitezei punctului B, $\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \overline{OB}$:

$$|\bar{v}_B| = |\bar{\omega}|\,|\overline{OB}| \sin 2\alpha = \omega_0 \operatorname{ctg} \alpha \frac{h}{\cos \alpha} \sin 2\alpha = 2\omega_0 h \cos \alpha,$$

iar suportul este perpendicular pe planul BOC în sensul arătat pe figura 301, *a*. Pentru calculul accelerației este nevoie de $\dot{\bar{\omega}}$. Aceasta este viteza vîrfului vectorului $\bar{\omega}$ în mișcarea sa de rotație în jurul lui OC (fig. 301, *b*). Deci:

$$\dot{\bar{\omega}} = \bar{\omega}_0 \times \bar{\omega} \quad \text{de unde} \quad |\dot{\bar{\omega}}| = \omega_0 |\bar{\omega}| = \omega_0^2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Calculul accelerației punctului B:

$$\bar{a}_B = \bar{\omega} \times \overline{OB} + \bar{\omega} \times \bar{v}_B = \bar{a}'_B + \bar{a}''_B,$$

unde:

$$|\bar{a}'_B| = |\dot{\bar{\omega}}|\,|\overline{OB}| = \omega_0^2 \operatorname{ctg} \alpha \frac{h}{\cos \alpha} = \omega_0^2 \frac{h}{\sin \alpha},$$

$$|\bar{a}''_B| = |\bar{\omega}|\,|\bar{v}_B| = (\omega_0 \operatorname{ctg} \alpha)\, 2\omega_0 h \cos \alpha = \omega_0^2 \frac{2h \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \text{ etc.}$$

3° Să se demonstreze că proiecţiile vitezelor punctelor unei bare, în mişcare plană, pe direcţia barei sînt egale, iar vîrfurile vitezelor punctelor barei sînt coliniare (fig. 302).

Rezolvare: Se consideră bara OA şi M un punct arbitrar pe bară, $\bar{v}_o$ viteza punctului O în raport cu reperul cu originea în O'. Se ştie că viteza punctului M este:

$$\bar{v} = \bar{v}_o + \bar{\omega} \times \bar{r},$$

iar proiecţia sa pe direcţia barei:

$$\bar{v}\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} = \bar{v}_o\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} + (\bar{\omega} \times \bar{r})\frac{\bar{r}}{|\bar{v}|} = \bar{v}_o\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$$

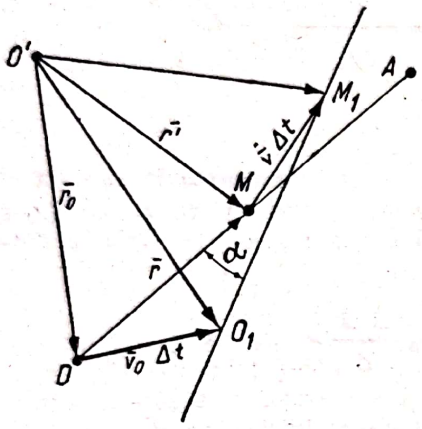


Fig. 302

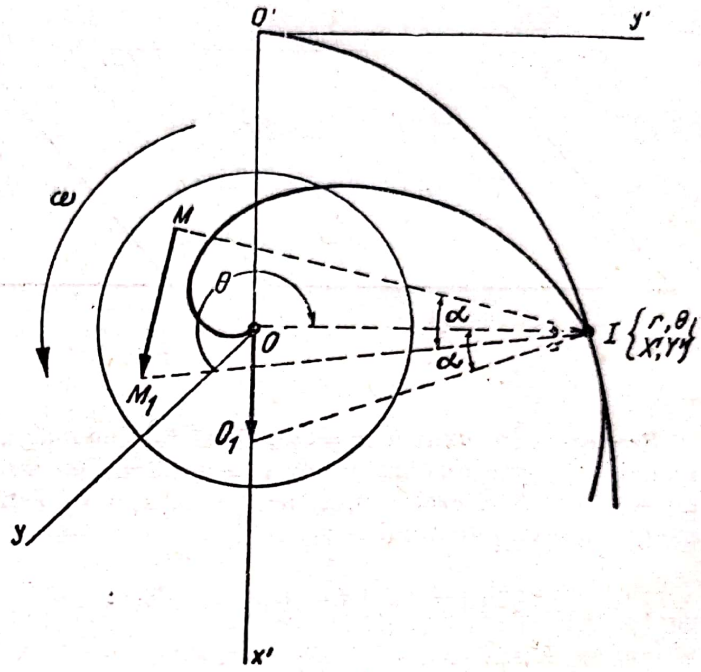


Fig. 303

are aceeaşi valoare cu proiecţia vitezei punctului O. Proprietatea este demonstrată şi este adevărată oricare ar fi mişcarea barei, deoarece nu s-a ţinut seama în demonstraţie că mişcarea este plană.

Vîrfurile vectorilor $\bar{v}_o\,\Delta t$ şi $\bar{v}\,\Delta t$, punctele O_1 şi M_1 determină o dreaptă care formează cu OA unghiul α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|\bar{r} \times \overline{O_1M_1}|}{\bar{r}\overline{O_1M_1}} = \frac{|\bar{r} \times [\bar{r} + (\bar{\omega} \times \bar{r})\Delta t]|}{\bar{r}[\bar{r} + (\bar{\omega} \times \bar{r})\Delta t]},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})\Delta t|}{r^2} = \frac{|r^2\bar{\omega} - (\bar{r}\bar{\omega})\bar{r}|\Delta t}{r^2} = |\bar{\omega}|\Delta t,$$

deoarece în mişcarea plană $\bar{r}\bar{\omega} = 0$.

Cum $\measuredangle\,\alpha$ este independent de $\bar{r}$, este evident că vîrfurile vitezelor se găsesc pe o dreaptă paralelă cu O_1M_1. [1].

4° În mişcarea unei plăci plane în propriul ei plan sînt date:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}(t), \quad \bar{v}_o = \bar{v}_o(t),$$

unde direcţia vectorului $\bar{\omega}$ este constantă, iar $\bar{v}_o$, viteza unui punct O solidar cu placa mobilă, este perpendiculară pe $\bar{\omega}$.

[1] Se poate demonstra că proprietatea este adevărată, oricare ar fi mişcarea barei rigide.

Necunoscutele sînt: traiectoria punctului O, viteza, traiectoria unui punct oarecare M solidar cu placa mobilă, precum și centroidele mișcării.

Exemplu. Un disc circular se rotește cu viteză unghiulară constantă ω în jurul axei orizontale, perpendiculară în centrul O pe planul discului. În același timp, discul cade în planul său vertical astfel încît centrul O descrie o dreaptă verticală, după legea căderii libere în vid. Să se studieze mișcarea discului. (fig. 303).

Rezolvare: Datele problemei, deduse din enunț, sînt:

$$v_o = gt \text{ și } \omega = \text{const.}$$

Se aleg în planul discului ca axe fixe $O'x'$ și $O'y'$ verticala și orizontala poziției inițiale O' a centrului discului. Centrul instantaneu pentru momentul t se află pe perpendiculara în O pe Ox la distanța:

$$OI = \frac{|\bar{v}_o|}{|\bar{\omega}|} = \frac{gt}{\omega}.$$

Pentru determinarea grafică a vitezei unui punct arbitrar M se unește I cu M, perpendiculara în M pe IM este suportul vitezei, iar modulul ei se determină construind triunghiul IMM_1 asemenea cu triunghiul IOO_1, deoarece tg α este proporțional cu ω.

Ecuația centroidei fixe se găsește eliminînd pe t între:

$$X' = \frac{gt^2}{2} \text{ și } Y' = OI = \frac{gt}{\omega},$$

adică:

$$Y'^2 = 2\frac{g}{\omega^2} X',$$

care este o parabolă cu axa Ox', tangentă în O' la $O'y'$ și cu parametrul $\frac{g}{\omega^2}$.

Ecuația centroidei mobile se stabilește mai ușor în coordonate polare. Se alege ca axă polară mobilă axa Oy, care în momentul inițial coincide cu $O'y'$, deci:

$$r = OI = \frac{gt}{\omega}, \text{ iar } \theta = -\int_0^t \omega\, dt = -\omega t.$$

Rezultatul este: $r = -\frac{g}{\omega^2}\theta$ și reprezintă o spirală a lui Arhimede.

5° În mișcarea plană a unei plăci sînt date: $\bar{v}_o = \bar{v}_o(t)$, traiectoria punctului O, precum și traiectoria unui al doilea punct A solidar cu placa. Necunoscute sînt viteza unghiulară $\bar{\omega}$, viteza punctului A, viteza și traiectoria unui punct arbitrar M al plăcii și centroidele mișcării.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. O bară rigidă OA culisează cu capetele pe două bare fixe perpendiculare $O'x'$, $O'y'$ (fig. 304). Cunoscînd în orice moment viteza capătului O, să se calculeze ω, viteza punctului A, viteza şi traiectoria unui punct oarecare M invariabil legat de bară, precum şi centroidele mişcării (Problema lui Cardan).

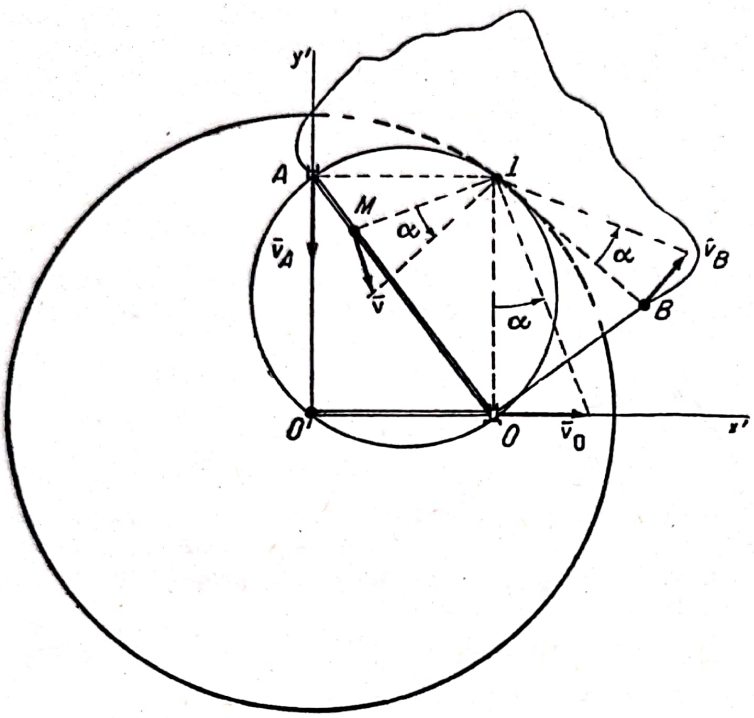


Fig. 304

Soluţie geometrică: Traiectoriile punctelor O şi A ale barei mobile fiind axele $O'x'$ şi $O'y'$, normalele în O şi A la ele determină, prin intersecţia lor, centrul instantaneu de rotaţie I din momentul considerat.

Deoarece $\bar{v}_o$ este dat, din $|\bar{v}_o| = |\bar{\omega}|\, IO$ rezultă: $|\bar{\omega}| = \frac{|\bar{v}_o|}{IO}$, după care se deduce:

$$|\bar{v}_A| = |\bar{\omega}|\, IA = \frac{IA}{IO}\,|\bar{v}_o|$$

şi

$$|\bar{v}_M| = |\bar{\omega}|\, IM = \frac{IM}{IO}\,|\bar{v}_o|.$$

Se ştie că traiectoria punctului M este o elipsă avînd axele $O'x'$ şi $O'y'$.

În timpul mişcării barei OA, toate centrele instantanee de rotaţie satisfac condiţia $O'I = OA = \text{const.}$, şi astfel se găsesc pe cercul cu centrul în O' şi raza $O'A$. Acest cerc este centroida fixă. În raport cu planul mobil, determinat de OA şi OB, perpendiculara în O pe OA, centrul I se află la intersecţia a două drepte mobile OI şi AI, perpendiculare între ele, astfel încît centroida mobilă este cercul cu OA ca diametru.

Soluţie analitică: Poziţia axelor mobile Oxy (fig. 305) depinde de parametrii x_o, $y_o = 0$ şi $\sphericalangle\, \theta$.

Fiind date traiectoriile punctelor O şi A şi $\bar{v}_o = v_o\bar{i}'$, se pot calcula componentele vitezei unui punct $M\,(x, y)$ solidar cu planul mobil:

$$v_x = v_o \cos\theta - \omega y,$$
$$v_y = -v_o \sin\theta + \omega x,$$

în raport cu axele mobile, şi:

$$v'_x = v_o - \omega x \sin\theta - \omega y \cos\theta;$$
$$v'_y = \omega x \cos\theta - \omega y \sin\theta,$$

în raport cu axele fixe cu ajutorul relaţiilor (11.43) şi (11.44).

Dacă l este lungimea barei OA:

$$x_o = l \sin\theta$$

şi

$$\dot{x}_o = v_o = l\,\dot{\theta} \cos\theta = l\,\omega \cos\theta,$$

de unde:

$$\omega = \frac{v_o}{l \cos\theta}.$$

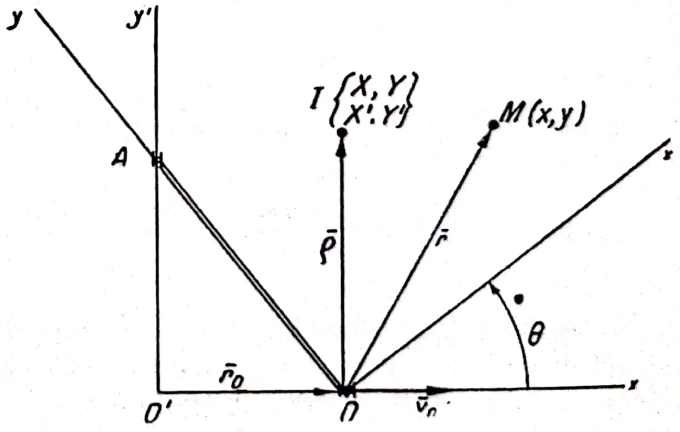


Fig. 305

Coordonatele centrului instantaneu de rotație I în raport cu axele mobile se deduc din relațiile (11.45):

$$X = l\cos\theta\sin\theta, \quad Y = l\cos^2\theta,$$

iar ecuația centroidei mobile este: $X^2 + Y^2 - lY = 0$.

În raport cu axele fixe, coordonatele centrului instantaneu de rotație I se deduc din (11.46):

$$X' = l\sin\theta, \quad Y' = l\cos\theta,$$

iar ecuația centroidei fixe este: $X'^2 + Y'^2 - l^2 = 0$.

6° În mișcarea plană a unei plăci sînt date: viteza $\bar{v}_o = \bar{v}_o(t)$ a unui punct O solidar cu placa, precum și cele două centroide ale mișcării. Necunoscutele sînt viteza unghiulară $\bar{\omega}$, viteza și traiectoria unui punct oarecare M al plăcii mobile.

Exemplu. O roată de rază R se rostogolește fără să alunece pe o șină dreaptă, astfel încît centrul O al roții are, în momentul t, viteza $\bar{v}_o$.

Să se determine viteza unui punct oarecare M al roții și traiectoria ei (fig. 306).

Rezolvare. Aici placa mobilă este roata, iar planul fix conține șina. Deoarece roata se rostogolește fără să alunece peste șină, este evident că cercul roții este centroida mobilă (rostogolitoarea), iar șina este centroida fixă (baza) a mișcării.

Punctul de tangență I este, în momentul considerat, centrul instantaneu de rotație. Deoarece este dată viteza $\bar{v}_o$ a centrului O al roții, se verifică, în primul rînd, că OI este perpendicular pe $\bar{v}_o$, altfel datele problemei nu corespund. Viteza punctului M se poate determina grafic cu ajutorul $\sphericalangle\alpha$ (fig. 306) sau prin calcul:

$$|\bar{\omega}| = \frac{|\bar{v}_o|}{IO} = \frac{|\bar{v}_o|}{R}, \quad |\bar{v}| = |\bar{\omega}|\,IM = \frac{IM}{R}\,|\bar{v}_o|.$$

Se știe că, în condițiile mișcării roții, orice punct al roții, exceptînd punctul O, descrie o traiectorie cicloidală.

7° În mișcarea plană a unei plăci sînt date grafic traiectoriile a două puncte solidare cu placa. Să se construiască prin puncte baza și rostogolitoarea mișcării.

În figura 307, (P) este placa mobilă, O și A sînt două puncte solidare cu placa, iar C_o și C_A, traiectoriile acestor puncte. Se

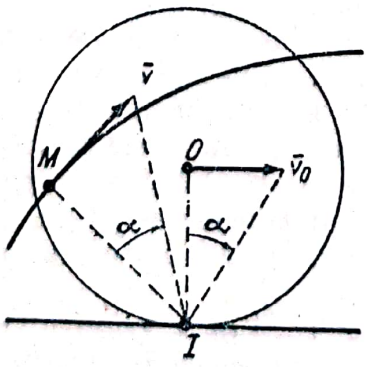


Fig. 306

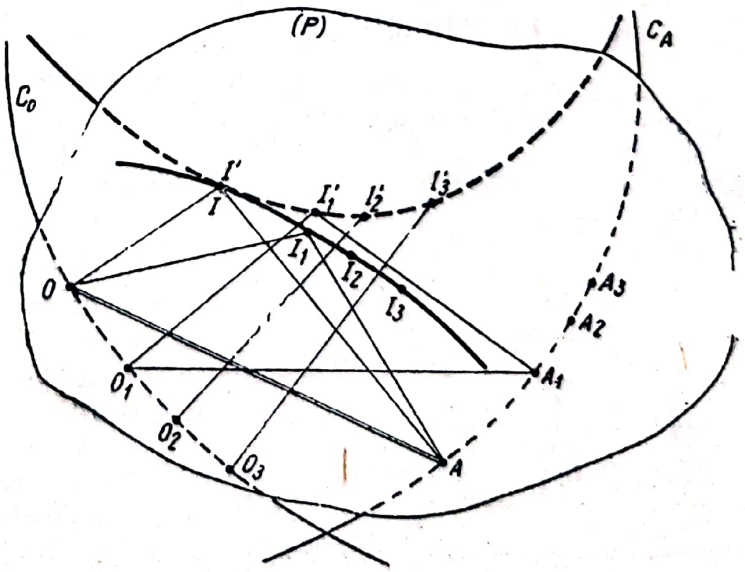


Fig. 307

pot alege un număr oarecare de poziţii O_1, O_2, O_3, ale punctului O pe traiectoria C_o, cărora le corespund punctele A_1, A_2, A_3, de pe traiectoria C_A, astfel încît:

$$O_1A_1 = O_2A_2 = O_3A_3 = \ldots = OA.$$

Normalele în O la C_o şi în A la C_A se întîlnesc în punctul (I', I), centrul instantaneu de rotaţie pentru poziţia iniţială. Normalele în O_1 şi A_1 se întîlnesc în I'_1 etc. Mulţimea punctelor I', I'_1, I'_2, I'_3 ... formează baza mişcării, care este trasată punctat.

Pentru determinarea poziţiilor centrului instantaneu de rotaţie în raport cu placa mobilă se presupune că placa este fixă, iar planul fix şi — împreună cu el — şi traiectoriile C_o şi C_A se mişcă în sensul contrar al mişcării reale.

În această presupunere, poziţiile O_1 şi A_1, apoi O_2 şi A_2 etc. trec prin punctele presupuse fixe O şi A. Observatorul aşezat în lungul barei OA vede cum normalele OI_1 şi AI_1 se rotesc în jurul punctelor O şi A şi determină poziţia I_1. Construcţia grafică se reduce la aducerea triunghiului $O_1I'_1A_1$ cu baza în OA. La fel se procedează şi pentru determinarea poziţiilor I_2, I_3, ... ale centrului instantaneu de rotaţie în raport cu placa mobilă şi pînă la sfîrşit se determină, prin puncte, rostogolitoarea mişcării.

CAPITOLUL XII

MIŞCAREA RELATIVĂ

A. CINEMATICA MIŞCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI

§ 119. Generalităţi. Compunerea vitezelor şi acceleraţiilor

a. La § 3 s-a precizat că mişcarea mecanică are un caracter *relativ*, fiind considerată în raport cu un reper. Cu toate că în natură nu există nici un reper imobil, totuşi este util să se studieze mişcarea mecanică în raport cu un reper presupus imobil. În aceste condiţii, mişcarea mecanică poate fi denumită *absolută*. Astfel, în problemele tehnice curente, un asemenea reper este suprafaţa Pămîntului.

Exemplu. Presupunînd că Pămîntul este imobil, mişcarea unui vapor în raport cu malurile este o mişcare *absolută*.

Mişcarea unui călător pe punte, faţă de vapor, este o mişcare *relativă*. Se poate presupune că un călător M se mişcă pe vapor călcînd, la fiecare pas, pe cîte o plăcuţă metalică dintre cele ce sînt uneori fixate pe puntea vaporului (fig. 308).

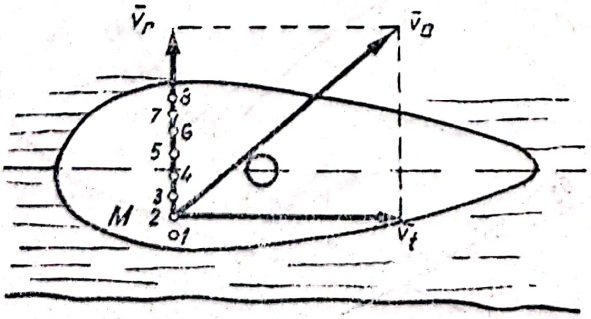


Fig. 308

În aceste condiţii sînt de considerat următoarele viteze: *viteza relativă* $\bar{v}_r$ a călătorului faţă de vapor şi *viteza de transport* $\bar{v}_t$, viteza plăcuţei pe care călătorul o calcă în momentul considerat şi în fine *viteza absolută* $\bar{v}_a$ a călătorului faţă de maluri.

Definiţii. 1° *Viteza relativă este viteza punctului mobil în raport cu solidul în mişcare.*

2° *Viteza de transport în momentul t este viteza, în raport cu reperul fix, a punctului solidar cu solidul în mişcare, cu care punctul mobil coincide în momentul considerat.*

3° *Viteza absolută* $\bar{v}_a$ *este viteza punctului mobil de pe solidul în mişcare, în raport cu reperul fix.*

În mod asemănător se definesc şi *acceleraţia relativă* $\bar{a}_r$, *acceleraţia de transport* $\bar{a}_t$ şi *acceleraţia absolută* $\bar{a}_a$, înlocuind în textele celor trei definiţii precedente, peste tot, cuvîntul *viteză* prin *acceleraţie.*

b. Problema cinematicii mişcării relative a punctului se enunţă astfel:

Se cunoaşte, în orice moment, mişcarea relativă a unui punct în raport cu un solid în mişcare; de asemenea, se cunoaşte în orice moment mişcarea solidului în raport cu un reper fix; se cere mişcarea absolută a punctului.

Pentru studiul problemei se consideră, în primul rînd, sistemele de referinţă, triedrul fix $O'x'y'z'$ şi triedrul mobil $Oxyz$ invariabil legat de solidul rigid în mişcare.

Apoi, se folosesc cele prezentate la § 110, privind rezultatele studiului cinematic al mişcării solidului rigid (§§ 113, 114), formulele lui Poisson (11.21) şi figura 284, precizîndu-se încă o dată următoarele:

Vectorii $\bar{r}_o(t)$, $\bar{i}(t)$, $\bar{j}(t)$, $\bar{k}(t)$, precum şi vectorii daţi prin derivarea lor în raport cu timpul: $\bar{\omega}(t)$, $\bar{\dot{\omega}}(t)$, $\bar{v}_o(t)$ şi $\bar{a}_o(t)$ caracterizează mişcarea triedrului mobil $Oxyz$ şi fac parte din datele problemei.

De asemenea sînt date coordonatele unui punct oarecare $M(x,y,z)$ al solidului rigid. Dacă punctul este fix în raport cu triedrul mobil, coordonatele lui nu variază cu timpul. Însă dacă punctul M se mişcă şi în raport cu triedrul mobil (mişcare relativă), coordonatele lui variază cu timpul. Reciproc, dacă într-o formulă coordonatele punctului M sînt considerate constante, înseamnă că ele reprezintă acolo, punctul solidar cu solidul în mişcare, cu care, în momentul considerat, punctul mobil M coincide.

Scriind expresia complexă a vectorului de poziţie al punctului M în raport cu triedrul mobil, şi anume:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

se observă că acest vector variază cu timpul, chiar dacă M este fix faţă de $Oxyz$, deoarece conţine pe $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi $\bar{k}$, vectori variabili.

În aceste condiţii, pentru rezolvarea problemei este suficient să se exprime vectorul de poziţie al punctului M în raport cu triedrul fix $O'x'y'z'$:

$$\bar{r}' = \bar{r}_o + \bar{r} = \bar{r}_o + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

şi să se deriveze succesiv de două ori în raport cu t.

Prima derivată dă expresia vitezei absolute:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_o + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}} + \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}. \tag{12.1}$$

În această expresie:

$$\bar{v}_o + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}} = \bar{v}_t \tag{12.2}$$

este *viteza de transport* $\bar{v}_t$, adică viteza punctului solidar cu rigidul cu care punctul mobil coincide, în momentul considerat, deoarece, în expresia (12.2), x, y, z se presupun constante.

Partea rămasă :

$$\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} = \bar{v}_r \tag{12.3}$$

este *viteza relativă* $\bar{v}_r$ a punctului mobil, deoarece, în (12.3), x, y, z sînt consideraţi variabili, iar versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ independenţi de timp, ca şi cum triedrul $Oxyz$ ar fi fix şi M se mişcă în raport cu el.

În consecinţă, expresia (12.1), scrisă sub forma :

$$\bar{v}_a = \bar{v}_t + \bar{v}_r, \tag{12.4}$$

exprimă compunerea vitezelor în mişcarea relativă, şi anume :

Viteza absolută a punctului în mişcare relativă se obţine, în orice moment, însumînd vectorial viteza de transport cu viteza relativă a punctului.

Derivata relaţiei (12.1), în raport cu timpul, dă expresia *acceleraţiei absolute* :

$$\bar{a}_a = \bar{a}_o + x\ddot{\bar{i}} + y\ddot{\bar{j}} + z\ddot{\bar{k}} + \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} + 2(\dot{x}\dot{\bar{i}} + \dot{y}\dot{\bar{j}} + \dot{z}\dot{\bar{k}}). \tag{12.5}$$

Repetînd raţionamentul se constată că :

$$\bar{a}_o + x\ddot{\bar{i}} + y\ddot{\bar{j}} + z\ddot{\bar{k}} = \bar{a}_t$$

este *acceleraţia de transport* a punctului ;

$$\ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} = \bar{a}_r$$

este *acceleraţia relativă* $\bar{a}_r$ a punctului M.

Ultima expresie din (12.3) :

$$2(\dot{x}\dot{\bar{i}} + \dot{y}\dot{\bar{j}} + \dot{z}\dot{\bar{k}}) = \bar{a}_c,$$

stabilită pentru prima dată de *Coriolis* [1], poartă denumirea de *acceleraţia Coriolis* sau de *acceleraţie complementară* $\bar{a}_c$ şi este o consecinţă a mişcării relative, asociată cu mişcarea solidului rigid.

În concluzie, expresia (12.5), scrisă sub forma :

$$\bar{a}_a = \bar{a}_t + \bar{a}_r + \bar{a}_c, \tag{12.6}$$

arată cum se compun acceleraţiile în mişcarea relativă :

Acceleraţia absolută a punctului în mişcare relativă se obţine, în orice moment, prin însumarea vectorială a acceleraţiei de transport, a acceleraţiei relative şi a acceleraţiei complementare.

c. *Observaţii* : 1° Folosind formulele lui Poisson (11.21), expresiile complexe ale $\bar{v}_t$, $\bar{a}_t$ şi $\bar{a}_c$ primesc forme vectoriale, mai intuitive. Astfel :

$$\bar{v}_t = \bar{v}_o + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}} = \bar{v}_o + x\bar{\omega} \times \bar{i} + y\bar{\omega} \times \bar{j} + z\bar{\omega} \times \bar{k}$$

[1] Gustave Coriolis (1792—1843), inginer francez, director al Şcolii Politehnice din Paris.

sau :

$$\bar{v}_t = \bar{v}_o + \bar{\omega} \times \bar{r}, \tag{12.7}$$

apoi :

$$\bar{a}_t = \bar{a}_o + x\ddot{\bar{i}} + y\ddot{\bar{j}} + z\ddot{\bar{k}} = \bar{a}_o + x[\dot{\bar{\omega}} \times \bar{i} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{i})] + y[\dot{\bar{\omega}} \times \bar{j} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{j})] + z[\dot{\bar{\omega}} \times \bar{k} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{k})]$$

sau :

$$\bar{a}_t = \bar{a}_o + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}); \tag{12.8}$$

în fine :

$$\bar{a}_c = 2(\dot{x}\dot{\bar{i}} + \dot{y}\dot{\bar{j}} + \dot{z}\dot{\bar{k}}) = 2(\dot{x}\bar{\omega} \times \bar{i} + \dot{y}\bar{\omega} \times \bar{j} + \dot{z}\bar{\omega} \times \bar{k}) = 2\bar{\omega} \times (\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k})$$

sau :

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r. \tag{12.9}$$

2° Expresia (12.9) permite următoarea interpretare : accelerația complementară este dublul vitezei vîrfului vectorului $\bar{v}_r$ (viteza relativă a punctului M), în mișcarea solidului în jurul axei instantanee de rotație ($\bar{\omega}$), în momentul în care M ar concide cu O, originea reperului mobil (fig. 309).

3° Accelerația complementară se anulează dacă : $\bar{\omega} = 0$, adică dacă mișcarea solidului este o translație, sau dacă $\bar{v}_r = 0$, ceea ce este evident, deoarece această accelerație nu apare la mișcarea solidului rigid, în fine, dacă $\bar{\omega}$ și $\bar{v}_r$ sînt coliniari, adică dacă mișcarea relativă a punctului se face, în momentul considerat, paralel cu axa instantanee de rotație. Astfel, în mișcarea unui punct pe o generatoare a unui cilindru circular drept care se rotește în jurul axei sale, accelerația complementară este nulă.

4° Înlocuind în (12.6) expresiile accelerației de transport (12.8) și ale accelerației complementare (12.9), accelerația absolută a punctului se scrie sub forma :

$$\bar{a}_a = \bar{a}_o + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \bar{a}_r + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r. \tag{12.10}$$

5° Vectorul de poziție al unui punct M în raport cu triedrul $Oxyz$: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ este un vector care poate varia cu timpul, atît din cauza mișcării relative a punctului cît și din cauza mișcării triedrului.

Derivata absolută a lui $\bar{r}(t)$, și anume :

$$\dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}},$$

se compune din două grupe de cîte trei termeni. Primul grup reprezintă *derivata relativă* sau *derivata locală* a vectorului $\bar{r}$, se scrie sub forma $\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$ și, evident, este chiar $\bar{v}_r$. Cel de-al doilea grup se poate scrie sub forma $\bar{\omega} \times \bar{r}$. În consecință, derivata absolută are următoarea expresie vectorială :

$$\dot{\bar{r}} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

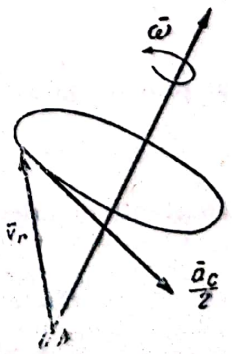


Fig. 309

§ 120. Aplicaţii.

1° Demonstraţia proprietăţii centroidei mobile de a se rostogoli fără să alunece peste centroida fixă poate fi privită ca o aplicaţie a mişcării relative a punctului.

În figura 310, (B) este centroida fixă, (R) centroida mobilă, iar I centrul instantaneu de rotaţie din momentul considerat. Se ştie că cele două centroide sînt formate din două mulţimi de puncte: prima mulţime în planul fix $O'x'y'$, iar cealaltă în planul mobil Oxy. Se poate presupune existenţa unui punct mobil M pe planul mobil, care în orice moment coincide cu centrul instantaneu de rotaţie I. În acest caz, M va descrie în raport cu planul fix traiectoria absolută (B), iar în raport cu planul mobil, traiectoria relativă (R). Se calculează viteza punctului M pe cele două traiectorii:

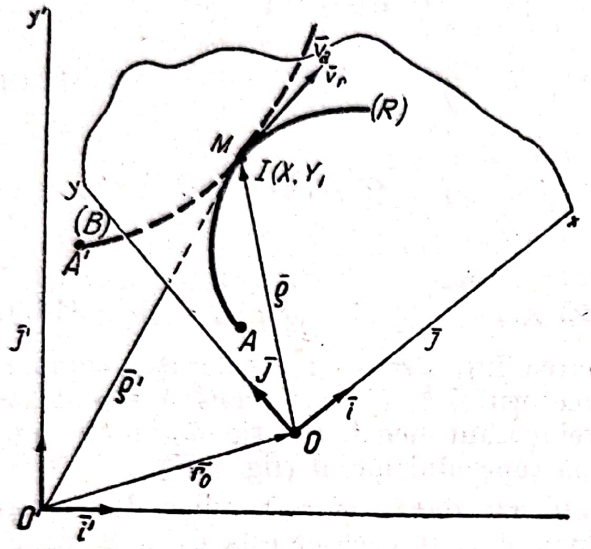


Fig. 310

$$\bar{\rho}' = \bar{r}_o + \bar{\rho}$$

$$\bar{v}_a = \dot{\bar{\rho}}' = \dot{\bar{r}}_o + \dot{\bar{\rho}} = \bar{v}_o + \\ + \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \bar{v}_r,$$

dar:

$$\bar{v}_o + \bar{\omega} \times \bar{\rho} = \bar{v}_t = 0,$$

deoarece în momentul considerat I este centrul instantaneu de rotaţie. În consecinţă:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r,$$

adică punctul M are, pe ambele traiectorii, aceeaşi viteză în direcţie, sens şi modul, ceea ce dovedeşte că *cele două traiectorii sînt tangente între ele în punctul I cu care M coincide în momentul considerat.*

Pe de altă parte, dacă A' şi A sînt originile arcelor pe cele două traiectorii şi dacă se notează:

$A'I = s'$ = arcul descris de punctul M pe (B),

$AI = s$ = arcul descris de punctul M pe (R),

deoarece:

$$|\bar{v}_a| = \frac{ds'}{dt} \qquad |\bar{v}_r| = \frac{ds}{dt},$$

rezultă:

$$ds' = ds,$$

şi prin integrare:

$$s' = s,$$

constanta de integrare fiind nulă, deoarece, în momentul iniţial, originile A' şi A coincid.

În concluzie, *rostogolirea se face fără alunecare.*

2° O bară OA se roteşte în jurul capătului său fix O, cu o viteză unghiulară constantă $\bar{\omega}$, rămînînd mereu în acelaşi plan. În momentul iniţial, cînd bara trece prin poziţia OA_0, un punct mobil M porneşte din capătul fix şi se mişcă cu acceleraţia $\bar{a}$ constantă în modul, spre capătul A. Se cere viteza şi acceleraţia punctului M în momentul t.

Rezolvare. Vectorul $\bar{\omega}$ este perpendicular pe planul în care se mișcă bara. În figura 311 s-au construit vectorii reprezentînd : viteza relativă, în raport cu axa barei OA, a punctului M, cu valoarea $v_r = at$, viteza de transport avînd valoarea :

$$v_t = OM\ \omega = \frac{at^2}{2}\ \omega,$$

și viteza absolută cu modulul :

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{v_t^2 + v_r^2} = at\sqrt{\frac{\omega^2 t^2}{4} + 1}.$$

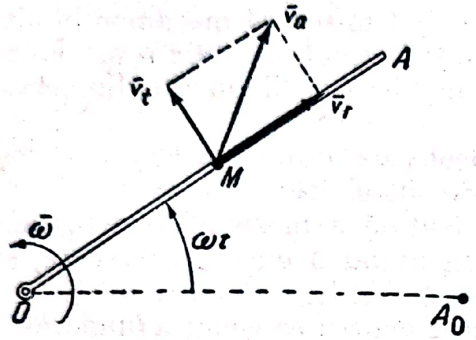


Fig. 311

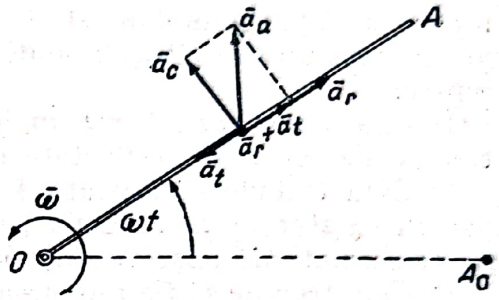


Fig. 312

În figura 312 s-a construit compunerea acceleraţiilor : acceleraţia relativă cu valoarea $a_r = a$, acceleraţia de transport, care, pentru rotaţia uniformă a barei, nu are decît componentă după direcţia barei, de valoare :

$$a_t = -\ OM\ \omega^2 = -\ \frac{at^2}{2}\ \omega^2,$$

şi acceleraţia complementară, perpendiculară pe planul $(\bar{\omega}, \overline{OA})$ în sensul arătat pe figură, de modul :

$$|\bar{a}_c| = 2\,|\bar{\omega}|\,|\bar{v}_r| = 2a\omega t.$$

Deci :

$$|\bar{a}_a| = \sqrt{(a_r + a_t)^2 + a_c^2} = \sqrt{\left(a - \frac{a\omega^2 t^2}{2}\right)^2 + (2a\omega t)^2} = a\sqrt{1 + 3\omega^2 t^2 + \frac{\omega^4 t^4}{4}}.$$

B. DINAMICA MIŞCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI MATERIAL

§ 121. Ecuaţia fundamentală a mişcării relative

a. În introducere (§§ 1 şi 3) s-a scos în evidenţă faptul că mişcarea mecanică, deşi unică şi *absolută* prin natura ei, pentru a fi studiată trebuie să fie raportată la un reper. Prin aceasta, caracteristicile mişcării (traiectorie, viteză, acceleraţie etc.) sînt *relative*, în funcţie de reperul ales.

Dacă ar fi existat un reper fix, cum a presupus Newton, caracteristicile mişcării, raportate la acest reper, ar fi fost şi ele absolute.

În baza aceleaşi ipoteze, a reperului fix, au fost enunţate şi principiile pe care s-a construit mecanica newtoniană.

Cu toate că nu există nici un reper fix, totuşi practica a dovedit că, în foarte multe probleme de mişcare mecanică, există repere mobile faţă de care principiile şi legile mecanicii newtoniene sînt confirmate cu o foarte bună aproximaţie.

Astfel, raportînd mişcările corpurilor cereşti la reperul heliocentric (§§ 3 şi 95), studiile teoretice sînt confirmate cu o mare precizie de observaţiile astronomice. De asemenea, în marea majoritate a mişcărilor mecanice de pe Pămînt, acesta este un reper faţă de care rezultatele studiilor, pe baza mecanicii newtoniene, sînt verificate cu o bună aproximaţie.

Cu toate acestea, s-a mai constatat că raportînd mişcarea mecanică la alte repere, se înţelege mobile, studiile pe baza ecuaţiei fundamentale a mecanicii newtoniene nu sînt cîtuşi de puţin confirmate de observaţiile făcute din aceste repere.

În cele ce urmează se vor analiza unele aspecte ale problemei mişcării relative şi ale reperelor, reflectate în următoarele întrebări :

1° Cum trebuie modificată ecuaţia fundamentală a mecanicii newtoniene pentru ca studiile în raport cu un reper *Oxyz*, avînd o mişcare oarecare, să fie confirmate de observaţiile din acelaşi reper?

2° Cum trebuie să fie mişcarea reperului *Oxyz* pentru ca ecuaţia fundamentală a mişcării relative faţă de acest reper să fie identică cu ecuaţia fundamentală, aşa cum a conceput-o Newton?

3° Care este ordinul de mărime al erorilor dacă se admite că Pămîntul este un reper faţă de care, pentru mişcările mecanice de pe suprafaţa lui, s-ar folosi ecuaţia fundamentală a mecanicii newtoniene fără modificări?

b. Unui observator solidar cu reperul mobil *Oxyz* i se pare că mişcarea punctului material M de masă m, acţionat de forţe date şi de legătură, este o mişcare absolută. El este înclinat să studieze mişcarea cu ajutorul ecuaţiei :

$$m\bar{a}_a - \bar{F} = 0,$$

în care toate forţele date şi de legătură sînt reprezentate prin $\bar{F}$.

Admiţînd că atît calculele, observaţiile cît şi măsurătorile sînt exacte, el va constata o nepotrivire între rezultatele calculelor şi cele ale observaţiilor şi măsurătorilor.

Însă, dacă ştie că reperul *Oxyz* este mobil faţă de reperul fix $O'x'y'z'$, el ştie de asemenea că acceleraţia măsurată este acceleraţia relativă $\bar{a}_r$, şi nu acceleraţia absolută $\bar{a}_a$.

Cum : $$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c,$$

înlocuind în ecuaţia fundamentală :

$$m(\bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c) = \bar{F},$$

adică : $$m\bar{a}_r = \bar{F} - m\bar{a}_t - m\bar{a}_c$$

şi notînd termenii de corecţie : $-m\bar{a}_t = \bar{F}_t$, $-m\bar{a}_c = \bar{F}_c$,

se găseşte :

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c, \tag{12.11}$$

ecuaţia fundamentală a mişcării relative, unde $\bar{F}_t$ poartă numele de *forţa de transport*, iar $\bar{F}_c$ *forţa lui Coriolis*.

În ansamblu, cele două forţe de corecţie se numesc *forţe complementare*, iar uneori mai primesc şi alte denumiri [1]. Aceste forţe au un *caracter inerţial*, fiind datorite mişcării în virtutea inerţiei a punctului material. În consecinţă, pentru a studia mişcarea punctului material în raport cu un reper mobil, este necesar ca, pe lîngă forţele date şi de legătură aplicate efectiv punctului material, să se considere şi forţele complementare, adică să se folosească ecuaţia (12.11). Numai în aceste condiţii nepotrivirile dintre calcule şi observaţii pot fi eliminate.

c. **Sisteme inerţiale.** Pentru a răspunde la întrebarea 2° se va scrie că ecuaţia fundamentală a mişcării relative (12.11), este identică cu ecuaţia fundamentală a mişcării absolute, adică se va scrie ecuaţia (12.11) sub forma:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} \tag{12.12}$$

Pentru aceasta este necesar şi suficient ca suma vectorială a forţelor complementare să fie mereu nulă:

$$\bar{F}_t + \bar{F}_c = 0.$$

Aceasta echivalează cu condiţia ca expresia:

$$\bar{a}_t + \bar{a}_c = \bar{a}_o + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$$

să fie întotdeauna nulă, independent de direcţia, sensul şi modulul vitezei relative $\bar{v}_r$. De aici rezultă, în primul rînd, că $\bar{\omega}$ trebuie să fie nul. Ca urmare, deoarece şi $\dot{\bar{\omega}}$ e nul, întreaga expresie se anulează numai dacă şi $\bar{a}_o$ este nul.

Reciproc, dacă:

$$\bar{\omega} = 0 \qquad \text{şi} \qquad \bar{a}_o = 0, \tag{12.13}$$

ecuaţia (12.11) devine (12.12).

În concluzie, pentru ca ecuaţia fundamentală a mecanicii newtoniene să aibă, faţă de sistemul de referinţă mobil, aceeaşi formă ca faţă de reperul fix, *este necesar şi suficient ca sistemul mobil să fie în mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă în raport cu reperul fix.*

Un asemenea sistem de referinţă are o mişcare în virtutea inerţiei, din care cauză el este denumit *reper inerţial.*

Însă, cum nu există reper fix, criteriul după care se poate recunoaşte un reper inerţial nu se bazează în primul rînd pe felul mişcării acestui reper, ci pe faptul că principiile mecanicii newtoniene sînt confirmate pentru mişcările studiate în raport cu acest reper.

Din acest punct de vedere, sistemul de referinţă heliocentric, fără a fi perfect inerţial, este considerat, în stadiul actual al ştiinţei, ca cel mai bun reper inerţial.

d. **Principiul relativităţii al mecanicii newtoniene.** *Toate sistemele de referinţă în mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă în raport cu un sistem inerţial sînt de asemenea sisteme inerţiale.*

Legile mecanicii newtoniene sînt identice în toate sistemele inerţiale, deoarece toate aceste sisteme sînt echivalente.

---

[1] F_t (forţa centrifugă propriu-zisă), F_c (forţa centrifugă compusă).

Galileo Galilei a enunţat principiul relativităţii în următoarea formă: *Nici o experienţă mecanică efectuată într-un sistem inerţial nu poate să pună în evidenţă mişcarea sistemului, după cum nici o experienţă mecanică nu poate fi influenţată de mişcarea sistemului inerţial.*

e. **Transformarea Galilei.** Se consideră două sisteme inerţiale $O'x'y'z'$ şi $Oxyz$. Legea de transformare a lui Galilei priveşte trecerea de la coordonatele spaţiale şi temporală ale unui eveniment, în raport cu primul sistem, la coordonatele spaţiale şi temporală ale aceluiaşi eveniment, în raport cu cel de-al doilea sistem.

Se reiau notaţiile folosite la § 110 privind vectorii şi coordonatele care determină poziţiile relative ale celor două sisteme de referinţă între ele. Dacă sistemul $O'x'y'z'$ este inerţial, pentru ca şi sistemul $Oxyz$ să fie inerţial este necesar şi suficient ca:

$$\bar{\omega} = 0 \quad \text{şi} \quad \bar{a}_o = 0,$$

adică:

$$\dot{\bar{i}} = 0; \quad \dot{\bar{j}} = 0; \quad \dot{\bar{k}} = 0 \quad \text{şi} \quad \ddot{\bar{r}}_o = 0.$$

Se integrează ecuaţiile rezultate şi se obţine:

$$\bar{i} = \bar{C}_1, \; \bar{j} = \bar{C}_2, \; \bar{k} = \bar{C}_3 \text{ şi } \bar{r}_o = \bar{C}t + \bar{C}', \tag{12.14}$$

în care $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_3$, $\bar{C}$ şi $\bar{C}'$ sînt constante de integrare.

Pentru simplificare se poate presupune că translaţia sistemului $Oxyz$ este paralelă cu axa $O'x'$, iar toate axele celor două sisteme sînt două cîte două paralele, adică:

$$\bar{i} = \bar{i}'; \quad \bar{j} = \bar{j}'; \quad \bar{k} = \bar{k}'.$$

De asemenea, dacă se presupune că în momentul iniţial ($t = 0$) cele două sisteme coincid:

$$\bar{C}' = 0,$$

iar dacă $\bar{v}_o$ este viteza de translaţie rectilinie uniformă a sistemului $Oxyz$, ultima ecuaţie din (12.14) devine:

$$\bar{r}_o = \bar{v}_o t = v_o \bar{i} t.$$

Pe de altă parte, dacă punctul M în mişcare reprezintă un eveniment raportat la cele două sisteme de referinţă prin: $\bar{r}'$ (x', y', z') faţă de $O'x'y'z'$ şi $\bar{r}$ (x, y, z) faţă de $Oxyz$, aplicînd relaţia (11.3) de la § 110, se obţine:

$$\bar{r}' = \bar{r}_o + \bar{r} \text{ sau } x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}' = (v_o t + x)\,\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Ultima egalitate permite scrierea formulelor transformării Galilei:

$$\begin{aligned} x' &= x + v_o t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \qquad \text{sau} \qquad \begin{aligned} x &= x' - v_o t \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \tag{12.15}$$

completate cu relaţiile corespunzătoare ipotezei timpului universal absolut.

f. Transformarea Lorentz. În introducere, la § 1, s-a arătat că în concepția clasică, newtoniană, a spațiului absolut și a timpului absolut se presupune existența unor acțiuni instantanee la distanță, care s-ar transmite cu viteză infinită.

După concepția modernă, spațiul-timp formează o varietate cvadridimensională a geometriilor riemanniene, depinzînd de materie și de mișcarea ei, iar acțiunile se transmit, din aproape în aproape, cu viteză finită.

Teoria relativității restrînse a lui Einstein se conformează acestor concepte, avînd la bază următoarele principii:

1° *Principiul relativității restrînse.* Legile fenomenelor fizice sînt aceleași în toate sistemele de referință în translație rectilinie și uniformă unele față de altele.

Acest principiu extinde principiul relativității din mecanică și la fenomenele electromagnetice și optice.

2° *Principiul propagării izotrope a luminii.* În orice sistem în mișcarea de translație rectilinie și uniformă, viteza de propagare a luminii este aceeași în toate direcțiile. Viteza luminii nu depinde de starea de mișcare a sursei care o emite.

Viteza luminii în vid, $c \approx 300\,000$ km/s, este cea mai mare viteză de propagare cunoscută astăzi.

Ca o consecință a acestor principii, Einstein a dedus formulele de transformare ale teoriei sale, pe care le stabilise anterior Lorentz, pe baza invarianței legilor electromagnetismului.

Păstrînd aceleași condiții și notații ca la transformarea Galilei, se pot deduce[1] formulele transformării Lorentz:

$$x' = \frac{x + v_o t}{\sqrt{1 - \frac{v_o^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t + \frac{v_o x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_o^2}{c^2}}};$$

$$x = \frac{x' - v_o t'}{\sqrt{1 - \frac{v_o^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' - \frac{v_o x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_o^2}{c^2}}}. \tag{12.16}$$

g. Observații și consecințe. 1° Ultimele formule, t' și t, din (12.16), arată dependența timpului de mișcarea relativă a sistemelor de referință.

2° Presupunînd că punctul $M(x, y, z)$ se mișcă în raport cu sistemul $Oxyz$ paralele cu axa Ox cu viteza v, viteza lui, în raport cu sistemul $O'x'y'z'$, notată cu v', se poate calcula atît cu transformarea Galilei cît și cu transformarea Lorentz.

După *transformarea Galilei*, evident:

$$v' = v_o + v.$$

Potrivit transformării Lorentz:

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt'} + v_o \frac{dt}{dt'}}{\sqrt{1 - \frac{v_o^2}{c^2}}}, \text{ dar: } dt' = \frac{dt + v_o \frac{dx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_o^2}{c^2}}},$$

[1] v. N. Bărbulescu. *Elemente de fizică generală.* Editura didactică și pedagogică, București, 1962, p. 90.

şi după înlocuire, se găseşte:

$$v' = \frac{v_o + v}{1 + \frac{v_o v}{c^2}}, \tag{12.17}$$

formula de însumare a vitezelor măsurate în sisteme de referinţă diferite.

3° Admiţînd că sistemul $Oxyz$ are o translaţie cu viteza de propagare a luminii, $v_o = c$, iar M s-ar mişca tot cu $v = c$ în raport cu $Oxyz$, după transformarea Galilei s-ar găsi:

$$v' = 2c = 600\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}},$$

pe cînd după transformarea Lorentz:

$$v' = \frac{c + c}{1 + \frac{c \cdot c}{c^2}} = c = 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}},$$

ceea ce nu este decît o verificare a principiului că viteza de propagare a luminii în vid este o viteză limită.

4° Dacă în formulele transformării Lorentz (12.16) se presupune $c = \infty$, se obţin imediat formulele (12.15) ale transformării Galilei.

În acest fel, mecanica newtoniană, care foloseşte transformarea Galilei, apare ca un caz particular, limită, a teoriei relativităţii.

5° Este interesant de stabilit ordinul de mărime al erorii care se comite folosind mecanica newtoniană pentru vitezele din tehnică, relativ mici în comparaţie cu viteza luminii.

De exemplu, dacă se presupune că de pe Pămînt $\left(\text{care se mişcă pe orbita sa cu } v_o = 30 \frac{\text{km}}{\text{s}}\right)$ s-ar lansa o rachetă, tangent la orbită, în sensul mişcării Pămîntului, cu viteza $v = 15 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, viteza rachetei, în raport cu sistemul heliocentric, ar fi, după mecanica newtoniană, de $45 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. După teoria relativităţii, viteza rachetei ar fi ceva mai mică, diferenţa este abia de $0{,}23 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$.

În consecinţă, pentru problemele de mişcare în care vitezele mobilelor sînt relativ mici, în comparaţie cu viteza luminii, se pot folosi mai departe conceptele şi principiile mecanicii newtoniene, cu toate că teoria relativităţii este mai aproape de adevărul obiectiv.

În acest fel se confirmă şi principiul de corespondenţă dintre mecanica newtoniană şi teoria relativităţii restrînse pentru viteze mici în comparaţie cu viteza luminii.

6° În exemplul dat la 5° s-a presupus implicit că Pămîntul ar fi un sistem de referinţă inerţial. În ce măsură această ipoteză poate influenţa concluziile de la 5° va fi analizat la § 122 şi astfel se va răspunde şi la întrebarea 3° pusă la începutul § 121.

§ 122. Pămîntul ca sistem de referinţă

a. Observaţiile au arătat că Pămîntul are o mişcare complexă în raport cu sistemul heliocentric. În primul rînd are o mişcare de translaţie pe orbita sa care este o elipsă cu Soarele într-unul din focare. Excentricitatea elipsei fiind foarte mică, se admite, în calculele aproximative, că orbita este un

Scanned with OKEN Scanner

cerc cu Soarele în centru şi cu raza egală cu distanţa mijlocie dintre Pămînt şi Soare, $D \approx 150\,000\,000$ km.

Viteza medie în această mişcare este :

$$|\bar{v}_o| = \frac{2\pi D}{T} = \frac{2\pi \cdot 150\,000\,000 \text{ km}}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} \approx 30 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

În al doilea rînd, Pămîntul se roteşte în jurul axei sale o dată în 24 de ore cu viteza unghiulară :

$$|\bar{\omega}| = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \approx 0{,}726 \cdot 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

În al treilea rînd, axa de rotaţie diurnă nu are o direcţie constantă, însă deoarece variaţia ei este mică, în calculele ce urmează se va neglija această variaţie.

De asemenea, se vor neglija variaţiile modulului vitezei liniare $\bar{v}_o$ şi al vitezei unghiulare $\bar{\omega}$, variaţii care sînt relativ foarte mici.

În aceste condiţii sînt suficiente elemente pentru a conchide, în primul rînd, că Pămîntul nu este un sistem inerţial şi, în al doilea rînd, pentru a calcula erorile care se comit considerînd totuşi Pămîntul un sistem inerţial.

Pentru aceasta este suficient să se aprecieze importanţa relativă a forţelor de corecţie faţă de forţa de atracţie a Pămîntului asupra unui punct material de masă m.

b. **Calculul forţei de transport** se face folosind relaţia :

$$\bar{F}_t = -m[\bar{a}_o + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})]. \qquad (12.18)$$

1° Termenul — $m\bar{a}_o$ reprezintă aşa-numita *forţă centrifugă* datorită mişcării de translaţie circulară a Pămîntului. Importanţa acestei forţe reiese din compararea modulului ei cu modulul atracţiei pămînteşti $m|\bar{\gamma}|$, unde $\bar{\gamma}$ este *acceleraţia gravitaţiei.* Într-o primă aproximaţie se poate considera $\gamma = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Cum :

$$|\bar{a}_o| = \frac{v_o^2}{D} \frac{900 \frac{\text{km}^2}{\text{s}^2}}{150\,000\,000 \text{ km}} \approx \frac{6 \text{ mm}}{\text{s}^2},$$

rezultă :

$$\frac{|\bar{a}_o|}{|\bar{\gamma}|} \approx \frac{6}{10\,000} = 0{,}0006.$$

În consecinţă, forţa care ar imprima unui corp acceleraţia de $6 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$ este *neglijabilă*, fiind mai mică decît $\frac{1}{1600}$ din forţa de atracţie pămîntească.

2° Termenul — $m\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}$ reprezintă *forţa de corecţie* datorită variaţiei în direcţie şi modul a vectorului $\bar{\omega}$ care reprezintă mişcarea de rotaţie a Pămîntului. Deoarece $\dot{\bar{\omega}}$ este practic nul, acest termen se neglijează.

3° Termenul — $m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$ reprezintă forţa denumită de obicei *forţa centrifugă la suprafaţa Pământului*, datorită mişcării de rotaţie a Pământului în jurul axei polilor.

Pentru un punct material M de masă m situat la latitudinea λ (fig. 313), această forţă $\bar{C}$, situată în planul meridianului care trece prin M, este perpendiculară pe axa de rotaţie, în sensul depărtării de axă, avînd modulul:

$$|\bar{C}| = mAM\omega^2 = m\omega^2 R \cos\lambda,$$

unde R este raza sferei pământeşti.

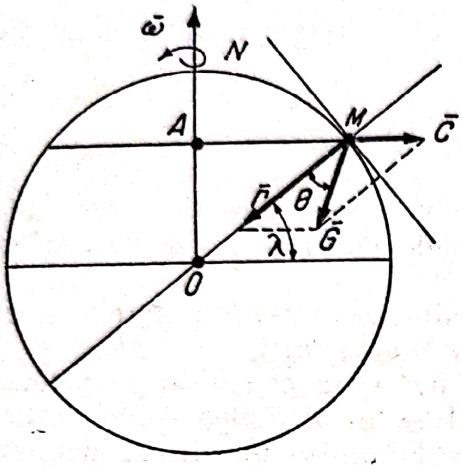


Fig. 313

Pentru observatorul care presupune Pământul fix, această forţă pare reală şi aplicată punctului material.

În acest caz punctul material M ar fi acţionat de forţa:

$$\bar{G} = \bar{\Gamma} + \bar{C}, \qquad (12.19)$$

unde $\bar{G}$ este *greutatea punctului material*, iar $\bar{\Gamma}$ forţa de atracţie a Pământului.

Cele două forţe diferă din cauza forţei centrifuge. La poli, unde $\lambda = 90°$:

$$\bar{C} = 0, \quad \bar{G} = \bar{\Gamma} = m\bar{\gamma};$$

greutatea punctului material ar coincide[1] cu forţa de atracţie newtoniană aplicată punctului material. La latitudinea λ:

$$\bar{G} = m\bar{g},$$

unde $\bar{g}$ este *acceleraţia greutăţii* diferită de $\bar{\gamma}$.

Proiectînd ecuaţia (12.19) după rază, se obţine:

$$mg\cos\theta = m\gamma - mR\omega^2\cos^2\lambda. \qquad (12.20)$$

Deoarece, după cum se va arăta mai departe, θ este foarte mic, din relaţia (12.20) se deduce:

$$g \approx \gamma\left(1 - \frac{R\omega^2}{\gamma}\cos^2\lambda\right).$$

Calculînd cu: $R = 6378$ km $\approx 64 \cdot 10^5$ m, $\omega \approx 0{,}726 \cdot 10^{-4}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\gamma \approx 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, se găseşte:

$$g \approx \gamma\left(1 - \frac{1}{17^2}\cos^2\lambda\right). \qquad (12.21)$$

[1] Dacă Pământul ar fi omogen şi perfect sferic.

c. *Observații.* 1° Din (12.21) se deduce, ca o simplă curiozitate, că dacă Pământul s-ar roti de 17 ori mai repede, la ecuator corpurile ar fi lipsite de greutate.

2° De asemenea se deduce că accelerația greutății variază de la pol, unde este maximă, la ecuator, unde este minimă:

$$g_{ec} \approx \gamma \left(1 - \frac{1}{17^2}\right).$$

3° Deci variația accelerației greutății de la pol la ecuator ar fi:

$$\frac{\gamma - g_{ec}}{\gamma} \approx 0{,}35\%.$$

Or, măsurătorile au dat: $g_{pol} = 9{,}831 \frac{m}{s^2}$ și $g_{ec} \approx 9{,}781 \frac{m}{s^2}$, adică o variație de circa 0,5%.

Se poate afirma că circa 0,35% a variației se datorește mișcării de rotație a Pământului, iar restul și din cauza formei sferoide și nu sferice, Pământul fiind turtit la poli.

4° Abaterea firului cu plumb cu $\sphericalangle \theta$ față de verticala OM a locului se calculează proiectînd ecuația (12.19) pe orizontala din M în planul meridianului:

$$mg \sin \theta = m R \omega^2 \cos \lambda \sin \lambda,$$

$$\sin \theta = \frac{R\omega^2}{2g} \sin 2\lambda. \tag{12.22}$$

La poli și la ecuator, abaterea este nulă, ea este maximă la latitudinea $\lambda = 45°$, unde este, aproximativ, abia de 6 min sexagesimale.

d. **Calculul forței lui Coriolis** se face cu formula:

$$\bar{F}_c = -2m\,\bar{\omega} \times \bar{v}_r. \tag{12.23}$$

Această forță explică devierile care se produc, în mișcările relative ale corpurilor, din cauza rotației Pământului. Astfel:

1° Mișcările spre pol din emisfera nordică sînt deviate spre est, mișcările spre ecuator din emisfera nordică sînt deviate spre vest, adică în ambele cazuri spre dreapta mișcării. Mișcările din emisfera sudică sînt deviate spre stînga mișcării. Se pot da suficiente exemple, astfel: faptul că apele care curg în emisfera nordică, spre pol sau ecuator, atacă mai mult malul drept (legea lui Beer), precum și abaterea Golfstreamului și a vînturilor alizee se explică tocmai prin rotația Pământului.

Pentru explicarea teoretică se consideră punctul material M_1 (fig. 314) mișcîndu-se, în emisfera nordică, pe meridian spre polul nord, cu viteza relativă $\bar{v}_r$. Se construiește grafic $\bar{a}_c$ și apoi forța lui Coriolis de sens contrar, care arată că mișcarea este deviată spre est, spre dreapta mișcării. La fel se arată că mișcarea unui punct M_2, în emisfera sudică, spre polul sud, este deviată tot spre est, adică spre stînga mișcării.

Punctele de pe ecuator nu sînt deviate față de mișcarea lor pe meridian, din cauză că la ecuator $\bar{\omega}$ și $\bar{v}_r$ sînt coliniari.

Scanned with OKEN Scanner

2° Punctele materiale (corpurile) în cădere sînt deviate spre est. Explicaţia este evidentă urmărind construcţia forţei Coriolis de pe figura 314 pentru punctele M_3 şi M_4.

Acum aproape un secol s-au făcut experienţe la minele din Freiberg (Germania). Pe o adîncime de cădere de 158 m, devierea măsurată a fost

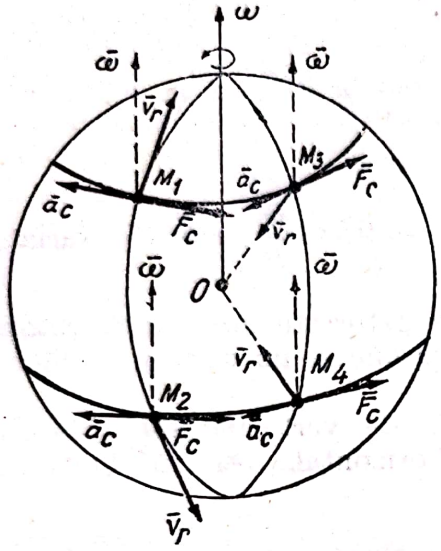


Fig. 314

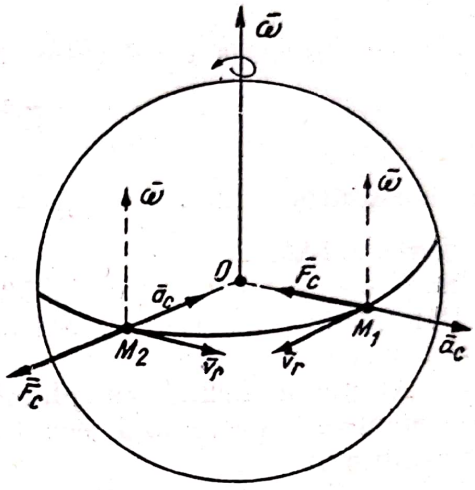


Fig. 315

de 27 mm spre est, foarte apropiată de valoarea stabilită prin calcul.

3° Corpurile în mişcare pe linia ecuatorului devin mai grele dacă se mişcă de la est spre vest şi mai uşoare dacă se mişcă de la vest spre est. Explicaţia este simplă şi apare din construcţia acceleraţiei lui Coriolis (fig. 315).

Ca exemplu, se calculează forţa lui Coriolis pentru un corp avînd masa de 1 000 kg, care se deplasează cu o viteză relativă, $|\bar{v}_r| = 1\,200\,\frac{km}{h} \approx$ $\approx 333\,\frac{m}{s}$. Deoarece modulul acceleraţiei lui Coriolis este:

$$|\bar{a}_c| = 2\,|\bar{\omega}|\,|\bar{r}_r| \approx 0{,}05\,\frac{m}{s^2},$$

care, comparat cu modulul acceleraţiei gravitaţiei:

$$\frac{|\bar{a}_c|}{|\bar{\gamma}|} \approx \frac{0{,}05\,\frac{m}{s^2}}{10\,\frac{m}{s^2}} = 0{,}005,$$

arată că un corp de 1 000 kg devine mai greu cu 5 kgf dacă se mişcă cu viteza sunetului pe linia ecuatorului de la est spre vest, şi invers, devine cu 5 kgf mai uşor dacă mişcarea are sensul de la vest spre est.

e. **Concluzii.** O serie de experiențe bazate pe măsurători cu precizii din ce în ce mai mari au dovedit că :

1° Pămîntul nu este un sistem inerțial;

2° observatorul care presupune că Pămîntul este un reper fix, sau inerțial, este nevoit să ia în considerare și forțele complementare pentru a putea explica fenomenele, pe baza principiilor mecanicii newtoniene;

3° pentru un observator de pe Pămînt aceste forțe apar ca forțe efectiv aplicate punctului material;

4° pentru observatorul dintr-un sistem inerțial, aceste forțe sînt datorite inerției în mișcarea punctului material și nu sînt aplicate punctului, ci legăturii sau agentului motor care modifică sau tinde să modifice mișcarea punctului material;

5° erorile care se comit presupunîndu-se Pămîntul un sistem inerțial sînt relativ mici, de ordinul miimilor, fără importanță pentru problemele curente ale tehnicii inginerești;

6° totuși, atît din punct de vedere teoretic cît și în cazul unor probleme speciale, importanța devierilor, rezultate din cauză că Pămîntul este un sistem neinerțial, este mare. Ele impun, în primul rînd, o justă interpretare a fenomenelor.

§ 123. Echilibrul relativ

a. În cazul particular cînd punctul material se află în repaus față de sistemul în mișcare, acest repaus este relativ.

În statica punctului material s-a stabilit condiția necesară și suficientă pentru repausul punctului material :

$$\bar{F} = 0, \tag{12.24}$$

adică rezultanta tuturor forțelor date și de legătură, aplicate punctului material, să fie nulă, forțele să fie în echilibru. Se amintește că în statică repausul este absolut, fiind considerat în raport cu un reper fix.

Dacă sistemul de referință nu este fix sau inerțial, repausul nu este absolut, ci relativ, iar condiția necesară și suficientă nu este (12.24). Într-adevăr, dacă un punct material de masă m este în repaus relativ, $\bar{v}_r = 0$ și în consecință :

$$\bar{a}_r = 0, \quad \bar{a}_c = 0, \quad \bar{F}_c = 0,$$

și din ecuația fundamentală a mișcării relative (12.11) se deduce condiția necesară și suficientă a repausului relativ :

$$\bar{F} + \bar{F}_t = 0, \tag{12.25}$$

adică : *sistemul forțelor date și de legătură, aplicate efectiv punctului material, la care se adaugă forțele de transport, să formeze un sistem de forțe care se echilibrează.*

În acest fel, problema repausului (echilibrului) relativ, care este o problemă de dinamică, se poate rezolva cu mijloacele staticii.

Scanned with OKEN Scanner

Acest mod de lucru, care se va folosi şi la § 140, se numeşte *metoda cinetostatică.*

b. Aplicaţii. 1° Un vagon de cale ferată are o mişcare de translaţie rectilinie, cu acceleraţie constantă $\bar{a}_o$.

Să se calculeze unghiul θ format de direcţia firului unui pendul simplu, suspendat în O (fig. 316), cu verticala punctului O, precum şi forţa de legătură $\bar{N}$ din fir.

Rezolvare. Condiţia vectorială de echilibru este:

$$m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_t = 0,$$

care proiectată pe axa Mx, perpendiculară pe MO:

$$-mg \sin \theta + ma_o \cos \theta = 0$$

şi pe direcţia MO:

$$N - mg \cos \theta - ma_o \sin \theta = 0$$

conduce la:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a_o}{g} \quad \text{şi} \quad N = m\sqrt{a_o^2 + g^2} > mg.$$

Observaţie. Pentru observatorul din vagon, această forţă pare efectiv aplicată punctului material M; pentru cel de pe Pământ această forţă nu există, deoarece rămînerea în urmă a punctului material este o consecinţă a mişcării accelerate a vagonului care antrenează punctul material în mişcarea sa cu ajutorul legăturii prin fir. După cum rezultă şi din calcule, forţa $\bar{F}_t$ nu acţionează asupra punctului material, ci asupra legăturii; forţa de legătură $\bar{N}$ în cazul vagonului în mişcare accelerată este alta decît în cazul vagonului nemişcat sau în mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă.

2° Un pendul simplu OM se poate mişca într-un plan vertical care se roteşte în jurul axei verticale din O fixă, cu o viteză unghiulară constantă $\bar{\omega}$. Să se calculeze unghiul θ format de firul OM şi verticală, precum şi tensiunea din fir.

Rezolvare. Condiţia vectorială de echilibru are aceeaşi formă ca în aplicaţia 1°, cu deosebirea că:

$$|\bar{a}_t| = MO' \ \omega^2 = l \ \omega^2 \sin \theta,$$

fiind îndreptată spre axa de rotaţie (fig. 317).

Ecuaţiile de proiecţie pe axa Mx, perpendiculară pe MO:

$$-mg \sin \theta + ml \ \omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

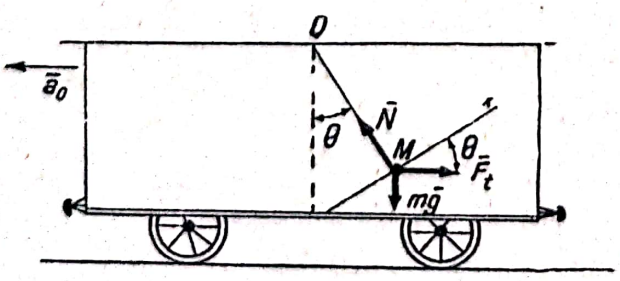


Fig. 316

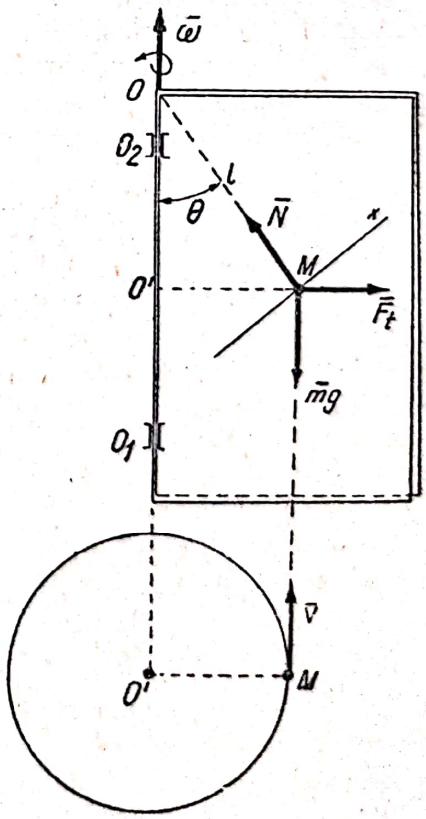


Fig. 317

şi pe MO:

$$N - mg\cos\theta - ml\,\omega^2\sin^2\theta = 0,$$

dau rezultatele:

$$\theta_1 = 0, \quad N_1 = mg,$$

$$\cos\theta_2 = \frac{g}{l\omega^2},$$

$$N_2 = \frac{mg}{\cos\theta_2} > mg.$$

Observaţii. α) Poziţia de repaus verticală ($\theta_1 = 0$) este posibilă, însă nu este stabilă pentru $\omega > \sqrt{\frac{g}{l}}$.

β) Deoarece cos θ este cel mult 1, poziţia de repaus stabilă (θ_2) există numai dacă $\omega \geqslant \sqrt{\frac{g}{l}}$.

γ) Tensiunea din fir în dinamică este diferită de cea din statică, deoarece forţa de transport acţionează asupra legăturii (firului).

δ) Această problemă simplă reprezintă baza teoretică a regulatorilor cu ghiulele. Principiul de funcţionare a unui regulator cu ghiulele (fig. 318) este următorul:

Bara OM, avînd masa m a ghiulelei la capătul M, este legată prin articulaţia fixă O de un ax care este antrenat de motor într-o mişcare de rotaţie cu o viteză unghiulară $|\bar{\omega}|$ proporţională cu turaţia motorului.

O altă bară AB, articulată în A de OM, este articulată în B de un manşon care poate aluneca pe ax şi antrenează o bară BC, care acţionează asupra admisiei combustibilului în cilindrul motorului.

Dacă sarcina motorului scade, motorul se ambalează, turaţia lui creşte, $|\bar{\omega}|$ creşte, θ se măreşte, bara AB ridică manşonul şi, prin bara BC, micşorează admisia.

În consecinţă, scade turaţia motorului şi se ajunge la un echilibru între sarcina motorului şi admisia combustibilului necesar pentru învingerea sarcinii. Poziţia de echilibru (repaus relativ) a regulatorului se determină cu o relaţie de forma celei stabilite la aplicaţia 2°. Figura 318 reprezintă cel mai simplu tip de regulator cu ghiulele, regulatorul centrifugal al lui Watt[1].

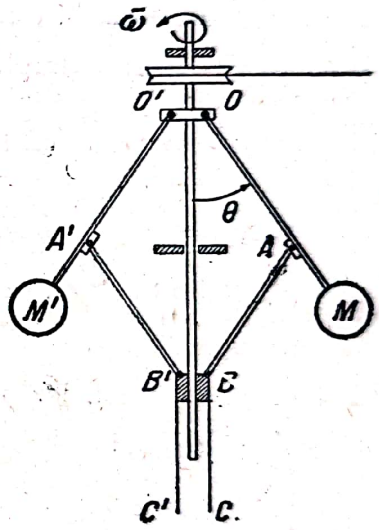


Fig. 318

CAPITOLUL XIII

DINAMICA CORPURILOR

(Teoreme şi metode generale)

A. GENERALITĂŢI

§ 124. Sistem material. Forţe interioare

a. În stadiul actual al ştiinţelor naturii, materia are o *structură dualâ*: una *discontinuă*, *concentrată*, sub formă de *substanţă*, şi alta *continuă*, *extinsă în spaţiu*, sub formă de *cîmp*.

[1] Watt James (1736—1819), mecanician scoţian.

Aceste structuri ale materiei cu însuşiri contrarii : discontinuă *(corpusculară)* şi continuă *(ondulatorie)*, sînt indisolubil legate între ele, alcătuind o unitate dialectică de contrarii.

Pentru studiul mişcării mecanice s-a admis că materia se prezintă, într-o primă aproximaţie, numai sub formă de corpuri, alcătuite din particule (părţi de substanţă), care se interacţionează. *Uneori şi în anumite condiţii, dictate de experienţă, corpul poate fi asimilat fie cu un punct material sau cu un sistem de puncte materiale, fie cu un continuu material sau cu un solid rigid* (v. § 2).

De asemenea s-a specificat că, ori de cîte ori nu va fi necesar să se precizeze dacă corpul este asimilat cu un sistem de puncte materiale sau cu un continuu, se va folosi noţiunea mai cuprinzătoare de *sistem material.*

Se dau aici cîteva completări asupra acestei noţiuni.

Astfel, dacă se împarte volumul ocupat de sistemul material în elemente de volum ΔV, fiecărui element din jurul unui punct oarecare îi corespunde o masă elementară Δm. Dacă sistemul material este continuu, $\Delta m > 0$ şi tinde spre zero o dată cu ΔV, iar $\lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta V}$, cînd există, este densitatea ρ a continuului în punctul considerat. Dacă sistemul material este discret, se găsesc elemente ΔV, în care $\Delta m > 0$ şi nu tinde spre zero o dată cu ΔV, precum şi elemente de volum în care $\Delta m = 0$.

În aceste condiţii, masa totală a sistemului material este dată de :

$$m = \lim \sum_{\Delta V \to 0} \Delta m = \mathrm{S}\ \mathrm{d}m, \tag{13.1}$$

o integrală de tip Stieltjes, unde S este semnul pentru reprezentarea acestui tip de integrală, folosită în cazul sistemelor care pot fi discrete sau continue.

Astfel, dacă sistemul material este discret, integrala este o sumă obişnuită : dacă sistemul este continuu, iar $\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta V} = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$ există şi este integrabil, (13.1) devine o integrală obişnuită :

$$\mathrm{S}\ \mathrm{d}m = \int_{(V)} \rho\ \mathrm{d}V.$$

La fel se poate exprima şi momentul static al unui sistem material în raport cu originea O a reperului prin :

$$\overrightarrow{S_o} = \lim \sum_{\Delta V \to 0} \bar{r}\ \Delta m = \mathrm{S}\ \bar{r}\ \mathrm{d}m, \tag{13.2}$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziţie al punctului curent în jurul căruia s-a considerat elementul de volum ΔV cu masa Δm.

Dacă sistemul material este discret, integrala (13.2) se reduce la o sumă obişnuită.

Dacă sistemul este continuu, (13.2) devine o integrală obişnuită :

$$\mathrm{S}\bar{r}\ \mathrm{d}m = \int \bar{r}\ \rho\ \mathrm{d}V.$$

b. În cadrul manualului s-au extins teoremele — stabilite pentru un sistem discret de puncte materiale — şi la cazul unui continuu material, pe baza unui proces de trecere la limită. Pentru aceasta s-a considerat un

punct curent M al volumului ocupat de sistemul material continuu, ΔV un element de volum din jurul punctului M și Δm elementul de masă distribuit în ΔV. S-a aplicat teorema considerată asupra sistemului de puncte M, ca și cum ar fi un sistem discret de puncte materiale, și apoi s-a trecut la limită pentru $\Delta V \to 0$ (§ 55).

Se precizează că și în continuare teoremele care vor fi stabilite în cazul unui sistem discret vor fi considerate aplicabile și unui sistem continuu pe baza unui proces asemănător de trecere la limită.

c. În problema mișcării unui sistem de puncte materiale M_i, de mase m_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$), intervin următoarele forțe:

1°. *Forțe exterioare*, date (active) sau de legătură (pasive).

2°. *Forțe interioare* care ascultă de principiul acțiunii și reacțiunii.

Se notează cu $\bar{F}_i$ rezultanta forțelor exterioare aplicate punctului M_i, cu $\bar{F}_{ij}$ acțiunea punctului M_j asupra punctului M_i și cu $\bar{F}_{ji}$ reacțiunea punctului M_i față de acțiunea punctului M_j. Rezultanta forțelor interioare aplicate punctului M_i este $\sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij}$, unde $j = 1, 2, 3, \ldots, n$, cu observația că pentru $j = i$, $\bar{F}_{ij} = 0$. Se știe că forțele interioare, deși sînt două cîte două egale și direct opuse, nu se echilibrează, deoarece nu sînt aplicate aceluiași punct material.

De pildă, forțele de interacțiune dintre moleculele unui gaz închis în cilindrul unei mașini nu se echilibrează.

Un sistem de puncte materiale, care nu are legături exterioare sau nu este acționat de forțe dinafara lui, se numește un *sistem izolat*. În natură nu există sisteme izolate; totuși unele sisteme materiale pot fi, cu o bună aproximație, asimilate cu un sistem izolat. Astfel, în anumite probleme, sistemul solar poate fi asimilat în primul rînd cu un sistem de puncte materiale din cauza distanțelor foarte mari dintre Soare și planetele sistemului în raport cu dimensiunile lor. În al doilea rînd, sistemul solar mai poate fi considerat și izolat, deoarece se găsește la distanțe imense față de cele mai apropiate stele.

§ 125. Teoreme generale. Integrale prime

a. Pentru studiul mișcării unui sistem de n puncte materiale M_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) avînd masele constante m_i și pozițiile determinate, în raport cu un reper cu originea în O, prin vectorii de poziție $\bar{r}_i$, este necesar să se rezolve un sistem de n ecuații diferențiale vectoriale, simultane, cu n funcții necunoscute, de forma:

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{13.3}$$

Integralele generale ale acestui sistem, în cazul cînd ele există, se pot scrie sub forma:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i (t, \bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_{2n}), \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{13.4}$$

unde $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_{2n}$ sînt $2n$ constante vectoriale care rezultă din integrarea sistemului de ecuaţii diferenţiale.

Aceste constante de integrare se determină cu ajutorul *condiţiilor iniţiale*, condiţii fizice, de pildă, poziţiile iniţiale ($\bar{r}_{i0}$) şi vitezele iniţiale ($\bar{v}_{i0}$) ale tuturor punctelor sistemului.

În mecanica newtoniană mărimile care determină, în orice moment t, mişcarea sistemului de puncte materiale M_i sînt: $\bar{r}_i$, $\bar{v}_i$ şi m_i, denumite *mărimi de stare*.

În condiţiile în care sistemul de n ecuaţii diferenţiale (13.3) se poate rezolva, o dată ce se cunosc mărimile de stare, problema mişcării sistemului de puncte materiale se consideră soluţionată.

b. Un exemplu îl constituie *„problema celor n corpuri"*, în care sistemul celor n corpuri este asimilat cu un sistem izolat de n puncte materiale, care se interacţionează potrivit legii gravitaţiei. Această problemă, cu aplicaţii în mecanica cerească, se rezolvă destul de uşor pentru $n = 2$, însă dificultăţile matematice cresc pentru $n > 2$.

În cazul general, cînd nici nu se cunosc expresiile forţelor interioare, problema mişcării sistemului de puncte materiale nu poate fi soluţionată, deoarece nu se poate rezolva sistemul de ecuaţii (13.3).

Cu toate acestea, calculîndu-se, cu ajutorul mărimilor de stare $\bar{r}_i$, $\bar{v}_i$, m_i, anumite expresii cum sînt: $m_i\bar{v}_i$ *(cantitatea de mişcare)*, $\bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i$ *(momentul cinetic)*, $\frac{1}{2} m_i v_i^2$ *(energia cinetică)*, s-a ajuns să se elimine, în multe cazuri, forţele interioare şi să se stabilească rezultate deosebit de utile pentru cunoaşterea unor importante caracteristici ale mişcării sistemului de puncte materiale. Aceste rezultate se prezintă sub forma unor *teoreme generale* privind variaţiile mărimilor, denumite *cantitate de mişcare*, *moment cinetic* şi *energie cinetică*.

Mai mult, în anumite condiţii, teoremele conduc la expresii care se pot uşor integra. Aceste *integrale prime* ale sistemului de ecuaţii diferenţiale (13.3) exprimă *conservarea* aceloraşi mărimi care caracterizează mişcarea sistemului de puncte materiale.

Atît teoremele generale cît şi consecinţele lor, integralele prime, se pot folosi la studiul oricăror probleme de dinamică. Totuşi, se va constata că sînt probleme care se rezolvă mai uşor cu anumite teoreme sau cu anumite integrale prime.

În acest caz, dificultatea rămîne în alegerea instrumentului care simplifică cel mai mult studiul problemei în cauză.

c. În cele ce urmează se vor stabili teoremele generale şi integralele prime, la început pentru un punct material şi apoi pentru un sistem de puncte materiale.

Se precizează că sistemele de puncte materiale sînt considerate deformabile, şi ca atare rezultatele obţinute pot fi utile nu numai mecanicii solidului, ci şi altor mecanici. De altfel, teoremele generale reprezintă şi o importantă punte de legătură între mecanică şi alte discipline.

Se mai precizează şi cu acest prilej că teoremele sînt valabile pentru mişcări raportate la repere inerţiale, iar în cazul cînd se va considera un reper imobil, trebuie să se înţeleagă că acest reper este în repaus faţă de un reper inerţial.

Scanned with OKEN Scanner

B. TEOREMELE CANTITĂȚII DE MIȘCARE

§ 126. Impuls. Cantitatea de mișcare

a. Mecanica este prima dintre științele naturii care prezintă și folosește o serie de mărimi ce oglindesc însușiri ale materiei și caracteristici importante ale mișcării ei, cum sînt : *masa gravifică*, *masa inertă*, *forța*, *impulsul*, *cantitatea de mișcare*, *momentul cinetic*, *lucrul mecanic*, *energia cinetică*, *energia potențială* etc. Toate aceste mărimi, măsuri, ale unor procese fizice, sînt întîlnite și în alte domenii ale științelor naturii, unde se studiază alte forme de mișcare, forme complexe, care, după cum se știe, cuprind și forma cea mai simplă : mișcarea mecanică.

Uneori, aceste mărimi sînt definite numai sub aspectul lor matematic, prin cîte o ecuație, ceea ce duce la neglijarea fenomenului care se reflectă în ecuație și permite ca, prin formalism matematic, să se alunece spre interpretări idealiste.

În cele ce urmează se va căuta ca, pe baza unor exemple simple, alese din mecanică, să se prezinte și mărimile încă nedefinite, prin asocierea lor cu anumite procese sau fenomene pe care aceste mărimi le caracterizează.

b. **Exemplu.** Se presupune existența unui solid rigid S, de masă M, cu centrul de masă în O, izolat în spațiu, și care se mișcă astfel încît triedrul $Oxyz$, invariabil legat de solid, rămîne un reper inerțial. Se consideră un punct material P, de masă m, cu totul neglijabilă față de M, astfel încît să nu poată influența în nici un moment mișcarea lui S. Dacă P se găsește foarte departe de S, nici mișcarea lui nu este influențată de S, în care caz P are, în raport cu $Oxyz$, o mișcare uniformă (rectilinie și cu viteză constantă).

Însă dacă S și P se interacționează, mișcarea lui P în raport cu $Oxyz$ (care poate fi considerat imobil) se modifică în fiecare moment. Se știe că forța $\bar{F}$ (fig. 319, *a*) este o caracteristică a interacțiunii, însă că nu epuizează acest proces complex care se produce în spațiu și în timp.

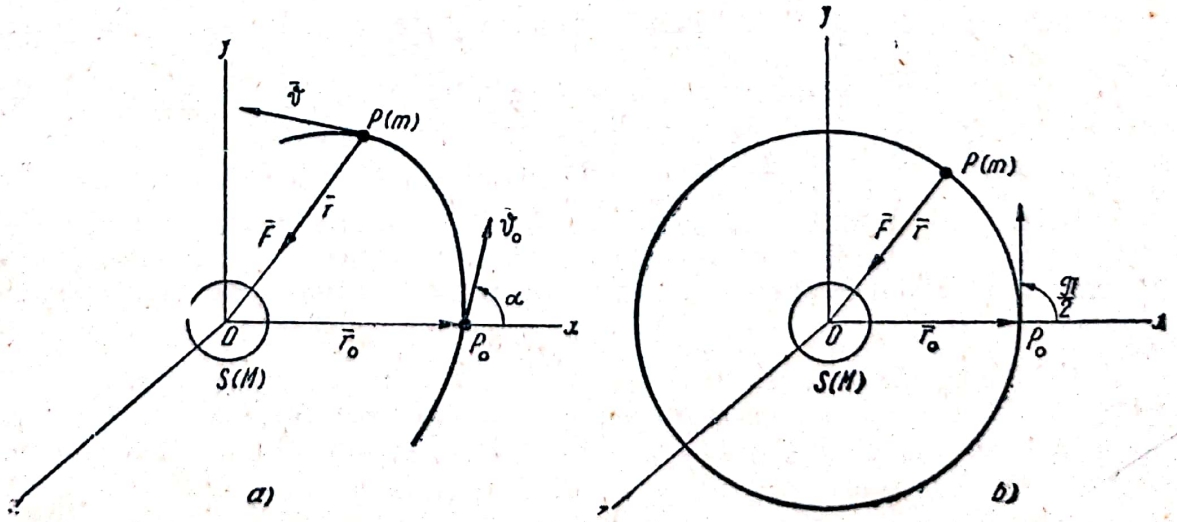


Fig. 319

În adevăr, interacţiunea dintre S şi P, un sistem de două puncte materiale, se manifestă, *între altele*, prin :

— modificarea mişcării mecanice a punctului material P (aspectul mecanic al interacţiunii);

— modificarea formei sistemului de puncte materiale (S, P), adică prin *deformaţia sistemului* (considerat ca unul din aspectele nemecanice ale interacţiunii) (v. § 6).

Este posibil ca, în anumite condiţii speciale, interacţiunea să se manifeste numai sub aspectul mecanic.

Astfel :

— dacă S şi P se atrag după legea gravitaţiei universale şi

— dacă, în momentul iniţial $t = 0$, $\bar{r}_0$, $\bar{v}_0$, m fiind mărimile de stare ale punctului P cînd trece prin P_0 pe Ox (fig. 319,*b*), $|\bar{v}_0| = \sqrt{\frac{kM}{|\bar{r}_0|}}$, iar $\sphericalangle(\bar{r}_0, \bar{v}_0) = \frac{\pi}{2}$, unde k este constanta gravitaţiei; s-a arătat, la § 104, *b*, că P descrie, în planul ($\bar{r}_0$, $\bar{v}_0$), un cerc cu centrul în O şi cu raza $|\bar{r}_0|$.

În aceste condiţii, forma sistemului nu se mai modifică, iar interacţiunea are ca efect numai modificarea mişcării mecanice a punctului material P şi care se studiază cu ecuaţia fundamentală :

$$\bar{F} = m\,\bar{a} = m\,\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}.$$

În ipoteza că m este constant, ecuaţia devine :

$$\bar{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\,(m\bar{v}) \tag{13.5}$$

şi poate fi interpretată ca o legătură între cauză şi efect, reflectînd astfel unul din aspectele procesului fizic de interacţiune. În adevăr, prima parte $\bar{F}\mathrm{d}t$, legînd forţa, o caracteristică a interacţiunii, de timp, dă una din *măsurile interacţiunii:* **implusul.** Partea a doua este diferenţiala unei cantităţi $m\bar{v}$ care leagă între ele două din mărimile de stare ale punctului material.

Această mărime, denumită **cantitatea de mişcare,** este o *măsură a mişcării mecanice a punctului material.*

În consecinţă, ecuaţia (13.5) exprimă faptul că *impulsul elementar* ($\bar{F}\mathrm{d}t$) are ca efect transmiterea de la O la P a mişcării mecanice care se traduce prin *modificarea cantităţii de mişcare* a punctului P, adică prin $\mathrm{d}(m\bar{v})$.

c. **Definiţii. 1° Impulsul forţei** *este o măsură a acţiunii unui punct material asupra altui punct material, într-un interval de timp, care caracterizează* **transmiterea mişcării mecanice** *şi se exprimă prin produsul forţei şi timpul de acţionare.*

2° **Cantitatea de mişcare** *a unui punct material de masă m şi viteză* $\bar{v}$ *este una din măsurile mişcării mecanice şi caracterizează* **capacitatea mişcării de a se transmite** *unui alt punct material, tot sub formă de mişcare mecanică, şi se exprimă prin* $m\bar{v}$.

Această definiţie a fost dată de Engels.

Scanned with OKEN Scanner

d. **Teorema cantității de mișcare.** Dacă se presupune cunoscută expresia forței $\bar{F}$ în funcție de t și se integrează ecuația (13.5) pentru intervalul de timp $t' - t$, se obține teorema cantității de mișcare a punctului material:

$$m\bar{v}' - m\bar{v} = \int_t^{t'} \bar{F}\mathrm{d}t, \tag{13.6}$$

adică: *Variația cantității de mișcare a unui punct material, acționat un interval de timp de o forță, este egală cu impulsul total al forței, corespunzător intervalului de timp considerat.*

e. *Observații și consecințe.* 1° În disciplinele care folosesc rezultatele mecanicii, starea unui punct material și în general a unui sistem fizic se caracterizează prin *poziție* ($\bar{r}$), *cantitate de mișcare* ($m\bar{v}$) și *masă* m (gravifică sau inertă) care poate fi variabilă.

2° Ecuația (13.5), scrisă sub forma:

$$\frac{\mathrm{d}(m\bar{v})}{\mathrm{d}t} = \bar{F}, \tag{13.7}$$

permite extinderea ecuației fundamentale a mecanicii newtoniene și la corpul cu masă variabilă.

3° Dacă punctul material de masă m este izolat sau este acționat, un interval de timp $t' - t$, de forțe care se echilibrează, cantitatea de mișcare a punctului material *se conservă* în intervalul de timp considerat, adică $m\bar{v}' = m\bar{v}$.

4° Dacă în (13.6) se pune condiția inițială, ca la momentul $t = 0$, $\bar{v} = 0$, se ajunge la ecuația:

$$m\bar{v}' = \int_0^{t'} \bar{F}\mathrm{d}t,$$

folosită, uneori, pentru a denumi *impuls* mărimea $m\bar{v}$, evitîndu-se denumirea de *cantitate de mișcare.* Însă în acest fel se transformă o teoremă sau o lege, care exprimă o relație de cauzalitate, într-o expresie de definiție.

Ecuația precedentă, ca și (13.6) din care provine, reflectă modificările care se produc într-un proces fizic, și nu un mijloc de a defini una din mărimi prin alta.

5° Se înțelege că din punctul de vedere al dimensiunilor, ambele mărimi au aceeași ecuație de dimensiuni:

$$[mv] = [Ft] = [MLT^{-1}].$$

6° În sistemul MKS, unitatea de măsură pentru impuls este Ns, *newton-secunda*, iar pentru cantitatea de mișcare $\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}}$, *kilogram*[1] *metru pe secundă.*

[1] Unitate de masă.

În sistemul CGS, unitatea de măsură pentru impuls este dyn·s, *dyna-secundă*, iar pentru cantitatea de mişcare $\frac{gcm}{s}$, *gram*[1] *centimetru pe secundă*. În sistemul MKfS, impulsul se măsoară în kgfs, *kilogram-forţă-secundă*, iar pentru cantitatea de mişcare ar trebui folosită o expresie în care să intervină unitatea tehnică de masă (u), de exemplu: $\frac{um}{s}$, şi nu unitatea de măsură pentru impuls (kgfs).

§ 127. Teorema variaţiei cantităţii de mişcare a unui sistem de puncte materiale

a. Se consideră un sistem de n (finit) puncte materiale, M_i, de mase m_i, acţionat de sistemul de forţe exterioare $\bar{F}_i$ şi de sistemul de forţe interioare $\bar{F}_{ij}$, $(i, j = 1, 2, 3, ..., n)$. Se precizează că $\bar{F}_i$ reprezintă rezultanta forţelor exterioare date şi de legătură acţionînd punctul M_i, iar $\bar{F}_{ij}$ este acţiunea punctului material M_j asupra lui M_i (fig. 320). În aceste condiţii se înţelege că $\bar{F}_{ii} = 0$, iar că:

$$\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0$$

în virtutea principiului egalităţii acţiunii şi reacţiunii (v. § 8).

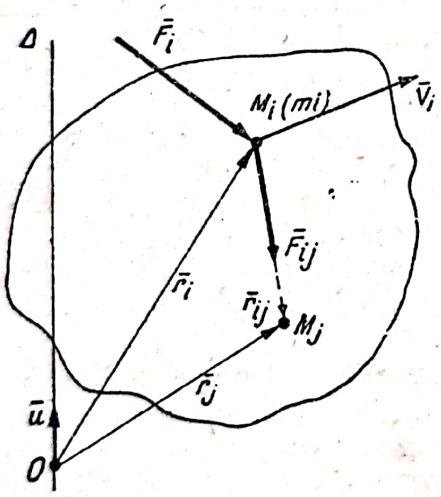


Fig. 320

Definiţie. *Cantitatea de mişcare a unui sistem de puncte materiale este suma vectorială a cantităţilor de mişcare ale tuturor punctelor sistemului.*

Astfel că:

$$\bar{H} = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i,$$

unde $\bar{H}$ este notaţia curentă pentru cantitatea de mişcare a unui sistem material oarecare.

b. **Teorema cantităţii de mişcare.** *Derivata în raport cu timpul a cantităţii de mişcare a unui sistem de puncte materiale este egală cu suma vectorială a forţelor exterioare care acţionează, în momentul considerat, asupra sistemului.*

Pentru demonstraţie, se exprimă ecuaţia (13.3) sub forma:

$$\frac{d}{dt}(m_i\bar{v}_i) = \bar{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij}, \quad (\bar{F}_{ii} = 0) \tag{13.8}$$

şi se însumează toate ecuaţiile pentru cele n puncte materiale:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij}.$$

[1] Unitate de masă.

Deoarece suma dublă din partea a II-a cuprinde toate forţele interioare sistemului :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{F}_{ij}=0,$$

în consecinţă :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}m_i\bar{v}_i=\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i, \tag{13.9}$$

sau

$$\dot{\bar{H}}=\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i.$$

c. *Observaţii.* 1° Scriind (13.9) sub forma :

$$\mathrm{d}\sum_{i=1}^{n}m_i\bar{v}_i=\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i\mathrm{d}t, \tag{13.10}$$

teorema se mai enunţă astfel :

Diferenţiala cantităţii de mişcare a unui sistem de puncte materiale acţionat un timp dt *de forţe este egală cu suma vectorială a impulsurilor elementare ale forţelor exterioare aplicate sistemului.*

2° Teorema demonstrată pentru un sistem de puncte materiale se extinde şi asupra unui continuu material.

3° Teorema este valabilă, se înţelege, şi pentru sistemele materiale deformabile, deoarece nu s-a folosit operaţia de alunecare a forţelor pe suporturile lor, caracteristică sistemelor rigide.

4° Forţele interioare nu influenţează asupra cantităţii de mişcare a unui sistem material.

§ 128. Teorema conservării cantităţii de mişcare

a. *Dacă forţele exterioare sînt nule* (sistemul de puncte materiale este izolat) *sau dacă forţele exterioare au o sumă vectorială nulă:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}m_i\bar{v}_i=0 \quad \text{şi} \quad \sum_{i=1}^{n}m_i\bar{v}_i=\bar{c}; \tag{13.11}$$

deci : *cantitatea de mişcare a sistemului se conservă.*

b. *Observaţii şi consecinţe.* 1° Această teoremă exprimă că (13.11) este o *integrală primă* a sistemului de ecuaţii diferenţiale (13.3) privind mişcarea sistemului de puncte materiale.

2° Proiectînd ecuaţia vectorială (13.9) pe axele triedrului fix *Oxyz*, se obţine ecuaţiile :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}m_iv_{ix}=X,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}m_iv_{iy}=Y,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}m_iv_{iz}=Z. \tag{13.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă sistemul de forţe exterioare, fără a avea o sumă nulă, are proiecţia vectorului sumă pe una din cele trei axe, de pildă pe axa Ox, nulă,

$$H_x = \sum_{i=1}^{n} m_i v_{ix} = c, \tag{13.13}$$

proiecţia cantităţii de mişcare a sistemului pe această axă se conservă.

Această observaţie va fi utilă pentru cazul cînd forţele exterioare sînt paralele cu o direcţie anumită, cum este cazul cînd forţele exterioare sînt numai greutăţi, iar mişcarea are loc perpendicular pe această direcţie.

3° Teorema conservării cantităţii de mişcare, aplicată unui sistem izolat de două puncte materiale, care au masele m_1 şi m_2, vitezele din momentul t, $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$, iar cele din momentul $t' > t$, $\bar{v}'_1$ şi $\bar{v}'_2$, se exprimă prin :

$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = \bar{C} = m_1\bar{v}'_1 + m_2\bar{v}'_2.$$

Relaţia, scrisă sub forma :

$$m_2(\bar{v}'_2 - \bar{v}_2) = -m_1(\bar{v}'_1 - \bar{v}_1),$$

se interpretează astfel : *Modificarea într-un sens a cantităţii de mişcare a unui punct material este o consecinţă a modificării egale şi în sens contrar a cantităţii de mişcare a celuilalt punct material.* Această interpretare justifică definiţia dată de Engels cantităţii de mişcare.

§ 129. Teorema mişcării centrului de masă

a. Se ştie că poziţia centrului de masă al unui sistem de puncte materiale M_i, de mase m_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, în raport cu un reper cu originea în O (fig. 321), este dată de relaţia (5.7) (§ 53) :

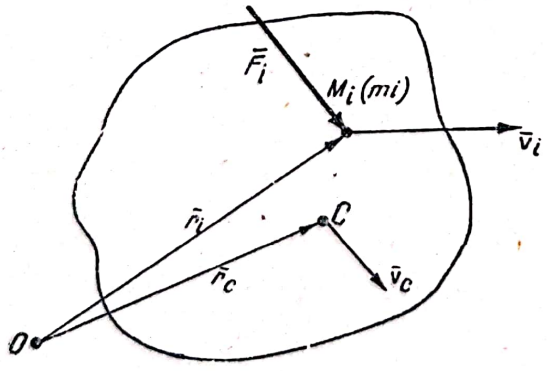


Fig. 321

$$m\bar{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i \quad \text{unde} \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Derivînd în raport cu timpul, se găseşte :

$$m\bar{v}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{v}_i = \bar{H}; \tag{13.14}$$

deci : *Cantitatea de mişcare a unui sistem de puncte materiale este egală cu cantitatea de mişcare a unui punct material în care ar fi concentrată masa sistemului şi care ar coincide cu centrul de masă al sistemului.*

Derivînd relaţia (13.14) în raport cu timpul:

$$m\dot{\bar{v}}_c = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i,$$

se găseşte relaţia:

$$m\bar{a}_c = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i, \tag{13.15}$$

care reprezintă **teorema mişcării centrului de masă al sistemului:**

Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale se mişcă întocmai ca un punct material care ar avea masa egală cu masa sistemului şi asupra căruia ar acţiona toate forţele exterioare aplicate sistemului.

b. *Observaţii şi consecinţe.* 1° Forţele interioare nu influenţează mişcarea centrului de masă.

2° Dacă centrul de masă al unui sistem de puncte materiale este fix, cantitatea de mişcare a sistemului este nulă, oricum s-ar mişca sistemul.

3° Teorema mişcării centrului de masă justifică aproximaţia care se face, într-un prim studiu al mişcării unui sistem material, prin asimilarea lui cu un punct material avînd ca masă masa sistemului.

În acest fel studiul, neglijînd mişcarea sistemului în raport cu un reper legat de centrul de masă, stabileşte totuşi un rezultat exact, acela al mişcării centrului de masă al sistemului.

4° Dacă un solid rigid are o mişcare de translaţie, mişcarea lui este determinată dacă se cunoaşte mişcarea unui singur punct, de pildă mişcarea centrului său de masă.

5° Dacă sistemul de puncte materiale este izolat sau dacă forţele exterioare au o sumă nulă, centrul de masă are o mişcare uniformă sau, dacă se află în repaus în raport cu un reper inerţial, el rămîne mai departe în repaus.

6° Dacă sistemul de puncte materiale este acţionat numai de atracţia Pămîntului, centrul de masă se va mişca pe o parabolă dacă viteza lui iniţială avea o componentă orizontală, dacă nu, el se va mişca pe verticală.

7° **Exemple.** α) Dacă un proiectil, presupus lansat în vid, ar exploda, centrul de masă al schijelor s-ar mişca mai departe pe parabolă ca şi cum nu s-ar fi produs explozia.

β) Un patinator stă în picioare în repaus pe gheaţă. În ipoteza că rezistenţa aerului şi frecarea dintre patine şi gheaţă nu ar exista, patinatorul nu ar putea înainta, el ar putea doar să-şi deplaseze centrul său de masă pe verticală. Astfel, dacă ar înainta cu un picior, celălalt i-ar aluneca înapoi.

Scanned with OKEN Scanner

§ 130. Aplicaţii

1° Un corp solid, de greutate $\bar{G}_1$, aşezat pe un plan orizontal, este acţionat de greutatea $\bar{G}_2$ prin mijlocirea unui fir, de greutate neglijabilă, petrecut peste un mic scripete (fig. 322). Dacă μ este coeficientul de frecare dintre corp şi planul orizontal, se cere să se calculeze acceleraţia cu care se mişcă sistemul şi tensiunea din fir.

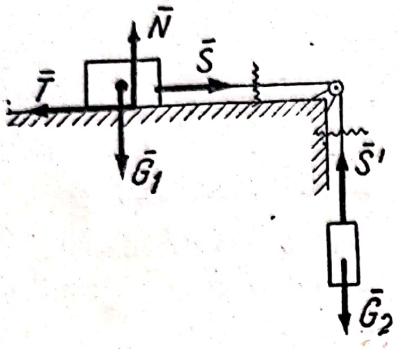


Fig. 322

Rezolvare. Corpurile au mişcări de translaţie, ele pot fi asimilate cu puncte materiale, de mase m_1 şi m_2. Prin tăierea firului şi introducerea forţei de legătură interioară se izolează punctele materiale, obţinîndu-se ecuaţiile scalare:

$$m_1 a = S - T; \quad m_2 a = m_2 g - S;$$

însă:

$$T = \mu N = \mu G_1 = \mu m_1 g,$$

unde a este valoarea acceleraţiei în raport cu axa mişcării; S, T şi N sînt valorile: a efortului din fir, a forţei de frecare la alunecare şi a reacţiunii normale. Soluţia sistemului de ecuaţii este:

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g, \quad S = \frac{(1 + \mu) m_1 m_2}{m_1 + m_2} g, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1} - \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)\frac{a}{g},$$

ultima relaţie poate fi folosită la determinarea coeficientului de frecare la alunecare după ce se măsoară acceleraţia a.

Prima relaţie s-ar putea obţine imediat, imaginînd un sistem de două puncte materiale de mase m_1 şi m_2, legate printr-un fir, şi acţionat numai de forţele T şi $m_2 g$ în direcţia firului. Se aplică teorema variaţiei cantităţii de mişcare:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1 v + m_2 v) = m_2 g - \mu m_1 g,$$

de unde:

$$(m_1 + m_2) a = m_2 g - \mu m_1 g.$$

2° De pe un cărucior de masă M, iniţial în repaus pe un plan orizontal, se lansează cu viteza $\bar{v}$, paralelă cu planul orizontal, un corp de masă m (fig. 323). Neglijînd rezistenţa aerului şi frecările, să se calculeze viteza căruciorului.

Rezolvare. Se notează cu $\bar{V}$ viteza căruciorului şi, deoarece nu se cunoaşte sensul mişcării, se presupune că este acelaşi cu sensul în care se mişcă corpul lansat. Deoarece $\bar{v}$ este viteza relativă a corpului, viteza sa absolută, exprimată în raport cu axa Ox, va fi:

$$v_a = V + v.$$

Se observă că forţele exterioare, acţiuni şi reacţiuni, au o sumă nulă, şi se aplică teorema de conservare a cantităţii totale de mişcare:

$$MV + m(V + v) = \text{const.}$$

Constanta este nulă, deoarece sistemul era în repaus în momentul iniţial ($v_0 = 0$, $V_0 = 0$).

Deci:

$$V = -\frac{mv}{M + m}.$$

Semnul precizează sensul de mişcare al căruciorului, care este contrar celui presupus la început. Acest exemplu explică, pe baza conservării cantităţii de mişcare a unui sistem material, principiul de funcţionare al rachetelor.

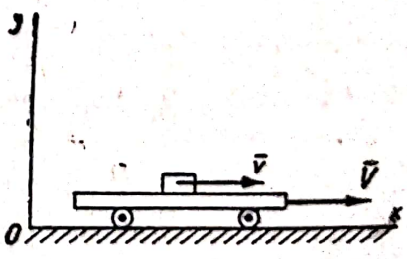


Fig. 323

3° O barcă de lungime l și de masă M, cu axa longitudinală perpendiculară pe mal, se află în repaus (fig. 324, *a*). Un om de masă m, în repaus la capătul cel mai depărtat de mal al bărcii, pornește spre mal. Dacă se neglijează rezistența apei la deplasarea bărcii, să se calculeze deplasarea ei cînd omul atinge capătul dinspre mal al bărcii.

Rezolvare. Avînd în vedere că toate forțele exterioare, inclusiv reacțiunile, au o sumă nulă, centrul de masă al sistemului barcă-om rămîne nemișcat. Notînd cu d distanța pînă la mal a centrului de masă și cu x deplasarea bărcii (fig. 324, *b*), se aplică teorema momentelor statice față de verticala malului:

$$(M+m)\,d = M\frac{l}{2} + ml = M\left(x+\frac{l}{2}\right) + mx,$$

de unde:

$$x = \frac{ml}{M+m}.$$

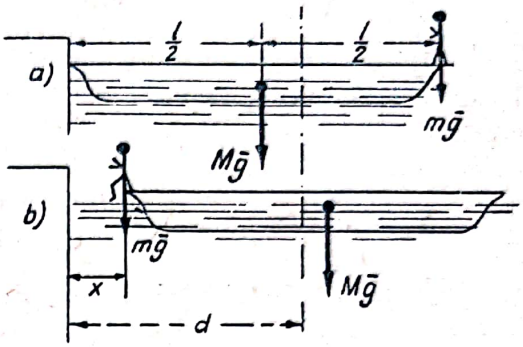


Fig. 324

C. TEOREMELE MOMENTULUI CINETIC

§ 131. Moment cinetic. Moment de inerție

a. **Definiții.** 1° *Momentul cinetic al unui punct material, în raport cu un punct fix sau cu o axă fixă, este momentul cantității de mișcare a punctului material în raport cu punctul sau axa considerată.*

Dacă punctul fix este originea unui sistem de referință $Oxyz$, iar $\bar{u}$ este versorul axei fixe (Δ) care trece prin O (fig. 325), momentul cinetic al punctului material M de masă m și viteză $\bar{v}$, în raport cu O, se exprimă prin $\bar{r} \times m\bar{v}$, iar în raport cu (Δ), valoarea momentului cinetic este $(\bar{r} \times m\bar{v})\bar{u}$, $\bar{r}$ fiind vectorul de poziție al punctului material.

2° Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale, în raport cu un punct sau cu o axă, este suma vectorială a momentelor cinetice ale punctelor sistemului în raport cu punctul sau axa considerată, adică:

$$\bar{K}_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i, \qquad (13.16)$$

$$K_\Delta = \sum_{i=1}^{n} (r_i \times m_i\bar{v}_i)\,\bar{u}, \qquad (13.17)$$

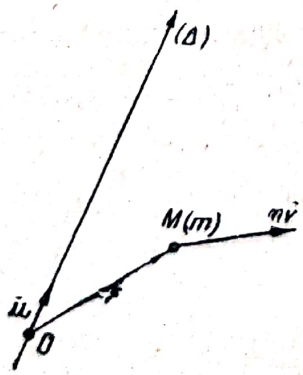


Fig. 325

unde $\bar{K}_o$ este momentul cinetic al sistemului în raport cu O, K_Δ este valoarea momentului cinetic al sistemului în raport cu (Δ), iar celelalte notații sînt corespunzătoare figurii 320.

b. **Observații și consecințe.** 1° Momentul cinetic în raport cu O, al unui sistem nedeformabil de

puncte materiale, în mişcare de translaţie, faţă de un reper fix cu originea în O, este:

$$\bar{K}_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (m_i \bar{r}_i) \times \bar{v}_c = m\bar{r}_c \times \bar{v}_c = \bar{r}_c \times m\bar{v}_c = \bar{r}_c \times \bar{H},$$

unde $\bar{v}_c$ este viteza centrului de masă. Rezultatul exprimă că momentul cinetic al sistemului este egal cu momentul cinetic al unui punct material care coincide cu centrul de masă şi în care s-ar concentra toată masa sistemului.

2° Dacă sistemul nedeformabil de puncte materiale este în mişcare de rotaţie în jurul unei axe (Δ), mişcare determinată prin vectorul $\bar{\omega}$ de pe (Δ), momentul cinetic al sistemului în raport cu un punct O al axei (Δ) este:

$$\bar{K}_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i)$$

sau, după dezvoltarea dublului produs vectorial:

$$\bar{K}_o = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right) \bar{\omega} - \sum_{i=1}^{n} m_i (\bar{r}_i \bar{\omega}) \bar{r}_i. \tag{13.18}$$

Valoarea momentului cinetic în raport cu axa (Δ) se calculează cu:

$$K_\Delta = \bar{K}_o \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|},$$

adică:

$$K_\Delta = \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i \right) \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} = \frac{1}{|\bar{\omega}|} \sum_{i=1}^{n} m_i (\bar{r}_i \times \bar{v}_i) \bar{\omega} = \frac{1}{|\bar{\omega}|} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2.$$

Cum: $v_i^2 = R_i^2 \omega^2$, unde R_i este raza cercului descris de M_i în jurul axei(Δ), sau distanţa punctului la axa (Δ), rezultă:

$$K_\Delta = \frac{\omega^2}{|\bar{\omega}|} \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2. \tag{13.19}$$

3° Sumele:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J_o \quad \text{şi} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = J_\Delta \tag{13.20}$$

întîlnite la (13.18) şi (13.19) se numesc *momente de inerţie* ale unui *sistem nedeformabil de puncte materiale* în raport cu un punct O, respectiv în raport cu o axă (Δ).

În general, momentul de inerţie al unui sistem material este o sumă de produse dintre masele punctelor sistemului şi pătratele distanţelor lor pînă la un punct fix *(moment de inerţie polar)*, sau pînă la o axă fixă *(moment de inerţie axial)*, sau pînă la un plan fix *(moment de inerţie planar)*.

Momentul de inerţie este o mărime care împreună cu momentul static (v. § 53) exprimă, în moduri diferite, distribuţia masei sistemului material faţă de reperul considerat.

La § 132 se defineşte momentul de inerţie axial J_Δ ca *măsura inerţiei solidului rigid în mişcarea de rotaţie în jurul axei* (Δ). În calcule, momentul

de inerţie intervine ca o mărime scalară pozitivă. În aplicaţii se întîlnesc mai des momentele de inerţie axiale.

4° Expresia (13.19) se mai poate scrie sub forma : $K_\Delta = \frac{\omega^2}{|\bar{\omega}|} J_\Delta$, şi cum momentul cinetic în raport cu axa (Δ) este un vector coliniar cu axa :

$$\bar{K}_\Delta = K_\Delta \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} = J_\Delta \bar{\omega}, \tag{13.21}$$

rezultă că pentru a exprima *momentul cinetic al sistemului nedeformabil în mişcare de rotaţie în jurul axei* Δ ($\vec{\omega}$) *se amplifică vectorul* $\bar{\omega}$ *prin* J_Δ.

5° Ecuaţia de dimensiuni a momentului cinetic este :

$$[K] = [ML^2 T^{-1}],$$

iar a momentului de inerţie :

$$[J] = [ML^2].$$

6° Unitatea de măsură, în sistemul MKS, pentru momentele cinetice este $\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$, *kilogram*[1] *metru pătrat pe secundă*, iar pentru momentele de inerţie kg m^2, *kilogram*[1] *metru pătrat*. În sistemul CGS unitatea de măsură pentru momentele cinetice este $\frac{\text{g cm}^2}{\text{s}}$, *gram*[1] *centimetru pătrat pe secundă*, iar pentru momentele de inerţie gcm^2, *gram*[1] *centimetru pătrat*. În sistemul MKfS, unitatea de măsură pentru momentele cinetice este $\frac{\text{u m}^2}{\text{s}}$, iar pentru momentele de inerţie um^2, u fiind unitatea tehnică de masă.

7° Calculul expresiilor analitice, raportate la triedrul tridreptunghic *Oxyz*, se face folosind expresiile complexe ale vectorilor care intervin în relaţiile vectoriale.

Astfel, pentru calculul valorilor K_x, K_y, K_z ale componentelor momentului cinetic $\bar{K}_o$ al unui sistem nedeformabil de puncte materiale M_i ($\bar{r}_i$), $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, în mişcare de rotaţie faţă de o axă Δ ($\bar{\omega}$), în raport cu axele triedrului tridreptunghic *Oxyz*, unde *O* este un punct pe (Δ), se folosesc expresiile complexe :

$$\bar{r}_i = x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k}; \quad \bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k},$$

care înlocuite în (13.18) dau :

$$\begin{aligned} K_x &= \omega_x \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i, \\ K_y &= \omega_y \sum_{i=1}^{n} m_i (z_i^2 + x_i^2) - \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i - \omega_x \sum_{i=1}^{n} m_i y_i x_i, \\ K_z &= \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) - \omega_x \sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i - \omega_y \sum_{i=1}^{n} m_i z_i y_i. \end{aligned} \tag{13.22}$$

[1] Unitate de masă.

Se notează cu:

$$J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i(z_i^2 + x_i^2), \quad J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

momentele de inerţie ale sistemului în raport cu axele Ox, Oy şi Oz, iar cu:

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i, \; J_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i, \quad J_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i,$$

$$J_{yx} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i x_i, \quad J_{zy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i y_i, \quad J_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i,$$

expresii denumite *produse de inerţie în raport cu planele* triedrului $Oxyz$, luate două cîte două. Cu aceste notaţii, expresiile (13.22) devin:

$$\begin{aligned} K_x &= J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z, \\ K_y &= J_y\,\omega_y - J_{yz}\omega_z - J_{yx}\omega_x, \\ K_z &= J_z\omega_z - J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y. \end{aligned} \tag{13.23}$$

8° Definiţiile date pentru un sistem de puncte materiale pot fi extinse şi asupra unui continuu material. Momentele şi produsele de inerţie sînt studiate la § 144.

§ 132. Teorema variaţiei momentului cinetic

a. *Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui punct material, faţă de un punct fix sau faţă de o axă fixă, este egală cu momentul, faţă de punct sau axă, al rezultantei forţelor aplicate punctului material.*

În adevăr:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \dot{\bar{r}} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\dot{\bar{v}} = \bar{v} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\bar{a} = \bar{r} \times \overline{F} \tag{13.24}$$

şi la fel pentru momentul cinetic faţă de axa (Δ) (fig. 325):

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v})\,\bar{u} = (\bar{r} \times \overline{F})\,\bar{u}. \qquad \text{c.c.t.d.} \tag{13.25}$$

b. În cazul unui sistem de puncte materiale M_i, de mase m_i, în poziţiile determinate, în raport cu reperul cu originea în O, prin $\bar{r}_i$ (fig. 320), acţionate de forţele exterioare $\overline{F}_i$ şi de forţele interioare $\overline{F}_{ij}$, unde $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$, se poate scrie, în baza ecuaţiei (13.24):

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i) = \bar{r}_i \times \overline{F}_i + \bar{r}_i \times \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_{ij}. \tag{13.26}$$

Se adună toate ecuaţiile (13.26) cu valorile indicelui i de la 1, 2, 3, pînă la n:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i = \dot{\bar{K}}_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \overline{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_{ij} \qquad (\overline{F}_{ii} = 0)$$

și se observă că suma dublă este nulă, deoarece se compune din termeni de forma: $\bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} + \bar{r}_j \times \bar{F}_{ji}$, care toți sînt nuli. În adevăr:

$$\bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} + \bar{r}_j \times \bar{F}_{ji} = \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} + (\bar{r}_i + \bar{r}_{ij}) \times (-\bar{F}_{ij}) = -\bar{r}_{ij} \times \bar{F}_{ij} = 0,$$

deoarece $\bar{r}_{ij}$ și $\bar{F}_{ij}$ sînt coliniari.

În concluzie:

$$\dot{\bar{K}}_o = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \bar{M}_o, \tag{13.27}$$

iar ca o consecință:

$$\dot{\bar{K}}_o \bar{u} = \dot{K}_\Delta = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i)\, \bar{u} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times \bar{F}_i)\, \bar{u} = M_\Delta \tag{13.28}$$

sau în exprimare vectorială:

$$\dot{\bar{K}}_\Delta = \bar{M}_\Delta, \tag{13.29}$$

unde $\bar{M}_o$ și $\bar{M}_\Delta$ sînt respectiv momentele rezultante, față de punctul O sau de axa Δ, ale forțelor exterioare aplicate sistemului de puncte materiale.

Ecuațiile (13.27) și (13.29) exprimă teorema momentului cinetic al cărui enunț este:

Derivata, în raport cu timpul, a momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale, față de un punct fix sau față de o axă fixă, este egală cu momentul rezultant, față de punct sau axă, al forțelor exterioare aplicate sistemului de puncte materiale.

Teorema se poate enunța și astfel:

Diferențiala momentului cinetic, în raport cu un punct fix sau o axă fixă, al unui sistem de puncte materiale, acționat de forțe un timp dt, *este egală cu momentul rezultant, față de punct sau axă, al impulsurilor elementare ale forțelor exterioare aplicate sistemului.*

c. *Observații și consecințe.* 1° Forțele interioare nu influențează asupra momentului cinetic al sistemului de puncte materiale.

2° Dacă sistemul de puncte materiale este nedeformabil, mișcarea de rotație a sistemului în jurul unei axe fixe (Δ) se poate studia cu ajutorul teoremei momentului cinetic. Comparînd derivata expresiei (13.21) cu (13.29), se obține:

$$J_\Delta \dot{\bar{\omega}} = \bar{M}_\Delta, \tag{13.30}$$

care reprezintă teorema momentului cinetic pentru un sistem nedeformabil în mișcare de rotație.

Deoarece toți vectorii $\bar{\omega}$, $\dot{\bar{\omega}}$ și $\bar{M}_\Delta$ sînt coliniari, se folosește teorema sub forma scalară:

$$J_\Delta \dot{\omega} = M_\Delta. \tag{13.31}$$

Aceasta este ecuația fundamentală a mișcării solidului rigid cu axa (Δ) *fixă.*

Ea îndeplinește în mișcarea de rotație același rol ca și ecuația: $m\bar{a} = \bar{F}$, în mișcarea de translație a solidului rigid.

3° După cum m, masa solidului rigid, este măsura inerţiei lui în mişcarea de translaţie rectilinie, tot astfel şi J_Δ, momentul de inerţie în raport cu axa (Δ), este *măsura inerţiei solidului rigid în mişcarea de rotaţie în jurul axei* (Δ).

4° Teorema variaţiei momentului cinetic a fost stabilită faţă de un reper fix cu originea în O.

d. Se demonstrează că teorema este valabilă şi faţă de un reper mobil cu originea în C, centrul de masă al sistemului de puncte materiale, însă cu axele paralele cu cele ale reperului fix. Se notează cu $\bar{r}_i$ vectorul de poziţie al punctului M_i de masă m_i, cu $\bar{r}_c$ vectorul de poziţie al centrului de masă în raport cu reperul fix şi cu $\bar{\rho}_i$ vectorul de poziţie al punctului M_i în raport cu reperul mobil cu originea în C (fig. 326).

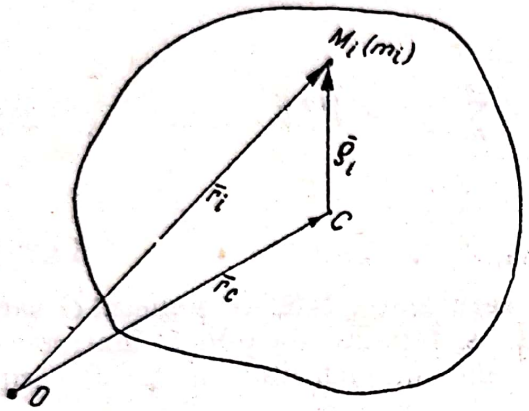


Fig. 326

În primul rînd se calculează momentul cinetic al sistemului faţă de O:

$$\bar{K}_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \dot{\bar{r}}_i .$$

Cum: $\bar{r}_i = \bar{r}_c + \bar{\rho}_i$, $\dot{\bar{r}}_i = \bar{v}_c + \dot{\bar{\rho}}_i$, unde, din cauză că sistemul mobil este în translaţie în raport cu cel fix, $\dot{\bar{\rho}}_i$ este viteza relativă a punctului M_i faţă de reperul mobil, se obţine:

$$\bar{K}_o = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_c + \bar{\rho}_i) \times m_i (\bar{v}_c + \dot{\bar{\rho}}_i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_c \times m_i \bar{v}_c + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_c \times m_i \dot{\bar{\rho}}_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i \times m_i \bar{v}_c + \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\rho}}_i ,$$

$$\bar{K}_o = \bar{r}_c \times \bar{v}_c \sum_{i=1}^{n} m_i + \bar{r}_c \times \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{\rho}} + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\rho}_i \right) \times \bar{v}_c + \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\rho}}_i , \qquad (13.32)$$

şi deoarece: $\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\rho}_i = 0$, de asemenea: $\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{\rho}}_i = 0$,

rezultă:

$$\bar{K}_o = \bar{r}_c \times m\bar{v}_c + \bar{K}_c , \qquad (13.33)$$

unde ultimul termen din (13.32), momentul cinetic al sistemului faţă de reperul mobil s-a notat cu $\bar{K}_c$. Deci:

Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale faţă de un punct fix este egal cu momentul cinetic al centrului de masă în care ar fi concentrată masa sistemului, adunat cu momentul cinetic al sistemului în mişcarea sa în raport cu un reper cu originea în centrul de masă şi cu axele paralele cu cele ale reperului fix.

Aceasta este una din teoremele lui *Koenig* [1] (teorema I).

În continuare, se derivează ecuaţia (13.33) în raport cu timpul:

$$\dot{\bar{K}}_o = \dot{\bar{r}}_c \times m\bar{v}_c + \bar{r}_c \times m\dot{\bar{v}}_c + \dot{\bar{K}}_c = \bar{r}_c \times m\bar{a}_c + \dot{\bar{K}}_c . \qquad (13.34)$$

[1] S. Koenig (1712—1757), matematician olandez.

Se ţine seama de (13.27), în care se înlocuieşte $\bar{r}_i = \bar{r}_c + \bar{\rho}_i$, astfel încît:

$$\dot{\bar{K}}_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_c + \bar{\rho}_i) \times \bar{F}_i = \bar{r}_c \times \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i \times \bar{F}_i .$$

Pe de altă parte, folosind teorema mişcării centrului de masă (13.15), relaţia precedentă devine:

$$\dot{\bar{K}}_o = \bar{r}_c \times m\bar{a}_c + \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i \times \bar{F}_i . \qquad (13.35)$$

Din compararea relaţiilor (13.34) cu (13.35) se găseşte:

$$\dot{\bar{K}}_c = \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i \times \bar{F}_i = \bar{M}_c$$

adică:

Derivata, în raport cu timpul, a momentului cinetic faţă de centrul de masă al sistemului este egală cu momentul rezultant, faţă de centrul maselor, al forţelor exterioare aplicate sistemului.

Aceasta este teorema momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale în raport cu centrul de masă.

§ 133. Teorema conservării momentului cinetic

a. Dacă sistemul de puncte materiale este izolat sau este astfel acţionat încît momentul rezultant, faţă de punctul fix, al forţelor exterioare aplicate sistemului este tot timpul nul:

$$\dot{\bar{K}}_o = 0, \text{ rezultă: } \bar{K}_o = \bar{C},$$

adică: *momentul cinetic al sistemului de puncte materiale faţă de punctul O se conservă.*

b. *Observaţii şi consecinţe.* 1° Această teoremă exprimă cea de-a doua integrală primă a sistemului de ecuaţii diferenţiale (13.3) privind mişcarea sistemului de puncte materiale.

2° *În cazul cînd momentul rezultant al forţelor exterioare aplicate unui sistem de puncte materiale, în raport cu axa* (Δ), *este nul, momentul cinetic al sistemului în raport cu axa* (Δ) *se conservă*:

$$K_\Delta = C.$$

3° Dacă se alege axa (Δ) ca una din axele reperului fix $Oxyz$, de pildă Oz:

$$K_z = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times m_i v_i)\,\bar{k} = \sum_{i=1}^{n} [(x_i\bar{i} + y_i\bar{j} + z_i\bar{k}) \times m_i(\dot{x}_i\bar{i} + \dot{y}_i\bar{j} + \dot{z}_i\bar{k})]\bar{k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i)m_i.$$

Conservarea momentului cinetic faţă de această axă se exprimă prin ecuaţia :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) m_i = C$$

şi ţinînd seama de relaţia (9.33) (§ 100), se ajunge la :

$$2 \sum_{i=1}^{n} m_i \Omega_i = C, \tag{13.36}$$

adică :

Dacă în timpul mişcării unui sistem de puncte materiale momentul rezultant al forţelor exterioare, faţă de o axă fixă, este nul, proiecţiile punctelor sistemului pe un plan perpendicular pe axa fixă se mişcă astfel încît suma produselor maselor punctelor cu vitezele areolare ale proiecţiilor lor, în raport cu intersecţia axei cu planul, este constantă.

Teorema de conservare a momentului cinetic faţă de o axă se mai numeşte din această cauză şi *legea ariilor.*

§ 134. Aplicaţii

1° Să se calculeze momentul de inerţie al unei bare drepte de lungime l, în raport cu unul din capete, ştiind că densitatea ρ variază liniar de la ρ_0 la ρ_1 (fig. 327).

Rezolvare. Se ajunge la : $J_o = \int_{(OA)} x^2 dm = \int_0^l x^2 \rho \, dx$,

în care : $\rho = \rho_0 + \frac{\rho_1 - \rho_0}{l} x$, şi se găseşte :

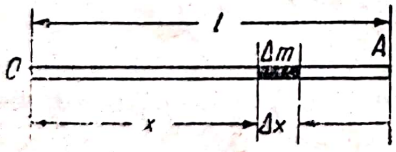


Fig. 327

$$J_o = \frac{\rho_0 + 3\rho_1}{12} l^3 = m \frac{\rho_0 + 3\rho_1}{6(\rho_0 + \rho_1)} l^2,$$

unde :

$$m = \int_0^l \left(\rho_0 + \frac{\rho_1 - \rho_0}{l} x \right) dx = \frac{\rho_0 + \rho_1}{2} l$$

este masa barei.

Dacă bara este omogenă şi toată masa ei este m:

$$\rho_0 = \rho_1 = \frac{m}{l}$$

şi

$$J_o = \frac{ml^2}{3}. \tag{13.37}$$

Observaţii. α) Aceeaşi expresie are şi momentul de inerţie al unei plăci dreptunghiulare omogene de lăţime l, în raport cu axa din O care coincide cu înălţimea dreptunghiului.

β) Dacă se calculează momentul de inerţie al barei în raport cu centrul ei de masă, se găseşte :

$$J_c = \frac{ml^2}{12}. \tag{13.38}$$

2° Să se calculeze momentul de inerţie al unui disc circular omogen de masă M şi rază R în raport cu axa Oz care trece prin centrul O perpendicular pe planul discului (fig. 328).

Rezolvare. Momentul de inerţie în raport cu axa Oz este acelaşi cu momentul de inerţie în raport cu centrul O. Dacă $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ este densitatea discului :

$$J_o = \int_{(A)} r^2 \rho \, dA = \rho \int_{(A)} r^2 \, dA = \rho I_o, \tag{13.39}$$

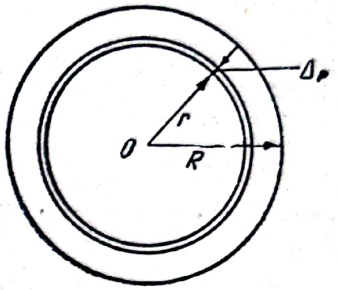


Fig. 328

unde J_o este momentul de inerţie al masei discului (momentul de inerţie *masic*), iar I_o este momentul de inerţie al ariei cercului (moment de inerţie *geometric*) în raport cu centrul O.

Integrala dublă (13.39) se reduce la una simplă, observînd că toate elementele ariei ΔA a coroanei circulare cu razele $r + \Delta r$ şi r sînt egal depărtate de O. Dar :

$$\Delta A = \pi[(r + \Delta r)^2 - r^2] = 2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2$$

iar:

$$dA = 2\pi r dr;$$

deci :

$$J_o = \rho \, 2\pi \int_0^R r^3 \, dr = \frac{\pi R^4 \rho}{2} = \frac{MR^2}{2}. \tag{13.40}$$

Observaţii. α) Aceeaşi expresie o are şi momentul de inerţie al unui cilindru de rază R şi de înălţime oarecare, în raport cu axa cilindrului.

β) Dacă discul are forma unei coroane circulare cu raza exterioară R, iar cea interioară r :

$$J_o = \frac{MR^2}{2} - \frac{mr^2}{2} = \rho\left(\frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2}\right) = \rho \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2} = \pi(R^2 - r^2)\rho \frac{R^2 + r^2}{2}$$

$$J_o = (M - m)\frac{R^2 + r^2}{2} = M' \frac{R^2 + r^2}{2}, \tag{13.41}$$

unde M' este masa discului.

Se stabileşte la § 145 teorema lui Steiner pe baza căreia, calculînd momentul de inerţie al discului de masă M şi rază R în raport cu o axă (Δ)—care trece printr-un punct O'—de pe periferia discului şi este perpendiculară pe planul discului — se găseşte :

$$J_o = \frac{3}{2} MR^2. \tag{13.42}$$

3° Un disc circular omogen de masă M şi de rază R se roteşte în jurul unei axe perpendiculare pe planul său cu o mişcare reprezentată prin vectorul axial $\bar{\omega}$; să se calculeze cantitatea de mişcare $(\bar{H})$ şi momentul cinetic $(\bar{K}_\Delta)$ al discului în raport cu axa (Δ) care trece printr-un punct O' de pe periferia discului (fig. 350).

Rezolvare. Considerînd originea reperului în O' şi notînd cu $\bar{R}$ vectorul de poziţie al centrului C al discului, potrivit relaţiei (13.14) din § 129 :

$$\bar{H} = M\bar{v}_c = M\bar{\omega} \times \bar{R},$$

iar potrivit relaţiei (13.21) din § 131 : $\bar{K}_\Delta = J_{o'}\bar{\omega} = \frac{3}{2} MR^2\bar{\omega}$.

4° Un disc circular de rază R, omogen, de masă M, se roteşte în jurul unei axe fixe verticale (Δ) perpendiculare în centrul O pe planul discului. În momentul iniţial, cînd viteza unghiulară a discului este ω_0, un punct material de masă m se deplasează, pornind din centrul discului, pe raza OA (fig. 329). Să se calculeze viteza unghiulară a discului în funcţie de distanţa r a punctului de centru, în ipoteza că se neglijează frecările.

Rezolvare. Forţele exterioare fiind paralele cu axa dau momente nule faţă de axă; se aplică teorema conservării momentului cinetic al sistemului disc-punct material:

$$J_\Delta \bar{\omega} + \bar{r} \times m\bar{v} = \bar{C}$$

unde J_Δ este momentul de inerţie al discului faţă de axa (Δ), $\bar{v}$ este viteza absolută a punctului material. Cum $\bar{v} = \bar{v}_t + \bar{v}_r$, unde $\bar{v}_t$ este viteza de transport, iar $\bar{v}_r$, viteza relativă după rază, se obţine relaţia scalară:

$$J_\Delta \omega + m r^2 \omega = C = J_\Delta \omega_0;$$

deoarece: $J_\Delta = \dfrac{MR^2}{2}$, rezultatul final este:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \dfrac{2m}{M}\left(\dfrac{r}{R}\right)^2}$$

şi arată că viteza unghiulară a discului se micşorează o dată cu apropierea punctului material de periferia discului şi, invers, viteza discului se măreşte o dată cu apropierea punctului material de centrul discului.

Observaţii. α) O variantă a acestei aplicaţii se enunţă astfel: Discul este în repaus, iar punctul material porneşte dintr-un punct A de pe periferie cu o viteză oarecare v. Se cere ω în funcţie de v.

Rezolvare. v este viteza relativă, iar $v' = R\omega$ viteza de transport datorită rotaţiei discului. Teorema conservării momentului cinetic în raport cu axa, în ipoteza că mişcările au acelaşi sens:

$$J_\Delta \omega + Rm(v + v') = C = 0,$$

duce la rezultatul:

$$\omega = -\frac{2m}{(M + 2m)R} v,$$

adică: rotaţia discului se produce în sensul contrar mişcării punctului material şi este proporţională cu viteza relativă a punctului.

β) Cu ajutorul unui taburet, înzestrat cu rulmenţi pe bile pentru a micşora frecările (fig. 330), se pot face experienţe interesante, de pildă:

— Experimentatorul, urcat pe taburet, îşi ţine braţele lipite de corp, în timp ce se imprimă părţii superioare a taburetului — solidară cu omul — o mişcare de rotaţie. Dacă omul îşi depărtează braţele de corp, viteza unghiulară a sistemului se micşorează ca să sporească din nou, de îndată ce omul îşi apropie braţele de corp. Experienţa reuşeşte

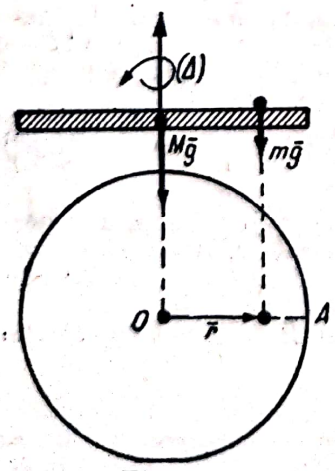


Fig 329

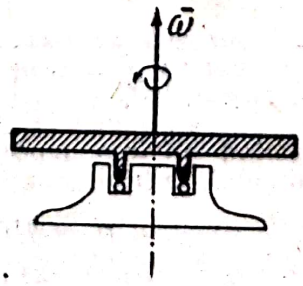


Fig. 330

mai bine dacă omul ţine în mînă şi corpuri grele. Această experienţă explică cum reuşesc patinatorii să-şi mărească viteza de rotaţie prin lipirea braţelor de corp şi apoi cum, prin depărtarea braţelor, reuşesc să micşoreze această viteză.

— Cu acelaşi taburet se poate experimenta varianta aplicaţiei 4°. Experimentatorul, urcat pe taburetul în repaus, ţine braţele orizontal în faţa sa. Cu o mişcare bruscă, el roteşte numai braţele, ambele în acelaşi sens, în jurul axei verticale. Se constată o rotire în sensul contrar a sistemului taburet-om. Dacă mîinile omului sînt încărcate, rotaţia sistemului este mai accentuată.

— În concluzie, tot astfel după cum forţele interioare ale unui sistem deformabil nu reuşesc să modifice mişcarea sau repausul centrului de masă al sistemului, ele nu pot provoca o modificare în mişcarea de rotaţie a *întregului sistem*, cel mult dacă se realizează o modificare a rotaţiei unei părţi a sistemului într-un sens; cealaltă parte a sistemului primeşte o modificare în sensul contrar. Însă, dacă în timpul rotaţiei se modifică momentele de inerţie faţă de axa de rotaţie, viteza unghiulară a sistemului se modifică în consecinţă.

5° Pe un scripete omogen de masă M şi rază R este înfăşurat un fir, cu masă neglijabilă, de capetele căruia sînt atîrnate masele m_1 şi m_2 (fig. 331). Axa scripetelui este orizontală şi fixă. Să se calculeze acceleraţia sistemului, fără a ţine seama de frecări.

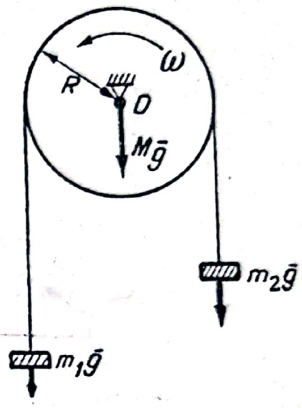


Fig. 331

Rezolvare. Aplicînd teorema variaţiei momentului cinetic a sistemului faţă de axa fixă din O rezultă :

$$\frac{d}{dt}[J\,\omega + (m_1 + m_2)v\,R] = (m_1 - m_2)\,g\,R,$$

unde :

$$J = \frac{MR^2}{2} \text{ este momentul de inerţie al scripetelui faţă de axă;}$$

$v = R\omega$ este viteza maselor în translaţie, iar ω este viteza unghiulară în mişcarea de rotaţie a scripetelui.

Relaţia precedentă este scrisă în ipoteza că firul nu alunecă pe scripete. Rezultatul final este :

$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{2(m_1 - m_2)}{M + 2(m_1 + m_2)}\,g.$$

Observaţie. Pe această aplicaţie se bazează funcţionarea maşinii lui Atwood pentru determinarea acceleraţiei greutăţii (g). Dacă diferenţa maselor $(m_1 - m_2)$ este mică, a este mic şi, în consecinţă, poate fi mai uşor determinat experimental decît g din căderea liberă.

D. TEOREMELE ENERGIEI MECANICE

§ 135. Lucru mecanic. Energie cinetică. Putere

a. Pentru definirea impulsului şi a cantităţii de mişcare s-a folosit un model simplu de interacţiune (v. § 126).

Datorită unor condiţii speciale, în exemplul dat, apărea numai aspectul mecanic al interacţiunii dintre S şi P, reflectat în variaţia vitezei $\bar{v}$ a punctului material P.

De îndată ce se schimbă condiţiile, pe lîngă aspectul mecanic, mai apare şi un aspect nemecanic al interacţiunii reflectat în deformaţia sistemului (S, P), prin variaţia distanţei OP (fig. 332).

Pentru analizarea fenomenului de deformaţie, ca efect al interacţiunii, şi pentru definirea unei măsuri corespunzătoare, se va folosi acelaşi exemplu,

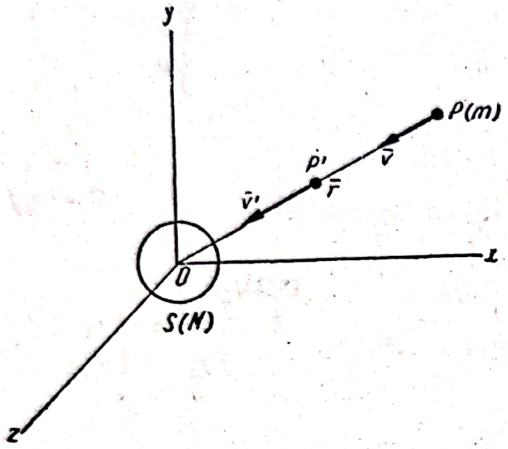


Fig. 332

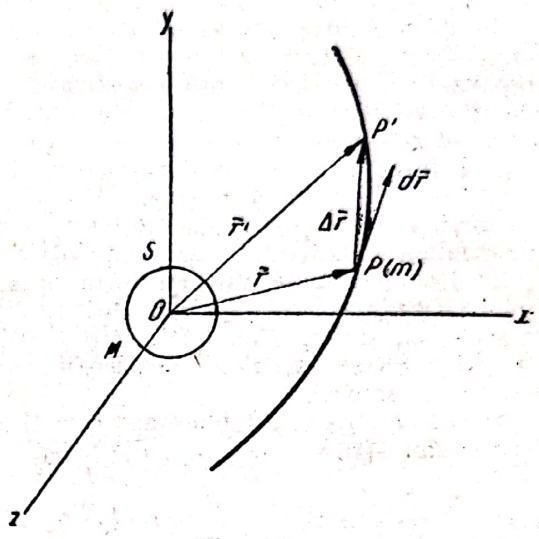


Fig. 333

însă cu următoarele condiţii particulare : Forţa $\overline{F}$, caracteristica interacţiunii, este constantă, iar, în momentul t, vectorii $\bar{r}$, $\bar{v}$ şi $\overline{F}$ sînt coliniari. În aceste condiţii, punctul material P descrie dreapta PO, iar interacţiunea se manifestă atît prin modificarea mişcării mecanice a punctului P, studiată cu ecuaţia :

$$\overline{F} = m\frac{d\bar{v}}{dt},$$

cît şi prin modificarea formei sistemului (S, P). Ambele efecte ale procesului de interacţiune se produc în spaţiu şi în timp.

Admiţînd că în momentul t' punctul material trece prin poziţia P', cu viteza $\bar{v}'$ dedusă din ecuaţia precedentă, deformaţia sistemului se exprimă prin $\overline{PP'}$.

Prin asocierea forţei $\overline{F}$ cu $\overline{PP'}$ se poate obţine o măsură a interacţiunii pentru fenomenul de modificare a formei sistemului (S, P). Această măsură, care este produsul dintre modulul forţei constante şi deplasarea punctului de aplicaţie în direcţia şi în sensul forţei, se numeşte *lucrul mecanic al forţei* şi se exprimă prin $|\overline{F}|.PP'$.

În cazul general, cînd condiţiile de mişcare nu mai sînt particulare, lucrul mecanic elementar al forţei variabile se exprimă prin produsul scalar $\overline{F}d\bar{r}$, unde $d\bar{r}$ este diferenţiala vectorului de poziţie al punctului de aplicaţie P al forţei $\overline{F}$ (fig. 333).

Dacă se multiplică ecuaţia precedentă scalar cu $d\bar{r}$:

$$\bar{F}d\bar{r} = m\frac{d\bar{v}}{dt}d\bar{r}$$

şi se face înlocuirea :

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v},$$

în ipoteza m constant, se găseşte :

$$\bar{F}d\bar{r} = d\left(\frac{1}{2}m\bar{v}^2\right). \tag{13.43}$$

Ecuaţia (13.43), la fel ca şi (13.5), poate fi interpretată ca o legătură între cauză şi efect. Această ecuaţie reflectă un al doilea aspect al procesului fizic de interacţiune.

În adevăr, prima parte a ecuaţiei (13.43), legînd forţa de deplasarea punctului ei de aplicaţie, *dă măsura interacţiunii în efectul de deformare a sistemului prin lucrul mecanic elementar al forţei.*

Partea a doua este diferenţiala unei cantităţi scalare $\frac{1}{2}mv^2$, care este o altă măsură a mişcării mecanice a punctului material P, denumită *energie cinetică.*

b. În ipoteza că se poate integra ecuaţia (13.43), pentru intervalul de timp $t' - t$ se obţine :

$$L_{pp'} = \int_{t}^{t'} \bar{F}\,d\bar{r} = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2, \tag{13.44}$$

unde cu $L_{pp'}$ s-a notat lucrul mecanic total al forţei pentru deplasarea punctului de aplicaţie de la P la P' în timpul $t' - t$.

Ecuaţia (13.44) este expresia matematică a teoremei de variaţie a energiei cinetice a punctului material, şi care se enunţă astfel :

Variaţia energiei cinetice a unui punct material de masă constantă acţionat de o forţă, într-un interval de timp, este egală cu lucrul mecanic total al forţei pentru deplasarea punctului material în intervalul de timp considerat.

Astfel, dacă $L_{pp'} > 0$, energia cinetică a punctului material creşte datorită interacţiunii, adică sistemul (S, P) cedează punctului material o parte din energia sa.

Dacă $L_{pp'} < 0$, punctul material cedează sistemului o parte din energia sa.

În fine, dacă $L_{pp'} = 0$, sistemul (S, P) nu suferă deformaţii în intervalul de timp $t' - t$, energia cinetică a punctului material P nu se modifică, iar interacţiunea are ca efect numai modificarea direcţiei vitezei punctului P (v. exemplul de la § 126, unde P descrie un cerc, iar $\bar{F}d\bar{r} = 0$).

c. Cele arătate mai înainte permit enunţarea următoarelor definiţii :

1° **Lucrul mecanic** *este o măsură a interacţiunii care caracterizează* **trecerea unei forme de mişcare în altă formă,** *de pildă, a formei nemecanice într-o formă mecanică — sau invers — şi se exprimă prin produsul scalar dintre forţa de interacţiune şi vectorul reprezentînd deplasarea punctului de aplicaţie al forţei.*

2° **Energia cinetică** *a unui punct material de masă m şi viteză $\bar{v}$ este cea de-a doua măsură a mişcării mecanice. Ea caracterizează* **capacitatea mişcării mecanice** *de a trece într-o cantitate echivalentă — a unei alte forme de mişcare — şi se exprimă prin* $\frac{1}{2} mv^2$.

Această definiţie a fost enunţată pentru prima dată de Engels.

d. *Observaţii şi consecinţe.* 1° Recapitulînd cele prezentate la § 36, 126 şi 135 cu privire la *interacţiune*, reiese că fenomenul interacţiunii particulelor de materie a fost considerat numai prin două din multiplele sale aspecte, că acest fenomen complex a fost asociat cu fenomenul mai simplu al mişcării mecanice a punctului material, că mişcarea mecanică este caracterizată prin două măsuri, *cantitatea de mişcare* şi *energia cinetică*, ale căror variaţii sînt echivalente cu măsurile respective ale interacţiunii : *impulsul* şi *lucrul mecanic*, şi că *ecuaţiile de echivalenţă* (13.6) şi (13.44) *exprimă relaţii de cauzalitate între fenomene fizice, şi nu simple formule de definiţii.*

2° Se observă că lucrul mecanic şi energia cinetică (în general energia) au aceeaşi ecuaţie de dimensiuni :

$$[L] = [Fl] = [\mathrm{L^2MT^{-2}}] = \left[\frac{mv^2}{2}\right] = [E].$$

Se mai poate observa că şi momentul unei forţe, sau momentul unui cuplu de forţe, are aceeaşi ecuaţie de dimensiuni :

$$[M] = [Fd] = [\mathrm{L^2MT^{-2}}],$$

cu toate că momentul este o mărime de altă natură decît lucrul mecanic sau energia. Pentru a se evita confuziile se folosesc aceleaşi unităţi de măsură pentru lucru mecanic şi energie şi alte unităţi pentru momente.

3° Astfel, în sistemul MKS, unitatea de măsură pentru lucru mecanic şi pentru energie se numeşte *joule* (J) şi este *lucrul mecanic efectuat de o forţă de un newton, al cărui punct de aplicaţie se deplasează cu un metru, în direcţia şi în sensul forţei.* În aceste condiţii, *newton-metru* (Nm) rămîne unitatea de măsură exclusiv pentru momentul unei forţe de un newton în raport cu un punct situat la distanţa de un metru de suportul forţei.

În sistemul CGS, unitatea de măsură pentru lucru mecanic şi pentru energie se numeşte *erg* şi este *lucrul mecanic efectuat de o forţă de o dină, al cărei punct de aplicaţie se deplasează cu un centimetru în direcţia şi în sensul forţei.* Unitatea de măsură pentru momentul unei forţe sau al unui cuplu în acest sistem este dyncm.

Relaţia dintre joule şi erg este aceeaşi ca şi relaţia dintre Nm şi dyn cm :

$$1\ \mathrm{Nm} = 10^5\mathrm{dyn}10^2\mathrm{cm} = 10^7\mathrm{dyncm};\ 1\mathrm{J} = 10^7\mathrm{erg}.$$

În sistemul MTS, unitatea de măsură pentru momentul unei forţe sau al unui cuplu este *stena metru* (sn m), cu relaţiile :

$$1\ \mathrm{snm} = 10^3\mathrm{Nm} = 10^{10}\mathrm{dyncm},$$

iar unitatea de măsură pentru lucru mecanic sau pentru energie este :

$$1\mathrm{KJ}\ (\textit{kilojoule}) = 10^3\mathrm{J} = 10^{10}\mathrm{erg}.$$

Lucrurile se complică în sistemul MKfS, întrucît în acest sistem energia nu are o unitate proprie de măsură.

Unitatea de măsură pentru momentul unei forţe sau al unui cuplu este kgfm (*kilogram-forţă-metru*), iar unitatea de măsură pentru energie sau pentru lucru mecanic, folosită pînă în ultima vreme, se notează cu kgm. Se poate constata uşor că prin această notaţie se măreşte confuzia care încă se mai face între kilogramul masă şi kilogramul forţă. De aceea s-a adoptat ca unitate de măsură pentru lucru mecanic sau pentru energie, în sistemul MKfS, tot kgfm.

Pentru evitarea surselor de erori se recomandă, în primul rînd, folosirea sistemelor generale fizice şi, în al doilea rînd, să se rezerve unităţile kgm, gcm şi tm exclusiv pentru *momentul static al masei*, o mărime des întîlnită în mecanică.

e. **Proprietăţile lucrului mecanic.** 1° Din cele expuse la §§ 6, 126 şi 135 reiese că forţa este *o caracteristică* a interacţiunii, pe cînd lucrul mecanic, legînd forţa de deformaţie, este *o măsură* a interacţiunii pentru procesele însoţite de variaţia formei sistemului. Deşi lucrul mecanic nu este o mărime derivată din forţă, totuşi se foloseşte în mod curent, pentru simplificare, expresia de: *lucrul mecanic al forţei.*

2° Lucrul mecanic elementar al forţei $\bar{F}$ pentru deplasarea punctului ei de aplicaţie, reprezentată prin $d\bar{r}$, se poate pune şi sub forma:

$$\bar{F}d\bar{r} = |\bar{F}|\,|d\bar{r}|\cos\alpha = |\bar{F}|\,ds\cos\alpha, \qquad (13.45)$$

unde ds este diferenţiala arcului de traiectorie pe care îl descrie punctul de aplicaţie al forţei, iar α este unghiul dintre vectorii $\bar{F}$ şi $d\bar{r}$.

Dacă unghiul α este ascuţit, lucrul mecanic este pozitiv şi se numeşte: *lucru mecanic motor.*

Dacă unghiul α este obtuz, lucrul mecanic este negativ şi este denumit: *rezistent.*

Dacă unghiul α este drept, lucrul mecanic al forţei perpendiculare pe direcţia deplasării punctului ei de aplicaţie este *nul.*

Exemplu. Un corp M, în mişcare de translaţie pe un plan înclinat de $\sphericalangle\,\alpha$ faţă de planul înclinat este asimilat cu un punct material. Se notează cu $\bar{G}$ greutatea lui, cu $\bar{N}$ reacţiunea normală şi cu $\bar{T}$ reacţiunea tangenţială a planului înclinat, datorită frecării (fig. 181).

Calculînd lucrul mecanic al fiecărei forţe pentru deplasarea ds în lungul planului înclinat se găseşte:

Pentru deplasarea în jos, lucrul mecanic al greutăţii este $G\,ds\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = G ds\sin\alpha$, lucrul mecanic al reacţiunii normale: $N\,ds\cos\frac{\pi}{2} = 0$, lucrul mecanic al forţei de frecare: $T\,ds\cos\pi = -T\,ds$.

În cazul deplasării în sus, lucrul mecanic al greutăţii este $G\,ds\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -G\,ds\sin\alpha$, lucrul mecanic al reacţiunii normale: $N ds\cos\frac{\pi}{2} = 0$, lucrul mecanic al forţei de frecare: $T\,ds\cos\pi = -T\,ds$.

3° Dacă asupra punctului material $M(x, y, z)$ acţionează forţa $\bar{F} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$, exprimată faţă de triedrul $Oxyz$, se poate calcula expresia analitică a lucrului mecanic elementar $\bar{F}\mathrm{d}\bar{r}$, folosind proprietatea de distributivitate a produsului scalar. În adevăr, deoarece $\mathrm{d}\bar{r} = \bar{i}\mathrm{d}x + \bar{j}\mathrm{d}y + \bar{k}\mathrm{d}z$, se găseşte:

$$\Delta L = \bar{F}\,\mathrm{d}\bar{r} = X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z, \tag{13.46}$$

unde prima parte s-a notat cu ΔL şi nu cu $\mathrm{d}L$, deoarece *nu întotdeauna expresia din partea a doua este o diferenţială totală.*

În analiza matematică se demonstrează: pentru ca $X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$ să fie o diferenţială totală *este necesar şi suficient ca*:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}. \tag{13.47}$$

O dată condiţiile (13.47) satisfăcute, se poate găsi o funcţie U depinzînd explicit numai de coordonatele punctului M, astfel ca:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{13.48}$$

În acest caz se poate scrie:

$$\bar{F}\,\mathrm{d}\bar{r} = \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z = \mathrm{d}U(x, y, z),$$

iar forţa $\bar{F}$ *derivă din funcţia* $U(x, y, z)$, care se numeşte *funcţie de forţă.*

5° În general, lucrul mecanic total al unei forţe oarecare $\bar{F}(X, Y, Z)$, al cărei punct de aplicaţie $M(x, y, z)$ are o deplasare finită, în intervalul de timp $t_1 - t_0$, între punctele $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi $M_1(x_1, y_1, z_1)$, se exprimă printr-o integrală curbilinie (fig. 334):

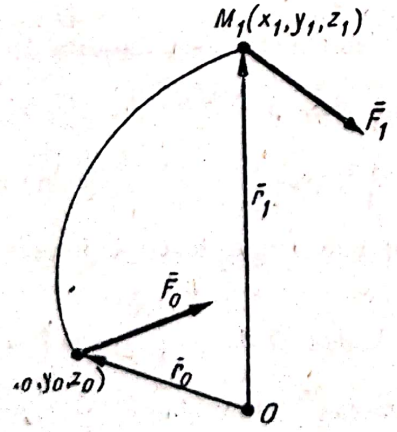


Fig. 334

$$L_{0,1} = \int_{M_0}^{M_1} \bar{F}\,\mathrm{d}\bar{r} = \int_{M_0}^{M_1'} (X\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z),$$

extinsă pe traiectoria descrisă de punctul material M între poziţiile M_0 şi M_1. În general, *lucrul mecanic finit depinde atît de forţa* $\bar{F}$ *cît şi de traiectoria descrisă de punctul de aplicaţie al forţei.*

6° Însă dacă forţa $\bar{F}$ derivă dintr-o funcţie $U(x, y, z)$ şi nu depinde în mod explicit de timpul t, lucrul mecanic total al forţei

pentru deplasarea punctului ei de aplicație pe o traiectorie oarecare între pozițiile M_0 și M_1 este:

$$L_{0,1} = \int_{M_0}^{M_1} \bar{F}\, d\bar{r} = \int_{M_0}^{M_1} dU = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0) = U_1 - U_0, \quad (13.49),$$

adică *nu depinde de drumul parcurs și nici de legea după care se mișcă punctul material* (punctul de aplicație al forței), *ci depinde numai de pozițiile extreme* M_0 *și* M_1 *ale traiectoriei.*

Exemplu. Un punct material de masă m se mișcă pe o traiectorie oarecare între punctele $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Să se calculeze lucrul mecanic total efectuat de greutatea punctului material (fig. 335).

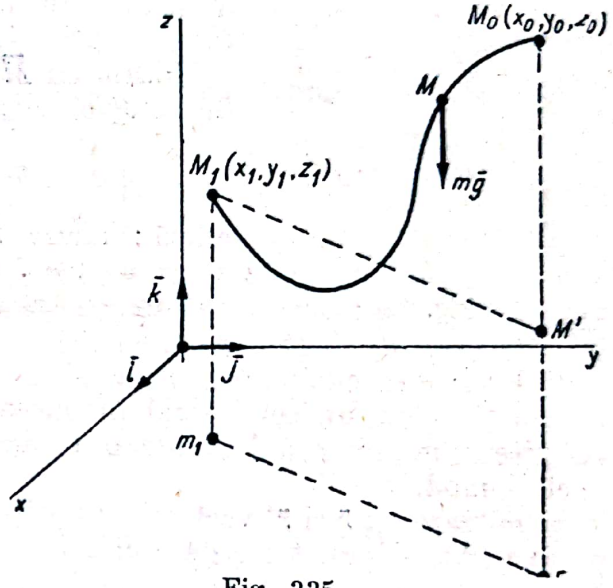


Fig. 335

Expresiile complexe ale forței $\bar{F}$ și ale deplasării reprezentate prin $d\bar{r}$, în raport cu triedrul $Oxyz$, sînt:

$$\bar{F} = -mg\bar{k}$$

și $d\bar{r} = \bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}dz.$

Deci:

$$\bar{F}\, d\bar{r} = -mgdz = dU,$$

de unde:

$$U = -mgz + C,$$

iar:

$$L_{0,1} = U_1 - U_0 = -mgz_1 + mgz_0 = mg(z_0 - z_1) = mgh,$$

adică: *lucrul mecanic al greutății nu depinde de drumul parcurs de punctul material și nici de legea mișcării și este egal cu produsul greutății prin* **h**, *diferența de nivel dintre poziția inițială și cea finală a punctului.*

7° Dacă asupra unui sistem de n puncte materiale M_i, de mase m_i, ale căror poziții sînt determinate, în raport cu sistemul de referință fix $Oxyz$, prin vectorii de poziție $\bar{r}_i$, acționează un sistem de forțe exterioare $\bar{F}_i$ aplicate punctelor M_i, $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$, și un alt sistem de forțe interioare F_{ij}, aplicate punctelor M_i, $(j = 1, 2, 3, \ldots n;\ j \neq i)$, lucrul mecanic elementar pentru deplasările punctelor sistemului, reprezentate prin $d\bar{r}_i$, se compune din:

$$\Delta L_{ext} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i\, d\bar{r}_i \quad \text{și} \quad \Delta L_{int} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n'} \bar{F}_{ij}\, d\bar{r}_i \right)$$

unde s-a notat cu ΔL_{ext} lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare și cu ΔL_{int} lucrul mecanic elementar al tuturor forțelor interioare sistemului, cu observația că în paranteză nu se vor lua în considerare termenii în care $j = i$.

8° Lucrul mecanic elementar al unei forţe aplicate într-un punct M al unui solid rigid care este în mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ în jurul unei axe fixe, pentru un unghiu de rotaţie $\mathrm{d}\theta$, se calculează astfel:

$$\Delta L = \bar{F}\mathrm{d}\bar{r} = \bar{F}\bar{v}\mathrm{d}t = \bar{F}\,(\bar{\omega} \times \bar{r})\,\mathrm{d}t = (\bar{r} \times \bar{F})\,\bar{\omega}\,\mathrm{d}t =$$

$$= (\bar{r} \times \bar{F})\frac{\bar{\omega}}{\omega}\,|\,\bar{\omega}\,|\,\mathrm{d}t = \bar{M}_o\frac{\bar{\omega}}{|\,\bar{\omega}\,|}\mathrm{d}\theta,$$

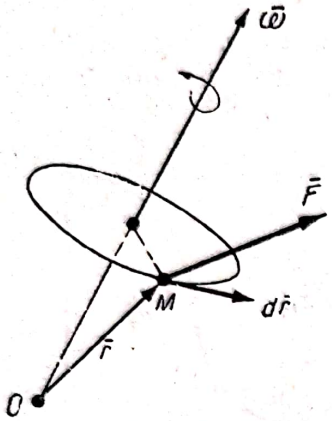


Fig. 336

unde $\bar{M}_o$ este momentul forţei în raport cu originea O a sistemului de referinţă, situată pe axa de rotaţie (Δ).

Notînd cu $\bar{M}_\Delta$ momentul forţei $\bar{F}$ în raport cu axa de rotaţie, se găseşte:

$$\Delta L = M_\Delta\,\mathrm{d}\theta, \qquad (13.50)$$

adică: *lucrul mecanic elementar al forţei care acţionează un solid rigid în mişcare de rotaţie este egal cu valoarea momentului forţei în raport cu axa de rotaţie multiplicată cu unghiul elementar de rotaţie.*

9° Lucrul mecanic elementar al unui cuplu de forţe cu momentul $\bar{M}$, care acţionează un solid rigid în mişcare de rotaţie, în jurul unei axe (Δ), cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$, pentru o rotaţie elementară $\mathrm{d}\theta$, se calculează în acelaşi mod.

Se notează cu $\bar{r}$ şi $\bar{r}'$ vectorii de poziţie, în raport cu reperul cu originea O pe axa (Δ), ai punctelor de aplicaţie ale forţelor cuplului, iar:

$$\Delta L = \bar{F}\mathrm{d}\bar{r} + \bar{F}'\mathrm{d}\bar{r}' = (\bar{r} \times \bar{F})\frac{\bar{\omega}}{|\,\bar{\omega}\,|}\mathrm{d}\theta + (\bar{r}' \times \bar{F}')\frac{\bar{\omega}}{|\,\bar{\omega}\,|}\mathrm{d}\theta =$$

$$= (\bar{r} \times \bar{F} + \bar{r}' \times \bar{F}')\frac{\bar{\omega}}{|\,\bar{\omega}\,|}\mathrm{d}\theta = \bar{M}\frac{\bar{\omega}}{|\,\bar{\omega}\,|}\mathrm{d}\theta = M_\Delta\mathrm{d}\theta,$$

adică: *lucrul mecanic elementar este egal cu valoarea proiecţiei momentului cuplului de forţe pe axa de rotaţie, multiplicată prin unghiul elementar de rotaţie.*

Expresia se mai poate pune şi sub forma:

$$\Delta L = \bar{M}\,\bar{\omega}\,\mathrm{d}t, \qquad (13.51)$$

unde $\mathrm{d}t$ reprezintă timpul corespunzător rotaţiei elementare $\mathrm{d}\theta$.

După cum produsul scalar $\bar{M}\bar{\omega}$ este pozitiv, negativ sau nul, lucrul mecanic al cuplului de forţe este motor, rezistent sau nul.

Observaţie. Lucrul mecanic al unui cuplu de forţe care acţionează un solid rigid în mişcare de translaţie este nul. În adevăr:

$$\Delta L = \bar{F}\,\mathrm{d}\bar{r} + \bar{F}'\,\mathrm{d}\bar{r}'$$

iar:

$$\mathrm{d}\bar{r} = \mathrm{d}\bar{r}' \quad \text{şi} \quad \bar{F} + \bar{F}' = 0,$$

deci:

$$\Delta L = (\bar{F} + \bar{F}')\,\mathrm{d}\bar{r} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

f. **Putere.** Un sistem material oarecare poate acționa asupra unui punct material printr-o forță rezultantă $\bar{F}$, iar asupra unui solid rigid, printr-un torsor. Se știe că torsorul se compune dintr-o forță $\bar{R}$ și un cuplu de moment $\bar{M}$.

Sistemul material *care acționează* primește denumirea de *agent.*

Un *agent* este cu *atît mai puternic* cu cît produce, în *unitatea de timp*, un lucru mecanic mai mare. Prin definiție, puterea agentului este:

$$P = \frac{\Delta L}{dt},$$

unde s-a notat cu P puterea, iar dt reprezintă timpul în care agentul produce lucrul mecanic ΔL.

Observații și consecințe. 1° Dacă acționarea se face prin forță $\bar{F}$, puterea agentului este:

$$P = \frac{\bar{F}d\bar{r}}{dt} = \bar{F}\,\bar{v}, \tag{13.52}$$

unde $\bar{v}$ este viteza, în momentul t, a punctului material acționat.

2° Dacă acționarea unui solid rigid în mișcare de rotație în jurul unei axe fixe (Δ), cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$, se face prin cuplul de moment $\bar{M}$, expresia puterii, dedusă din (13.51), este:

$$P = \frac{\bar{M}\,\bar{\omega}\,dt}{dt} = \bar{M}\,\bar{\omega}. \tag{13.53}$$

3° Din (13.52) și (13.53) rezultă următoarele expresii analitice:

$$P = \bar{F}\bar{v} = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z} = Xv_x + Yv_y + Zv_z,$$

$$P = \bar{M}\,\bar{\omega} = M_x\omega_x + M_y\omega_y + M_z\omega_z. \tag{13.54}$$

4° Ecuația de dimensiuni a puterii este:

$$[P] = \left[\frac{L}{t}\right] = [L^2MT^{-3}].$$

5° Unitățile de măsură pentru putere sînt:

α) în sistemul MKS: $\frac{1\text{J}}{\text{s}} = 1$ W (*watt*);

β) în sistemul CGS: $\frac{1\text{ erg}}{\text{s}} = 10^{-7}$ W;

γ) în sistemul MKfS: $1\,\frac{\text{kgfm}}{\text{s}}$ = *kilogram-forță metru pe secundă*,

$$\frac{1\,\text{kgfm}}{\text{s}} \approx 9{,}81 \text{ W};$$

δ) în sistemul MTS: $\frac{1\,\text{kJ}}{\text{s}} = 1$ kW (*kilowatt*).

Scanned with OKEN Scanner

Kilowattul este unitatea curentă pentru măsura puterilor maşinilor şi instalaţiilor mecanice şi electrice. În domeniul instalaţiilor mecanice mai este tolerată o unitate de măsură pentru putere: *calul putere* (CP):

$$1 \text{ CP} = 75 \frac{\text{kgfm}}{\text{s}} \approx 75 \times 9{,}81 \text{ W} \approx 736 \text{ W} = 0{,}736 \text{ kW},$$

şi invers: 1 kW ≈ 1,36 CP.

6° Unităţile de măsură pentru energie, legate de cele pentru putere, sînt: (Ws) *wattsecunda*, kWh (*kilowattora*) şi mai rar (CPh) *cal putere-ora*, între care se scriu relaţiile:

$$1 \text{ Ws} = 1 \text{ J}, \; 1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W } 3\,600 \text{ s} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

$$1 \text{ CPh} = \frac{75 \text{ kgfm}}{\text{s}} 3\,600 \text{ s} = 270\,000 \text{ kgfm} \approx 0{,}736 \text{ kWh}.$$

§ 136. Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale

a. **Definiţie.** *Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale este egală cu suma energiilor cinetice ale punctelor sistemului*:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{13.55}$$

unde $\bar{v}_i$ este viteza punctului M_i, de masă m_i, în raport cu un reper fix cu originea în O ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$).

Observaţii: 1° În cazul unui sistem nedeformabil de puncte materiale în mişcare de translaţie faţă de reperul cu originea în O, $\bar{v}_i = \bar{v}_c$ (unde $\bar{v}_c$ este viteza unui punct C al sistemului, punct care poate fi şi centrul de masă al sistemului), şi astfel:

$$E = \frac{v_c^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{1}{2} m v_c^2, \tag{13.56}$$

adică: *Energia cinetică a sistemului este egală cu energia cinetică a unui punct material al sistemului, punct în care ar fi concentrată întreaga masă a sistemului.*

2° Dacă sistemul nedeformabil este în mişcare de rotaţie, în jurul unei axe fixe (Δ), trecînd prin O, mişcare determinată prin $\bar{\omega}$, $\bar{v}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i$, $v_i^2 = \omega^2 R_i^2$, unde R_i este distanţa punctului M_i la axa (Δ):

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2, \tag{13.57}$$

adică: *Energia cinetică a sistemului este egală cu jumătatea produsului momentului de inerţie al sistemului, în raport cu axa de rotaţie, prin pătratul vitezei unghiulare din momentul considerat.*

3° Se admite extinderea formulelor (13.56) şi (13.57), stabilite în cazul unui sistem de puncte materiale, şi asupra unui continuu nedeformabil (solid rigid), avînd o mişcare de translaţie respectiv o mişcare de rotaţie.

Scanned with OKEN Scanner

b. **Teorema a II-a a lui Koenig.** Folosind notaţiile de la § 132, obs. 4°, şi figura 326, se poate scrie energia cinetică a sistemului de puncte materiale în raport cu reperul fix cu originea în O, în funcţie de energia cinetică faţă de un reper mobil cu originea în C, centrul de masă al sistemului, dar cu axele paralele cu cele fixe:

$$E_o = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\bar{v}_c + \dot{\bar{\rho}}_i)^2 =$$

$$= \frac{v_c^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i + \bar{v}_c \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{\rho}}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\bar{\rho}}_i^2$$

$$E_o = \frac{1}{2} m v_c^2 + E_c, \qquad (13.58)$$

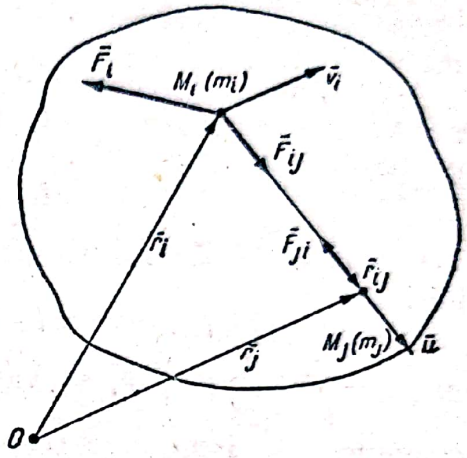


Fig. 337

adică: *Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale în raport cu un reper fix este egală cu energia cinetică a unui punct material coincizînd cu centrul de masă în care ar fi concentrată întreaga masă a sistemului, adunată cu energia cinetică a sistemului în raport cu un reper cu originea în centrul de masă şi cu axele paralele cu cele fixe.*

Expresia energiei cinetice pentru cazul particular al unui solid rigid în mişcare plan-paralelă se deduce din (13.58):

$$E_o = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2, \qquad (13.59)$$

unde J_c este momentul de inerţie al solidului în raport cu axa trecînd prin C, paralel cu $(\Delta, \bar{\omega})$, axa instantanee de rotaţie.

§ 137. Teorema de variaţie a energiei cinetice

a. Această teoremă a fost demonstrată pentru un punct material la § 135.

În cazul unui sistem de puncte materiale M_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ de mase m_i, în poziţiile determinate de vectorii $\bar{r}_i$, acţionate de forţele exterioare $\bar{F}_i$ şi de forţele interioare $\bar{F}_{ij}$ (fig. 337), se exprimă teorema pentru punctul material M_i

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = \bar{F}_i \,\mathrm{d}\bar{r}_i + \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij}\right) \mathrm{d}\bar{r}_i, \qquad (13.60)$$

unde: $\bar{F}_{ii} = 0$, iar $\bar{v}_i$ este viteza punctului material M_i în raport cu reperul fix cu originea în O.

Adunînd ecuaţiile de tipul (13.60) pentru $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, se obţine:

$$\mathrm{d} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \,\mathrm{d}\bar{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij}\right) \mathrm{d}\bar{r}_i \qquad (13.61)$$

sau :

$$dE = \Delta L_{ext} + \Delta L_{int}, \tag{13.62}$$

adică : *Diferenţiala energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale este egală cu lucrul mecanic elementar al forţelor exterioare* (ΔL_{ext}) *şi al celor interioare* (ΔL_{int}) *pentru toate deplasările punctelor sistemului în intervalul de timp* dt.

Aceasta este *teorema energiei cinetice* pentru un sistem oarecare de puncte materiale.

Dacă se poate integra relaţia (13.62) pentru intervalul de timp de la momentul t la momentul $t' > t$, se ajunge la *forma finită* a teoremei de *variaţie a energiei cinetice :*

$$E' - E = L_{ext} + L_{int}. \tag{13.63}$$

În relaţia (13.63), E' este energia cinetică finală, iar E este energia cinetică iniţială.

b. *Calculul lucrului mecanic elementar al forţelor interioare* $\Delta L_{int} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij} \right) d\bar{r}_i$ se va face considerînd, la început, că sistemul se compune numai din punctele M_i şi M_j (fig. 337). În acest caz :

$$\Delta L_{int} = \bar{F}_{ij}\, d\bar{r}_i + \bar{F}_{ji}\, d\bar{r}_j, \tag{13.64}$$

unde :

$$\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0 \quad \bar{r}_i + \bar{r}_{ij} = \bar{r}_j,$$

astfel că :

$$\Delta L_{int} = \bar{F}_{ij}\,(d\bar{r}_i - d\bar{r}_j) = \bar{F}_{ij}\, d(\bar{r}_i - \bar{r}_j) = -\bar{F}_{ij}\, d\bar{r}_{ij} = -F_{ij}\,\bar{u}\, d\,(r_{ij}\bar{u}) =$$

$$= -F_{ij}\,\bar{u}\,(\bar{u}\, dr_{ij} + r_{ij}\, d\bar{u}),$$

unde s-a notat cu $\bar{u}$ versorul axei $M_i M_j$, cu F_{ij} valoarea forţei interioare în raport cu $\bar{u}$ şi cu r_{ij} modulul vectorului $\bar{r}_j$, adică distanţa $M_i M_j$.

Deoarece : $\bar{u}\, d\bar{u} = 0$, se găseşte pînă la sfîrşit :

$$\Delta L_{int} = -F_{ij}\, dr_{ij}. \tag{13.65}$$

Se observă că expresia (13.65) depinde de valorile F_{ij} şi dr_{ij}, diferenţiala modulului putînd fi pozitivă sau negativă. Se verifică astfel că, dacă distanţa $M_i M_j$ se măreşte, lucrul mecanic al forţelor interioare *atractive* este *negativ*, iar al celor *repulsive* este *pozitiv*. Invers, dacă distanţa $M_i M_j$ se micşorează, lucrul mecanic al forţelor interioare *atractive* este *pozitiv*, pe cînd al forţelor *repulsive* este *negativ*.

În ipoteza că sistemul se compune din trei puncte materiale, procedînd la fel, se găseşte :

$$\Delta L_{int} = -(F_{ij}\, dr_{ij} + F_{ik}\, dr_{ik} + F_{jk}\, dr_{jk}),$$

expresie în care nu s-au păstrat decît jumătate din numărul forţelor interioare perechi, şi anume forţele la care primul indice este inferior celui de-al doilea ($i < j$, $i < k$, $j < k$).

În general, pentru un sistem de n puncte materiale :

$$\Delta L_{int} = -\Sigma\, F_{ij}\, dr_{ij} \quad (i < j), \tag{13.66}$$

Scanned with OKEN Scanner

suma conține un număr de C_n^2 termeni rezultînd din toate combinările posibile cu cei n indici, luați cîte doi, astfel încît să rămînă numai termenii în care primul indice este inferior celui de-al doilea.

c. *Observații și consecințe.* 1° Teorema echivalenței dintre energia cinetică și lucrul mecanic se exprimă printr-o relație scalară deosebit de utilă în aplicații

2° Spre deosebire de celelalte două teoreme, forțele interioare nu sînt eliminate din teorema energiei cinetice, ele dau lucru mecanic.

3° Însă, dacă sistemul de puncte materiale este nedeformabil, adică distanțele r_{ij} sînt constante, $dr_{ij} = 0$ și $\Delta L_{int} = 0$, astfel că:

$$E' - E = L_{ext}, \tag{13.67}$$

adică: *Variația energiei cinetice a unui sistem nedeformabil de puncte materiale, între momentul inițial și cel final, este egală cu suma lucrurilor mecanice totale ale forțelor exterioare aplicate sistemului pentru deplasarea corespunzătoare intervalului de timp considerat.*

4° Teorema energiei cinetice se aplică și în raport cu centrul de masă al sistemului de puncte materiale.

Pentru demonstrație se folosesc aceleași notații ca la teorema variației momentului cinetic în raport cu centrul de masă (§ 132, *d*) precum și figura 326. Se precizează și aici că sistemul de referință cu originea în C are axele paralele cu cele ale reperului fix cu originea în O. Din această cauză $\dot{\bar{\rho}}_i$ reprezintă viteza relativă a punctului M_i, față de reperul mobil. Ținînd seama de teorema a II-a a lui Koenig (13.58) și de relațiile: $\bar{r}_i = \bar{r}_c + \bar{\rho}_i$, $\bar{v}_i = \bar{v}_c + \dot{\bar{\rho}}_i$ ecuația (13.61) devine:

$$dE_o = d\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = d\left(\frac{1}{2} m v_c^2 + E_c\right) = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \, d(\bar{r}_c + \bar{\rho}_i) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij} \, d(\bar{r}_c + \bar{\rho}_i)\right)$$

$$\text{sau: } d\bar{r}_c \, m\bar{a}_c + dE_c = d\bar{r}_c \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \, d\bar{\rho}_i + d\bar{r}_c \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij}\right) d\bar{\rho}_i, \quad \text{unde, } \bar{F}_{ii} = 0.$$

Se observă că potrivit teoremei mișcării centrului de masă:

$$m\bar{a}_c = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \text{ și că } \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij} = 0.$$

Deci:

$$dE_c = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \, d\bar{\rho}_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij}\right) d\bar{\rho}_i, \tag{13.68}$$

adică: *Diferențiala energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale în raport cu centrul de masă al sistemului este egală cu lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare și al celor interioare pentru deplasările punctelor față de centrul de masă al sistemului, în intervalul de timp* dt.

Scanned with OKEN Scanner

§ 138. Teorema conservării energiei

a. Din cuprinsul §§ 1, 6, 126 şi 135 se desprind un număr de concluzii din care se reţin următoarele:

1° Mişcarea mecanică este cea mai simplă formă de mişcare.

2° Celelalte forme mai complexe, denumite forme nemecanice de mişcare, sînt însoţite şi de forma mecanică.

3° Energia cinetică este măsura mişcării mecanice care caracterizează *capacitatea acestei mişcări de a trece* într-o cantitate echivalentă a unei alte forme de mişcare.

4° Lucrul mecanic este o măsură a interacţiunii dintre particulele unui sistem material deformabil şi caracterizează *trecerea* unei forme de mişcare în altă formă de mişcare.

Aceste concluzii pot să înlesnească înţelegerea următoarelor definiţii ale unor mărimi importante pentru mecanică:

b. Definiţii. 1° Engels defineşte **energia** ca *măsura generală a mişcării sub toate formele şi în toate transformările.*

2° **Energia** *caracterizează capacitatea unui sistem material de a produce un lucru mecanic.*

3° **Energia potenţială** *a unui sistem material este o măsură a mişcării nemecanice a sistemului capabilă de a trece într-o cantitate determinată de mişcare mecanică.*

Aceste definiţii reflectă *legea universală a transformării calitative şi a conservării cantitative a energiei ca măsură a mişcării.*

În mecanica newtoniană, *energia potenţială* (E_p) *depinde numai de poziţia în spaţiu a particulelor sistemului material.*

4° Un sistem material se numeşte *conservativ* dacă *forţele interioare ale sistemului derivă dintr-o funcţie de forţe* U, funcţie depinzînd numai de poziţia particulelor sistemului.

În acest caz, potrivit celor stabilite la § 135, lucrul mecanic elementar al forţelor interioare este o diferenţială totală:

$$\Delta L_{i,t} = \mathrm{d}U.$$

c. *Exemplu.* Un corp asimilat cu un punct material de masă m se găseşte în repaus pe un suport la înălţimea h de suprafaţa Pămîntului (fig. 338).

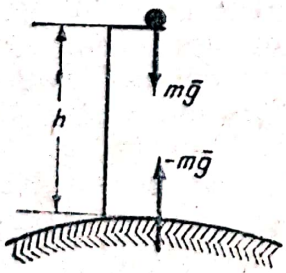


Fig. 338

Sistemul corp-Pămînt îşi modifică forma de îndată ce se suprimă suportul. Începînd din acest moment, energia cinetică a sistemului[1] variază datorită lucrului mecanic efectuat de forţele interioare de interacţiune.

Deci în poziţia de repaus sistemul era capabil de a efectua un lucru mecanic, adică avea o *energie potenţială Ep* acumulată în sistem întocmai ca într-un resort întins.

Pe măsură ce corpul cade, energia potenţială a sistemului scade, adică $\mathrm{d}E_p < 0$, în timp ce lucrul

[1] Se arată, la pct. e. că din cauza masei enorme a Pămîntului nu variază decît mişcarea corpului.

mecanic al forţelor interioare este pozitiv, adică $\Delta L_{int} > 0$. În baza acestui exemplu, în cazul unui sistem conservativ de puncte materiale, se va putea scrie : $\Delta L_{int} = -\mathrm{d}E_p$.

d. În aceste condiţii, teorema de variaţie a energiei cinetice pentru un sistem conservativ de puncte materiale se exprimă prin ecuaţia :

$$\mathrm{d}E = \Delta L_{ext} - \mathrm{d}E_p \quad \text{sau} \quad \mathrm{d}(E + E_p) = \Delta L_{ext}. \tag{13.69}$$

Suma energiilor cinetică şi potenţială ale unui sistem material este denumită *energia mecanică totală* a sistemului. Deci :

Diferenţiala energiei mecanice totale a unui sistem conservativ de puncte materiale este egală cu lucrul mecanic elementar al forţelor exterioare aplicate sistemului, în intervalul de timp dt.

Dacă sistemul conservativ este şi izolat, sau dacă : $\Delta L_{ext} = 0$[1], rezultă :

$$E + E_p = \text{const.} \tag{13.70}$$

adică : *Dacă forţele exterioare care acţionează asupra unui sistem conservativ de puncte materiale nu produc lucru mecanic, un interval de timp, energia mecanică totală a sistemului este constantă în acel interval.*

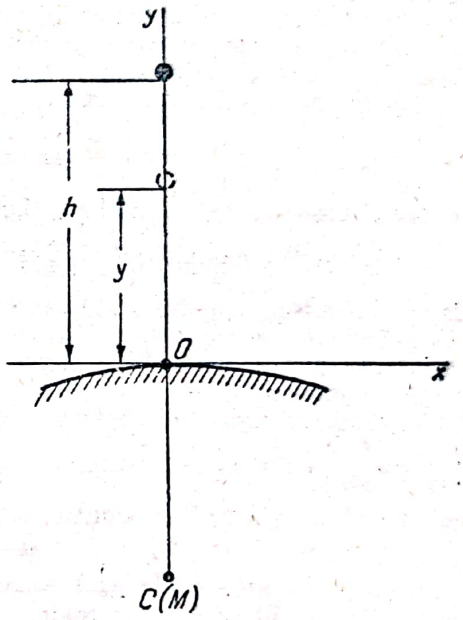


Fig. 339

e. *Observaţii.* 1° Teorema de conservare a energiei mecanice exprimă prin (13.70) cea de-a treia integrală primă a sistemului de ecuaţii diferenţiale referitoare la mişcarea unui sistem de puncte materiale.

2° Pentru ilustrarea teoremei se poate relua exemplul cu sistemul corp-Pământ[2], în care masa Pământului M este presupusă concentrată în centrul C (fig. 339) şi se neglijează orice fel de acţiuni sau rezistenţe, cu excepţia interacţiunilor dintre corp şi Pământ. Se consideră ca axe ale sistemului de referinţă Oy după verticala corpului şi Ox una din orizontalele tangente în O la suprafaţa Pământului. Deoarece :

$$a_c = a_o = \frac{mg}{M} \approx 0, \qquad v_c = v_o = \frac{mg}{M} t \approx 0,$$

se constată că atît acceleraţiile cît şi vitezele punctelor C, respectiv O, sînt foarte mici, neglijabile, din cauză că raportul $\frac{m}{M}$ este practic nul. În aceste condiţii se poate con-

[1] Sistemul material pentru care lucrul mecanic al forţelor exterioare este nul în permanenţă se numeşte sistem închis.

[2] v. Acad. prof. dr. *V. Vâlcovici. Curs de mecanică.* Ed. 1951, vol I. p. 433.

sidera că sistemul de referinţă Oxy este fix şi că energia cinetică a Pămîntului este nulă[1]. Aplicînd teorema de conservare a energiei mecanice totale a sistemului corp-Pămînt, sistem conservativ deoarece:

$$\Delta L_{int} = -\mathrm{d}\,(mgy) \text{ şi cum } \Delta L_{ext} = 0, \text{ rezultă:}$$

$$E + E_p = \frac{1}{2} mv^2 + mgy = \text{const.},$$

unde y măsoară înălţimea corpului deasupra planului orizontal, la momentul t, iar v este viteza corpului în acelaşi moment.

Cum în momentul iniţial: $v_0 = 0$, $y_0 = h$,

$$\frac{1}{2} mv^2 + mgy = mgh$$

este ecuaţia dată de teorema de conservare a energiei mecanice totale.

Discuţie. În momentul iniţial, întreaga energie a sistemului are forma potenţială, mgh.

În timp ce corpul cade, y descreşte, v creşte, energia potenţială se micşorează, iar energia cinetică se măreşte, suma lor rămînînd constantă.

În momentul în care corpul atinge Pămîntul:

$$y = 0, \quad E_{max} = \frac{1}{2} mv^2_{max} = mgh, \quad v_{max} = \sqrt{2gh},$$

energia cinetică este maximă, iar cea potenţială nulă.

La începutul ciocnirii,[2] mişcarea mecanică, măsurată prin energia cinetică $\frac{1}{2} mv^2_{max}$, trece în mişcare nemecanică, exprimată printr-o cantitate echivalentă de lucru mecanic de deformaţie a corpurilor. În ipoteza deformaţiei perfect elastice, acest lucru mecanic măsoară energia potenţială acumulată în sistemul corp-Pămînt întocmai ca într-un resort comprimat.

La sfîrşitul ciocnirii, întreaga energie potenţială se transformă în energie cinetică $\left(\frac{1}{2} mv^2_{max}\right)$, iar corpul se depărtează de Pămînt. Trecerea formei mecanice în forma nemecanică a mişcării se continuă apoi pînă în momentul în care:

$$v = 0, \qquad y = h. \qquad F = 0, \qquad E_P = mgh.$$

După care întreg procesul reîncepe şi s-ar repeta la infinit (mişcare perpetuă) dacă ipotezele considerate ar fi reale.

3° Însă mişcarea mecanică perpetuă nu este posibilă din următoarele cauze:

— Sistemul corp-Pămînt nu este izolat, lucrul mecanic al forţelor exterioare nu este nul, astfel rezistenţa aerului produce — atît înainte de ciocnire cît şi după ciocnire — lucru mecanic rezistent.

— În timpul ciocnirii, particulele fiecărui corp se deplasează unele faţă de altele, se freacă între ele, iar prin frecare se degajează energie termică. Această energie se transmite mediului înconjurător. Chiar dacă nu s-ar transmite, se ştie că energia termică rezultată din frecări nu se transformă de la sine în energie mecanică.

— Deformaţiile nu sînt perfect elastice, deci nu se restituie întreg lucrul mecanic de deformaţie sub formă de energie cinetică, astfel că, de fiecare dată, energia cinetică după ciocnire fiind mai mică, corpul se ridică la o înălţime mai mică. Mişcarea oscilatorie este amortizată în momentul în care corpul rămîne la suprafaţa Pămîntului.

— Mişcarea mecanică a materiei trece în alte forme de mişcare: de deformaţie neelastică, termică, luminoasă etc.

Dacă se iau în considerare şi energiile corespunzătoare, se poate conchide că: *energia mecanică nu dispare, ci se transformă în alte forme de energie şi că, în orice moment, energia totală a unui sistem material se conservă.*

Cum nu se poate concepe mişcare şi energie în afara materiei, se poate ajunge astfel la principiul fundamental al fizicii, la principiul conservării materiei şi energiei.

---

[1] Se înţelege că în această problemă nu joacă rol mişcarea Pămîntului, la care participă şi corpul.

[2] v. cap. XV. B. *Ciocniri. Percuţii.*

§ 139. Aplicații

1° O pompă lucrînd fără încetare ridică, în timp de 24 ore, 3 240 t apă la înălțimea de 30 m. Să se calculeze, în kW și CP, puterea utilă furnizată.

Rezolvare. Lucrul mecanic util este de 97 200 000 kgfm, care trebuie furnizat în 86 400 s, deci:

$$P_u = \frac{97\,200\,000}{86\,400}\ \frac{\text{kgfm}}{\text{s}} = 1\,125\ \frac{\text{kgfm}}{\text{s}} = 15\ \text{CP} = 11{,}04\ \text{kW}.$$

Observație. Din cauza pierderilor în conducte, în pompă, în motorul care acționează pompa etc., puterea motoare (P_m) trebuie să fie mai mare.

Se numește randament[1] al unei instalații raportul dintre puterea utilă (P_u) pe care o furnizează și puterea pe care o primește (P_m):

$\eta = \frac{P_u}{P_m} < 1$; diferența $P_m - P_u = P_p$ este puterea pierdută.

De exemplu, dacă puterea primită de instalație este de 20 CP, randamentul instalației este 0,75, adică 75%.

2° O sanie pornind din A fără viteză inițială se mișcă pe planul înclinat de $\sphericalangle \alpha$ față de planul orizontal și parcurge fără frecare drumul l_1. În B, sania continuă mișcarea pe planul orizontal și se oprește în C din cauza frecării, după ce a parcurs drumul l_2 (fig. 340). Să se calculeze coeficientul de frecare dintre sanie și planul orizontal.

Rezolvare. Teorema energiei cinetice dă pentru primul parcurs AB:

$$\frac{1}{2} mv^2 - 0 = mgh = mgl_1 \sin \alpha,$$

unde m este masa saniei. În continuare, energia cinetică este transformată în lucru mecanic pentru învingerea frecării:

$$0 - \frac{1}{2} mv^2 = -\mu(mg)l_2$$

și pînă la sfîrșit:

$$\mu = \frac{l_1 \sin \alpha}{l_2}.$$

3° O roată omogenă de masă M și rază R se rostogolește, fără să alunece, pe o șină orizontală (fig. 341). Să se calculeze energia cinetică a roții în momentul în care viteza centrului ei O este $\bar{v}$.

Rezolvare. Aplicînd teorema lui Koenig:

$$E = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2,$$

unde $J = \frac{1}{2} MR^2$ și $\varepsilon = \frac{v}{R}$ (condiția rostogolirii fără alunecare), se găsește: $E = \frac{3}{4} Mv^2$.

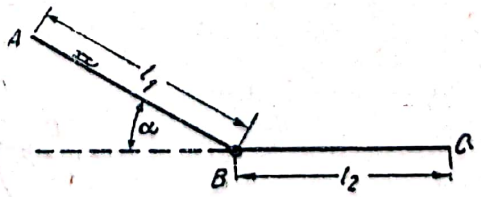


Fig. 340

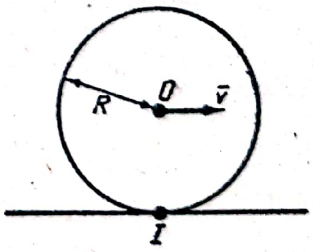


Fig. 341

[1] v. cap. XV. A. *Mașini simple.* § 149.

Observaţie. Deoarece I este centrul instantaneu de rotaţie, iar viteza unghiulară instantanee este tot ω:

$$E = \frac{1}{2} J_I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{2} MR^2 \omega^2 = \frac{3}{4} Mv^2,$$

unde J_I este momentul de inerţie calculat în raport cu axa care trece prin I perpendicular pe planul roţii.

4° Să se studieze mişcarea unui scripete omogen de masă M şi rază R pe care este înfăşurat un fir de masă neglijabilă şi de capătul căruia este agăţat un corp de masă m. Studiul se va face în funcţie de deplasarea x a corpului, în ipoteza că firul nu alunecă şi că se neglijează frecările (fig. 42).

Rezolvare. În intervalul de timp t, sistemul pornind din repaus, firul se desfăşoară cu lungimea x. Aplicînd teorema energiei cinetice:

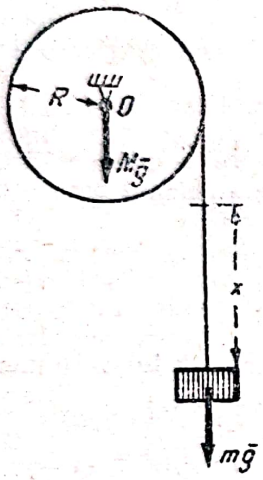


Fig. 342

$$\frac{1}{2}(J\omega^2 + mv^2) - 0 = mgx, \text{ unde: } J = \frac{MR^2}{2} \text{ şi } \omega = \frac{v}{R},$$

se obţine:

$$v^2 = \frac{4\,mg\,x}{M + 2m},$$

de unde:

$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{2m}{M + 2m} g,$$

iar:

$$t = \sqrt{\frac{(M + 2m)\,x}{mg}} \text{ şi } x = \frac{mg\,t^2}{M + 2m}.$$

Observaţie. Ca o verificare, în cazul cînd masa scripetelui ar fi nulă, se regăsesc rezultatele $a = g$, $x = \frac{g}{2} t^2$, de la căderea liberă în vid.

5° Scara dublă $A_0B_0A_0'$, formată din două bare omogene identice de lungime $2l$, avînd centrele de masă în C_0 şi C_0' (fig. 343), articulate în B_0, este menţinută în repaus pe un plan orizontal perfect neted de un fir neextensibil DD'. Într-un moment oarecare, scara începe să cadă în urma suprimării firului. Dacă se neglijează toate frecările, să se calculeze viteza punctului B într-un moment oarecare şi în momentul în care B atinge planul orizontal (I. V. Meşcerski).

Rezolvare. Notînd cu m masa fiecărei bare, cu h înălţimea de la care cade articulaţia B_0 şi cu y înălţimea aceluiaşi punct în poziţia B şi momentul t, se poate aplica teorema energiei cinetice pentru ansamblul scării. Deoarece forţele exterioare sînt numai verticale, centrul de masă al sistemului se va mişca pe verticală.

Energia cinetică a unei bare, de exemplu AB, se compune din energia cinetică a centrului C în care se presupune concentrată masa m şi energia cinetică în mişcarea de rotaţie a barei în jurul lui C:

$$E = \frac{1}{2} mv_c^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2,$$

unde: v_c este viteza centrului C, iar θ unghiul barei cu verticala.

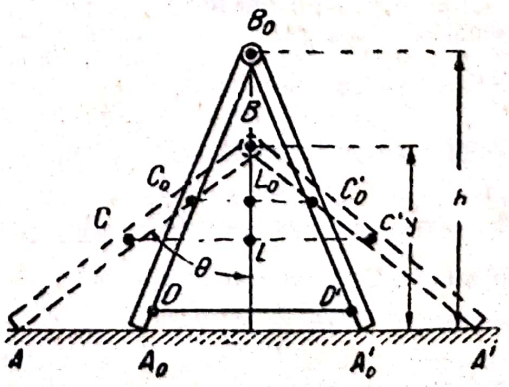


Fig. 343

Se arată că:

$$|\bar{v}_c| = l\,\dot{\theta},\ J = \frac{m(2l)^2}{12} = \frac{ml^2}{3},$$

astfel că:

$$E = \frac{1}{2}\,ml^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{ml^2}{3}\,\dot{\theta}^2 = \frac{2ml^2\,\dot{\theta}^2}{3},$$

iar teorema energiei cinetice pentru întreaga scară se exprimă prin:

$$2\,\frac{2ml^2\dot{\theta}^2}{3} - 0 = 2\,mg\,L_0L = 2\,mg\left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2}\right).$$

Cum:

$$y = 2\,l\cos\theta\ \ v = 2\,\dot{\theta}\,l\sin\theta,\ \ \dot{\theta} = \frac{v}{\sqrt{4l^2 - y^2}};$$

înlocuind, se găsește viteza punctului B:

$$v = \frac{1}{2l}\sqrt{3g(h - y)\ (4l^2 - y^2)}.$$

Pentru:

$$y = 0,\ v = \sqrt{3gh}$$

iar pentru:

$$y = \frac{h}{2},\ \ v = \frac{1}{4l}\sqrt{\frac{3}{2}\,gh(16l^2 - h^2)}.$$

E. METODE GENERALE

§ 140. Principiul lui d'Alembert. Metoda cinetostatică

a. În introducere la § 8 (*Principiul acțiunii și reacțiunii*) s-a scos în evidență noțiunea de *forță de inerție*. Dacă se consideră un sistem izolat de puncte materiale M și M' de mase m și m' în interacțiune, dacă $\bar{F}$ și $\bar{F}'$ sînt forțele de interacțiune, principiul III se exprimă prin ecuația:

$$\bar{F} + \bar{F}' = 0^1. \tag{13.71}$$

Mișcarea punctului M sub acțiunea, reprezentată prin $\bar{F}$, a punctului material M' se studiază cu ajutorul ecuației fundamentale:

$$\bar{F} - m\bar{a} = 0. \tag{13.72}$$

---

[1] Se presupune satisfăcută și condiția ca forțele să acționeze pe același suport: $\bar{r} \times \bar{F} + \bar{r}' \times \bar{F}' = 0$.

Forţa $\bar{F}'$ *nu acţionează* asupra punctului M, deoarece dacă ar fi aşa, în baza ecuaţiei (13.71), cele două forţe s-ar echilibra, iar mişcarea punctului ar fi uniformă ($\bar{a} = 0$) şi în acest caz nu s-ar putea scrie ecuaţia (13.72).

Forţa $\bar{F}'$, *reacţiunea* punctului M faţă de acţiunea punctului M', care tinde să-i modifice mişcarea sau repausul, adică tinde să-l scoată din „inerţia lui", se mai numeşte *forţă de inerţie* şi *acţionează numai asupra punctului* M'. Punctul M', cel care acţionează asupra punctului considerat M, este denumit „agent" şi poate fi reprezentat concret prin orice corp care acţionează fie prin contact (fluid sau solid prin legătură), fie la distanţă (Pământul). Forţa de inerţie acţionează asupra agentului.

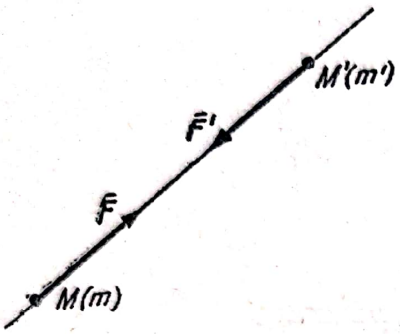


Fig. 344

Scriind ecuaţia fundamentală (13.72) sub forma :

$$\bar{F} + (-m\bar{a}) = 0 \qquad (13.73)$$

şi comparînd-o cu (13.71), se observă că termenul $-m\bar{a}$ are dimensiunile unei forţe :

$$\bar{F}' = -m\bar{a} \qquad (13.74)$$

şi poate fi forţa de inerţie. Deoarece ea nu se aplică punctului M, ecuaţia (13.73) nu este o condiţie de echilibru real, ci una de *echilibru fictiv* a unui sistem de forţe, adică :

Dacă la toate forţele date şi de legătură $\bar{F}$, *aplicate unui punct material de masă* m *în mişcare, se adaugă şi forţa de inerţie* $-m\bar{a}$, *se obţine un sistem de forţe în echilibru.*

Acesta este, sub o formă simplă, enunţul unui principiu care poartă numele lui d'Alembert şi care joacă un rol fundamental în mecanica analitică.

b. *Observaţii şi consecinţe.* 1° Cîteva exemple simple pot lămuri caracterul forţei de inerţie şi al echilibrului fictiv. Astfel, un corp asimilabil cu un punct material, de masă m, este atras de Pământ cu forţa $\bar{G}$, care îi imprimă acceleraţia $\bar{g}$ determinată prin ecuaţia :

$$\bar{G} - m\bar{g} = 0.$$

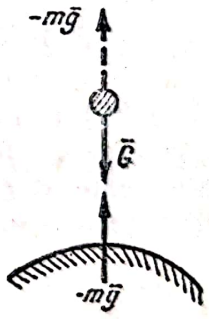


Fig. 345

Dacă forţa de inerţie $-m\bar{g}$ ar fi fost şi ea aplicată corpului, $\bar{G}$ şi $-m\bar{g}$ s-ar fi echilibrat, iar corpul ar fi rămas în repaus sau ar fi avut o mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă. Cum este evident că mişcarea corpului este accelerată, forţa $-m\bar{g}$ nu acţionează asupra lui, ecuaţia precedentă este o condiţie de echilibru fictiv, iar forţa $-m\bar{g}$, reacţiunea corpului faţă de acţiunea Pământului, este aplicată Pământului (fig. 345).

Efectul forţei de inerţie asupra Pământului este practic nul din cauza disproporţiei dintre m şi masa Pământului.

Un alt exemplu în care se scot în evidenţă şi forţele de legătură îl constituie mişcarea pendulului simplu (fig. 346). S-a notat cu m masa punctului material M, cu $\bar{G}$ greutatea, forţa dată, cu $\bar{N}$ forţa de legătură din fir. Asupra punctului M acţionează numai forţele $\bar{G}$ şi $\bar{N}$. Acceleraţia $\bar{a}$ are direcţia *rezultantei*:

$$\bar{F} = \bar{G} + \bar{N}. \tag{13.75}$$

Mişcarea punctului M se produce pe cercul cu centrul în O, iar ecuaţia mişcării este:

$$\bar{G} + \bar{N} - m\bar{a} = 0. \tag{13.76}$$

Notînd şi $(-m\bar{a})$ cu $\bar{F}'$, ecuaţia (13.76) devine, la fel cu (13.71), o ecuaţie de echilibru fictiv.

Că echilibrul este fictiv rezultă din observarea mişcării; M nu descrie o linie dreaptă, ci un cerc. Deci forţa de inerţie este o forţă fictivă pentru punctul material M, dar este *reală* pentru fir (legătură). Firul este acţionat de forţele $\bar{G}$ şi $\bar{F}'$, adică de rezultanta lor: $\bar{N}' = \bar{G} + \bar{F}'$. Se înţelege că $\bar{N} + \bar{N}' = 0$, dar $\bar{N}$ şi $\bar{N}'$ nu se echilibrează, deoarece $\bar{N}$ nu acţionează asupra firului, ci asupra punctului material.

În sfîrşit, forţa de inerţie acţionează şi asupra agentului motor, care în problema dată este Pămîntul.

2° Într-o mecanică bazată pe principiile lui Newton, principiul lui d'Alembert, exprimat în această formă, apare ca o consecinţă. De aceea şi aici nu va fi folosit ca principiu, ci va sta la baza unei metode pentru rezolvarea problemelor de dinamică cu mijloacele staticii, metodă denumită *cinetostatică*. Cu această metodă se determină atît legea mişcării punctului material cît şi forţele de legătură dinamice. Se ştie că forţele de legătură dinamice diferă de cele statice (v. §§ 107, 123).

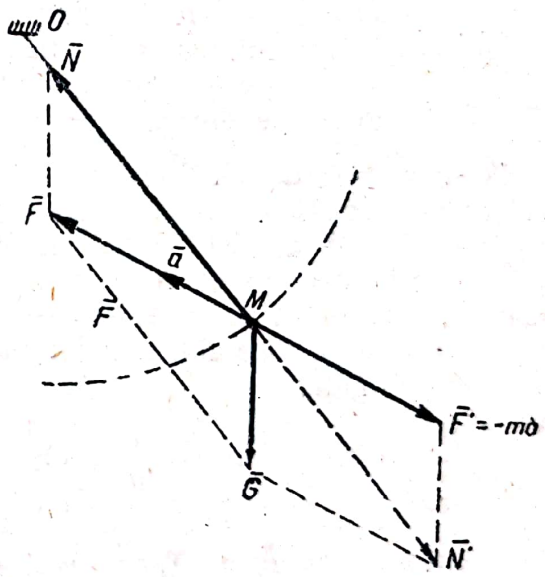


Fig. 346

3° Despre metoda cinetostatică s-a amintit şi în § 123 (*Echilibrul relativ*), unde — în condiţia de echilibru relativ — apar, în afara forţelor date şi de legătură, şi forţele de transport. *Metoda este aceeaşi*, deoarece atît condiţia de echilibru cît şi forţele de transport: $\bar{F}_t = -m\bar{a}_t$, au aceeaşi formă ca în cazul forţelor de inerţie.

Forţa de transport împreună cu forţa Coriolis, denumite *forţe complementare*, sînt forţe inerţiale. Totuşi, cu tot caracterul lor inerţial, între forţele complementare şi forţele de inerţie există o deosebire esenţială.

Forţele complementare nu intervin decît în echilibrul şi mişcarea relativă, de exemplu în mişcarea relativă a punctului material în raport cu un

triedru mobil. În mişcarea faţă de acest triedru, forţele complementare *se consideră* aplicate punctului material, pe cînd forţele de inerţie nu sînt aplicate punctului în mişcare.

În mişcarea faţă de un triedru fix sau inerţial, forţele complementare *nu există*, pe cînd forţele de inerţie *sînt reale*, însă se aplică nu punctului material, ci legăturii sau agentului motor.

4° Condiţia de echilibru fictiv[1], aplicată unui punct material, se poate aplica şi unui sistem material.

Astfel, dacă se consideră un sistem de solide rigide şi se izolează unul din aceste solide, se pot scrie condiţiile de echilibru fictiv exprimînd că *forţele exterioare date şi de legătură, aplicate solidului, la care se adaugă şi forţele de inerţie pentru toate particulele solidului izolat, formează un sistem echivalent cu zero*, adică :

$$\bar{R} + \bar{R}' = 0 \quad \text{şi} \quad \bar{M}_o + \bar{M}_o' = 0, \tag{13.77}$$

unde :

$\bar{R}$ este suma vectorială a forţelor exterioare date şi de legătură;
$\bar{M}_o$ — momentul rezultant al forţelor exterioare date şi de legătură în raport cu O, originea reperului;
$\bar{R}'$ — suma vectorială a forţelor de inerţie;
$\bar{M}_o'$ — momentul rezultant, în raport cu originea reperului O, al forţelor de inerţie presupuse aplicate particulelor materiale din care se compune solidul rigid izolat.

Pe scurt, *relaţiile* (13.77) *exprimă echilibrul torsorului, în raport cu un punct O, al forţelor exterioare date şi de legătură, aplicate solidului rigid, cu torsorul în raport cu O, al forţelor de inerţie presupuse aplicate particulelor solidului.*

În continuare, se izolează succesiv fiecare solid al sistemului şi se aplică metoda cinetostatică. Evident, se ţine seamă şi de relaţiile dintre forţele de legătură reciprocă ale solidelor, care, se ştie, sînt forţe interioare în sistemul de solide rigide.

5° Deoarece : $m\bar{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\bar{v})$, se observă că :

$$\bar{R}' = \Sigma(-m\bar{a}) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Sigma m\bar{v} = -\dot{\bar{H}},$$

iar :

$$\bar{M}'_o = \Sigma \bar{r} \times (-m\bar{a}) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Sigma \bar{r} \times m\bar{v} = -\dot{\bar{K}}_o,$$

adică : *componentele torsorului, în raport cu un punct fix O, al forţelor de inerţie, presupuse aplicate unui solid rigid în mişcare, sînt egale cu derivatele, în raport cu timpul, cu semne schimbate, a cantităţii de mişcare, respectiv a momentului cinetic.*

[1] Denumit şi echilibru dinamic.

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în (13.77), se ajunge la:

$$\bar{R} - \dot{\bar{H}} = 0 \text{ şi } \bar{M}_o - \dot{\bar{K}}_o = 0,$$

ecuaţii care nu exprimă altceva decît teorema cantităţii de mişcare şi teorema momentului cinetic, aplicate solidului rigid considerat.

Această observaţie uşurează calculul torsorului forţelor de inerţie.

§ 141. Aplicaţii

1° Să se studieze prin metoda cinetostatică mişcarea pendulului simplu (§ 108).

Rezolvare. Se notează cu: $\bar{F} = \bar{G} + \bar{N}$ forţele date ($\bar{G}$) şi de legătură ($\bar{N}$), cu m masa punctului M, cu $\bar{a} = \dot{v}\,\bar{\imath} + \frac{v^2}{R}\,\bar{n}$ acceleraţia punctului M şi componentele ei după tangenta şi normala în M la cerc şi cu $\bar{F}' = -m\dot{v}\bar{\imath} - m\frac{v^2}{R}\,\bar{n}$ forţa de inerţie descompusă după axele Mtn.

Condiţia vectorială de echilibru fictiv:

$$m\bar{g} + \bar{N} - m\dot{v}\,\bar{\imath} - m\frac{v^2}{R}\,\bar{n} = 0,$$

proiectată pe tangenta (Mt) şi pe normala Mn:

$$-mg\sin\theta - m\dot{v} = 0,$$

$$-mg\cos\theta + N - m\frac{v^2}{R} = 0,$$

duce la ecuaţiile cunoscute:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0,$$

$$N = m\left(\frac{v^2}{R} + g\cos\theta\right),$$

iar rezolvarea se continuă ca la § 108.

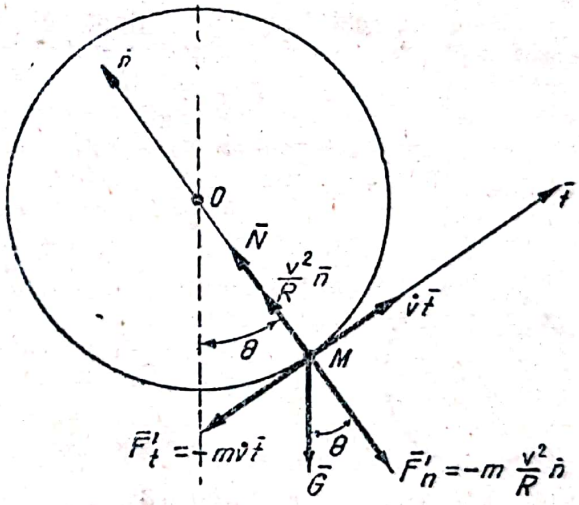


Fig. 347

2° Un biciclist, asimilat cu un punct material de masă m, porneşte din A, fără viteză iniţială, de pe înălţimea h, pe panta AB, după care se angajează în interiorul cercului de rază r. Să se calculeze înălţimea h minimă pentru ca biciclistul, ajuns în C, să nu se desprindă de pe cerc (fig. 348).

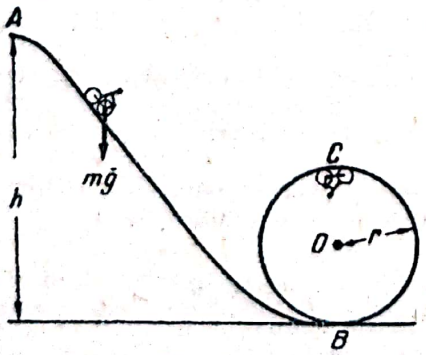


Fig. 348

Rezolvare. Condiţia este ca în C reacţiunea cercului să fie orientată spre centrul O al cercului. Problema poate fi privită ca o aplicaţie atît la mişcarea punctului material pe o curbă fixă cît şi la metoda cinetostatică.

În primul rînd, teorema energiei cinetice aplicată pentru mişcarea între A şi C duce la: $mg(h - 2r) = \frac{1}{2}mv^2$, de unde se obţine acceleraţia normală în C:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{2g(h-2r)}{r}.$$

În al doilea rînd, scriind că greutatea biciclistului (mg), reacţiunea normală a cercului (N) şi forţa de inerţie $\left(m\frac{v^2}{r}\right)$ formează un sistem de forţe în echilibru (fictiv), se aplică metoda cinetostatică:

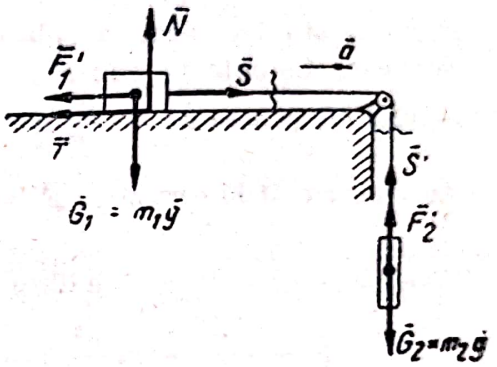
$$-mg - N + \frac{2g(h-2r)}{r}m = 0 \text{ şi } N = mg\left(\frac{2h}{r} - 5\right).$$

Deoarece condiţia este ca $N \geqslant 0$, rezultă că $h \geqslant \frac{5r}{2}$.

În realitate, h trebuie să fie mărit, pentru a se compensa pierderile de viteză ale biciclistului datorită frecărilor şi rezistenţei aerului.

3° Să se rezolve prin metoda cinetostatică aplicaţia 1°, § 130.

Rezolvare. Se presupune că sistemul se mişcă în sensul săgeţii cu acceleraţia $\bar{a}$, se izolează cele două solide, asimilate cu puncte materiale, introducînd atît forţele de legătură $\bar{S}$, $\bar{S}'$, cît şi forţele de inerţie (fig. 349).



Fip. 349

Ecuaţiile de echilibru fictiv, după direcţia şi sensul deplasării, exprimate scalar sînt:

$$-m_1 a - T + S = 0,$$
$$-m_2 a - S + m_2 g = 0,$$

unde s-a ţinut seama de egalitatea: $|\bar{S}| = |\bar{S}'| = S$. Evident, se găsesc aceleaşi rezultate ca la § 130.

4° Un disc circular omogen de masă M şi rază R se roteşte cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ în jurul unei axe fixe (Δ) care trece printr-un punct O' al periferiei discului, perpendicular pe planul discului. Să se calculeze torsorul, în raport cu O', al forţelor de inerţie (fig. 350).

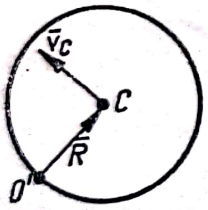


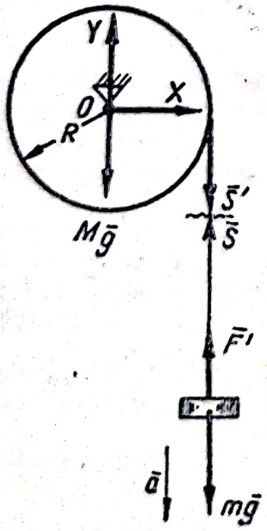
Fig. 350

Rezolvare. Se ştie că $\bar{H} = M\,\bar{v}_c$ şi $\dot{\bar{K}}_\Delta = J\,\bar{\omega}$, unde

$J = \frac{3}{2}MR^2$. Pe de altă parte:

$$\bar{R}' = -\dot{\bar{H}} = -M\bar{a}_c,\quad \bar{M}_o' = -\dot{\bar{K}}_\Delta = -\frac{3}{2}MR^2\,\dot{\bar{\omega}}$$

Rezultatele se completează cu: $\bar{v}_c = \bar{\omega} \times \bar{R}$, $\bar{a}_c = \dot{\bar{v}}_c$ etc., unde $\bar{R}$ este vectorul de poziţie al centrului C al discului în raport cu reperul cu centrul în O'.



Eig. 35

5° Să se aplice metoda cinetostatică la studiul mişcării scripetelui omogen de masă M şi rază R, acţionat ca în figura 351. Să se calculeze tensiunea în fir şi reacţiunea din axa scripetelui.

Rezolvare. Se izolează scripetele de corpul care este suspendat de fir, prin suprimarea firului şi introducerea tensiunilor $\bar{S}$ şi $\bar{S}'$.

Se consideră că asupra corpului mai acţionează, în afară de greutatea $m\bar{g}$, şi forţa de inerţie: $\bar{F}' = -m\bar{a}$, unde $\bar{a}$ este acceleraţia corpului atîrnat.

Ecuaţia de echilibru este: $S + ma - mg = 0$.

La fel, se consideră că asupra scripetelui acționează, în afară de greutatea lui, $M\bar{g}$, forța de legătură $\bar{S}'$, reacțiunea din axă (X, Y), precum și torsorul forțelor de inerție:

$\bar{R}' = -M\bar{a}_O = 0$, deoarece O este fix, și $\bar{M}' = -J_O\dot{\bar{\omega}} = -\frac{MR^2\dot{\bar{\omega}}}{2}$.

Scriind ecuațiile scalare de echilibru:

$$X = 0, \qquad Y - Mg - S' = 0, \qquad \frac{MR^2\dot{\omega}}{2} - S'R = 0$$

și ținînd seama de $R\dot{\omega} = a$ și $S = S'$, se obține:

$$a = \frac{2m}{M+2m}g, \qquad S = \frac{Mm}{M+2m}g,$$

$$X = 0, \qquad Y = Mg\left(1 + \frac{m}{M+2m}\right).$$

§ 142. Principiul lucrului mecanic virtual. Metoda deplasărilor virtuale

a. Se consideră un punct material M de masă m acționat de forța dată $\bar{F}$ și supus unor legături. Legăturile sînt presupuse scleronome și bilaterale. Astfel, pendulul sferic este un punct material obligat să rămînă la o distanță invariabilă de un punct fix O. Această legătură îi permite punctului orice fel de deplasare, însă numai pe suprafața, invariabilă cu timpul, a sferei cu centrul în O și cu raza egală cu lungimea barei OM.

Orice deplasare a punctului material, de la o poziție la alta, permisă de legături, se numește deplasare *compatibilă cu legăturile*. Deplasările punctului material pot fi *efective* (*reale*), dacă sînt datorite forțelor care le acționează, sau pot fi *virtuale*, înțelegînd prin aceasta că trecerea punctului material de la o poziție la alta este numai *posibilă* și că nu se produce efectiv sub acțiunea forțelor. Se înțelege că deplasarea efectivă este cuprinsă în deplasările posibile.

În afară de aceste deplasări se mai pot denumi *incompatibile* cu legăturile, deplasările care nu sînt posibile atît timp cît nu sînt suprimate unele sau toate legăturile.

Astfel, dacă un punct material M este chiar articulația comună a două bare rigide O_1M și O_2M, care mai sînt articulate și în două puncte fixe O_1 și O_2 (articulații sferice), punctul M poate fi deplasat pe un cerc, însă nu poate fi deplasat oriunde pe sfera cu centrul în O_1 și cu raza O_1M (deplasare incompatibilă cu legăturile) decît dacă se suprimă bara O_2M.

Dacă sub acțiunea unei forțe $\bar{F}$ punctul material are *efectiv* o deplasare elementară reprezentată prin $d\bar{r}$, lucrul mecanic elementar este: $\Delta L = \bar{F}\,d\bar{r}$.

Însă dacă punctul material, acționat de forța $\bar{F}$, este presupus deplasat într-o poziție infinit vecină compatibilă cu legăturile, se zice că acestei deplasări virtuale îi corespunde un *lucru mecanic virtual* elementar, avînd expresia[1]: $\delta L = \bar{F}\,\delta\bar{r}$.

[1] Deplasării elementare efective îi corespunde $d\bar{r}$, iar deplasării elementare virtuale, $\delta\bar{r}$. De asemenea s-a notat cu δL lucrul mecanic elementar virtual. Se știe că lucrul mecanic elementar efectiv $\bar{F}d\bar{r}$ este notat cu ΔL.

Scanned with OKEN Scanner

Legăturile se numesc *ideale* dacă lucrurile mecanice elementare ale tuturor forţelor de legătură corespunzînd oricăror deplasări compatibile cu legăturile sînt nule.

Legăturile denumite *normale* (v. § 68) fiind perpendiculare pe deplasările compatibile cu ele, forţele de legătură dau lucru mecanic nul. Se înţelege că lucrul mecanic al forţelor de legătură este nul şi în cazul legăturii care nu permite deplasări punctului de aplicaţie al forţei de legătură (de exemplu, în cazul articulaţiei fixe).

Legăturile ideale sînt legături *fără frecări.*

b. **Teoremă.** *Pentru ca un punct material cu legături ideale, independente de timp, acţionat de forţa dată* $\bar{F}$, *să rămînă în repaus într-o poziţie anumită, este necesar şi suficient ca lucrul mecanic virtual al forţei date, pentru orice deplasare elementară compatibilă cu legăturile, să fie nul.*

Condiţia este necesară, deoarece, notînd cu $\bar{N}$ forţele de legătură, din condiţia de echilibru:

$$\bar{F} + \bar{N} = 0, \tag{13.78}$$

rezultă:

$$\delta L = (\bar{F} + \bar{N})\,\delta\bar{r} = 0;$$

cum legăturile sînt ideale:

$$\bar{N}\,\delta\bar{r} = 0, \tag{13.79}$$

astfel că:

$$\bar{F}\,\delta\bar{r} = 0^{1} \tag{13.80}$$

este o conseeinţă imediată a ecuaţiei (13.78).

Condiţia este suficientă.[2] Dacă punctul material nu ar rămîne în repaus, el ar avea o deplasare efectivă reprezentată prin $d\bar{r}$ sub acţiunea forţelor $\bar{F}$ şi $\bar{N}$ şi, deoarece ar porni din repaus, $d\bar{r}$ ar avea direcţia şi sensul rezultantei $\bar{F} + \bar{N}$, deci:

$$(\bar{F} + \bar{N})\,d\bar{r} > 0. \tag{13.81}$$

Deoarece deplasările efective pentru legături independente de timp sînt compatibile cu legăturile:

$$\bar{F}\,d\bar{r} = 0, \tag{13.82}$$

potrivit condiţiei satisfăcute (13.80).

---

[1] Relaţia rămîne valabilă şi în cazul legăturilor reonome ideale, $\delta\bar{r}$ reprezentînd o deplasare posibilă pentru legătura presupusă fixă în momentul considerat.

[2] Pentru cazurile curente întîlnite în mecanică.

Scanned with OKEN Scanner

În consecință, din (13.81) și (13.82) rezultă că trebuie ca: $\bar{N}\,d\bar{r} > 0$, ceea ce este absurd, deoarece legăturile sînt ideale. Deci, dacă condiția (13.80) este satisfăcută, punctul material rămîne în repaus.

Teorema se poate enunța și demonstra și în cazul unui sistem de puncte materiale.

Pentru ca un sistem de n puncte materiale M_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, *cu legături ideale, bilaterale, independente de timp, acționat de forțele date* $\bar{F}_i$ *să rămînă în repaus într-o poziție anumită, este necesar și suficient ca suma lucrurilor mecanice virtuale elementare, corespunzătoare forțelor date, să fie nulă pentru orice deplasare compatibilă cu legăturile.*

Observații și consecințe. 1° Enunțată și demonstrată de Lagrange, teorema stă la baza mecanicii analitice sub denumirea de *principiul deplasărilor virtuale.*

În mecanica clasică, teorema stă la baza *metodei deplasărilor virtuale*, cu ajutorul căreia se pot determina pozițiile de repaus (echilibru) ale unui sistem material.

2° Din principiul deplasărilor virtuale, Lagrange a dedus principiul lui d'Alembert exprimat sub forma:

Dacă un sistem de puncte materiale, acționat de forțe date, avînd legături ideale, bilaterale, dependente sau nu de timp, este în mișcare, în fiecare moment:

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{F}_i - m_i\bar{a}_i)\,\delta\bar{r}_i = 0 \qquad (13.83)$$

pentru toate deplasările virtuale compatibile cu legăturile din acel moment.

3° O consecință a teoremei deplasărilor virtuale este și teorema[1] lui *Torricelli:*

Poziția de repaus (echilibru) a unui sistem material cu legături ideale, asupra căruia nu acționează decît greutățile particulelor sistemului, corespunde cu poziția în care centrul de masă al sistemului este în cea mai de sus sau în cea mai de jos din toate pozițiile permise de legăturile sistemului.

Demonstrarea teoremei se face pentru cazul unui sistem de puncte materiale. Notînd cu m_i masa, cu $\bar{r}_i$ vectorul de poziție față de un reper fix, și cu $m_i\bar{g}$ greutatea unui punct al sistemului, condiția necesară și suficientă pentru echilibru este:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{g}\,\delta\bar{r}_i = 0$$

sau:

$$\delta L = \bar{g}\delta\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i = \bar{g}\,\delta\, m\bar{r}_c = m\bar{g}\,\delta\bar{r}_c = 0,$$

unde m este masa sistemului, iar $\bar{r}_c$ vectorul de poziție al centrului de masă.

Alegînd axa Oz după verticală, condiția devine:

$$\delta L = -mg\bar{k}\,\delta(x_c\bar{i} + y_c\bar{j} + z_c\bar{k}) = -mg\,\delta z_c = 0$$

sau $\delta z_c = 0$, adică z_c, *cota centrului de masă, să fie maximă sau minimă.*

[1] De obicei este prezentată sub formă de principiu.

Dacă cota centrului de masă este maximă, sistemul este *în echilibru instabil*, iar dacă cota este minimă, sistemul se găseşte *în echilibru stabil.*

Dacă z_c nu variază, adică centrul de masă rămîne într-un plan orizontal, echilibrul sistemului este *indiferent.*

§ 141. Aplicaţii

1° Un inel poate aluneca fără frecare pe un cerc din sîrmă, situat într-un plan vertical, cu centrul în O (fig. 352). De inel atîrnă un corp C de greutate $\bar{G}$ şi, de asemenea, legat de inel printr-un fir care trece peste un scripete foarte mic, fixat în punctul B (cel mai înalt al cercului), acţionează greutatea $\bar{G}_1$ a unui corp D. Să se afle $\sphericalangle AOB = \theta$ pentru poziţia de echilibru (Colectiv B u c h h o l t z. *Culegere de probleme. E.* T).

Rezolvare. Forţele care acţionează asupra inelului A sînt: $\bar{G}$, reacţiunea normală $\bar{N}$ şi tensiunea $\bar{S}$ din firul AB: $|\bar{S}| = G_1$.

Coordonatele punctului A în raport cu sistemul de axe Oxy (fig. 352) sînt: $x_A = -R\sin\theta$, $y_A = R\cos\theta$, iar valorile proiecţiilor forţei $\bar{S}$ pe axă sînt: $X = G_1 \cos\frac{\theta}{2}$, $Y = G_1 \sin\frac{\theta}{2}$. Apoi, presupunînd sensul deplasării virtuale astfel încît $\delta\theta > 0$, se calculează:

$$\delta x_A = -R\,\delta\theta\cos\theta, \qquad \delta y_A = -R\,\delta\theta\sin\theta,$$

şi deoarece lucrul mecanic al reacţiunii $\bar{N}$ este nul, exprimînd condiţia:

$$\delta L = GR\,\delta\theta\sin\theta - \left(G_1\cos\frac{\theta}{2}\right)R\,\delta\theta\cos\theta - \left(G_1\sin\frac{\theta}{2}\right)R\,\delta\theta\sin\theta = 0,$$

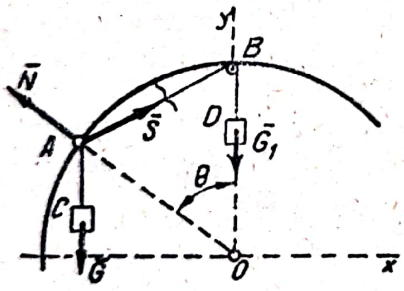


Fig. 352

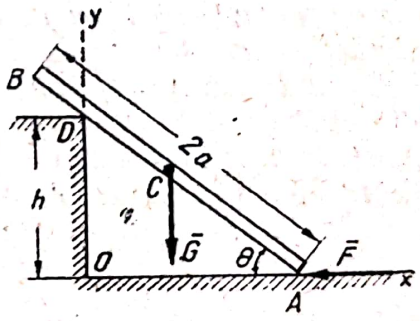


Fig. 353

se găseşte:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{G_1}{2G} \quad \text{şi} \quad \cos\frac{\theta}{2} = 0 \text{ etc.}$$

2° O bară $AB = 2a$, omogenă, de greutate $\bar{G}$, este rezemată în A pe un plan orizontal şi într-un punct D (fig. 353). Neglijînd frecările, se cere să se calculeze forţa $\bar{F}$ care trebuie aplicată în A pentru a menţine bara în poziţia de echilibru determinată de $\sphericalangle\,\theta$.

Rezolvare. Se calculează ordonata y_c a centrului de masă C al barei şi abscisa x_A a punctului A în raport cu sistemul de axe Oxy:

$$y_c = a\sin\theta, \qquad \delta y_c = a\,\delta\theta\cos\theta,$$

$$x_A = h\operatorname{ctg}\theta, \qquad \delta x_A = -\frac{h\,\delta\theta}{\sin^2\theta}.$$

Se exprimă condiția lucrului mecanic virtual:

$$Ga\,\delta\theta\cos\theta - F\frac{h\,\delta\theta}{\sin^2\theta} = 0,$$

de unde:

$$F = \frac{Ga\sin^2\theta\cos\theta}{h}.$$

3° Să se aplice metoda deplasărilor virtuale și principiul lui Torricelli la rezolvarea aplicației 1° (§ 87); determinarea poziției de echilibru și a reacțiunilor din D și E ale sistemului de bare AC și BC în situația indicată în figura 354.

Rezolvare. În raport cu sistemul de axe Oxy, care are originea în O, mijlocul segmentului DE, centrul de masă al sistemului de bare are ordonata:

$y = -\frac{1}{2}\left(l - \frac{a}{\cos\theta}\right)\sin\theta = -\frac{l}{2}\sin\theta + \frac{a}{2}\operatorname{tg}\theta$, iar din condiția:

$$\delta y = \frac{1}{2}\left(-l\cos\theta + \frac{a}{\cos^2\theta}\right)\delta\theta = 0$$

se deduce:

$$\cos\theta = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}.$$

Pentru calculul forței de legătură din D se suprimă cuiul D și se scrie condiția:

$$\delta L = -N\frac{a}{2\cos\theta}\delta\theta + G\frac{l}{2}\cos\theta\,\delta\theta = 0,$$

de unde:

$$N = \frac{l}{a}G\cos^2\theta = \frac{G}{\cos\theta} = G\sqrt[3]{\frac{l}{a}}.$$

Aceeași valoare se găsește și pentru reacțiunea din E.

4° Un scripete omogen de greutate $\bar{G}$, de rază R, se poate roti fără frecare în jurul axei lui orizontale. De capătul firului înfășurat pe scripete se atîrnă un corp de greutate $\bar{G}_1$. Să se calculeze accelerația corpului, precum și accelerația unghiulară a scripetelui (fig. 355).

Rezolvare. Pentru a aplica principiul deplasărilor virtuale se iau în considerare deplasarea elementară δh a corpului, rotația elementară $\delta\theta$, forțele date și forțele de inerție: $-\frac{G_1}{g}a$,

$$-J\dot{\omega} = -\frac{G}{2g}R^2\dot{\omega}.$$

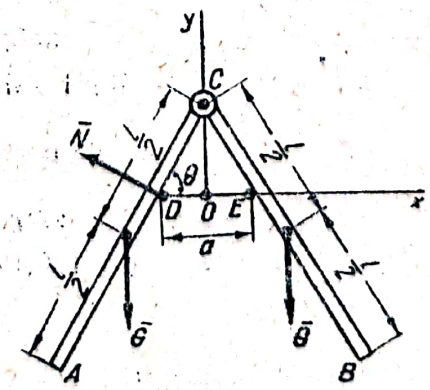


Fig. 354

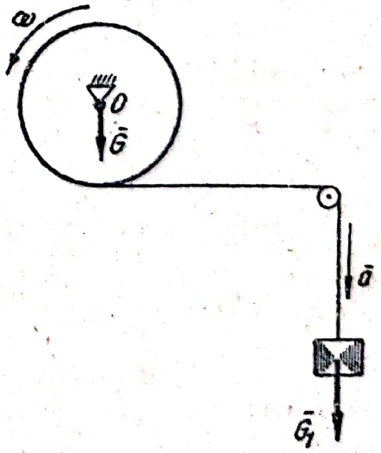


Fig. 355

Deoarece:

$$\delta h = R\delta\theta, \qquad \text{rezultă: } a = R\dot{\omega}.$$

Aplicînd principiul:

$$\delta L = G_1\,\delta h - \frac{G_1}{g}\,a\,\delta h - \frac{G}{2g}\,R^2\dot{\omega}\delta\theta = G_1\,\delta h - \frac{G_1}{g}\,a\,\delta h - \frac{G}{2g}\,R^2\,\frac{a}{R}\,\frac{\delta h}{R} = 0,$$

se găseşte:

$$a = \frac{2G_1}{2G_1 + G}\,g, \qquad \dot{\omega} = \frac{2G_1}{(2G_1 + G)\,R}\,g.$$

5° Două roţi omogene de greutăţi $\bar{G}_1$ şi $\bar{G}_2$, de raze R_1 şi R_2, cu axele de rotaţie paralele, sînt cuplate printr-o curea care nu alunecă pe roţi. Prima roată este acţionată de un cuplu de moment $\bar{M}$. Să se calculeze acceleraţiile unghiulare ale roţilor şi diferenţa dintre tensiunile celor două părţi ale curelei (fig. 356) (I. N. Veselovski).

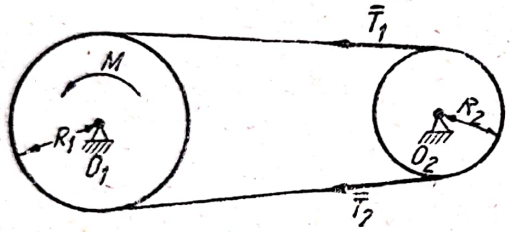


Fig. 356

Rezolvare. Dacă $\delta\theta_1$ este unghiul de rotaţie elementară a primei roţi, cea de-a doua are: $\delta\theta_2 = \dfrac{R_1\delta\theta_1}{R_2}$.

La fel, $\dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_1\,\dfrac{R_1}{R_2}$ este relaţia dintre cele două acceleraţii unghiulare. Deoarece forţele de inerţie se reduc la cupluri ale căror momente $J_1\dot{\omega}_1$ şi $J_2\dot{\omega}_2$ au sensul opus momentului $\bar{M}$ al cuplului motor, condiţia echilibrului dinamic se exprimă scalar prin:

$$M\,\delta\theta_1 - J_1\dot{\omega}\delta\theta_1 - J_2\dot{\omega}_2\delta\theta_2 = 0$$

sau:

$$\left(M - \frac{1}{2}\cdot\frac{G_1R_1^2}{g}\,\dot{\omega}_1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{G_2R_2^2}{g}\,\dot{\omega}_1\,\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{R_1}{R_2}\right)\delta\theta_1 = 0,$$

de unde:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{2Mg}{(G_1 + G_2)\,R_1^2}, \qquad \dot{\omega}_2 = \frac{2Mg}{(G_1 + G_2)\,R_1R_2}.$$

Pentru calculul diferenţei $T_1 - T_2$ se scrie ecuaţia de mişcare a celei de-a doua roţi:

$$(T_1 - T_2)\,R_2 = J_2\,\dot{\omega}_2 = \frac{G_2R_2^2}{2g}\cdot\frac{2Mg}{(G_1 + G_2)\,R_1\,R_2},$$

de unde:

$$T_1 - T_2 = \frac{G_2M}{(G_1 + G_2)\,R_1}.$$

CAPITOLUL XIV

DINAMICA SOLIDULUI RIGID

A. MOMENTE DE INERȚIE

§ 144. Definiții. Expresii analitice

a. La § 132, *c*, 3°, s-a definit *momentul de inerție al unui sistem nedeformabil de puncte materiale, în raport cu o axă* (Δ), *ca măsura inerției sistemului în mișcarea de rotație în jurul axei* (Δ).

Dacă sistemul nedeformabil se compune din punctele M_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) de masa m_i situate la distanțele d_i de axa (Δ), expresia momentului de inerție în raport cu axa (Δ) este:

$$J_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2. \tag{14.1}$$

În aplicații se întîlnesc și momente de inerție în raport cu un punct O, momente de inerție polare J_o, și chiar momente de inerție în raport cu un plan (P), momente de inerție planare J_P. Expresiile lor sînt:

$$J_o = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \tag{14.2}$$

$$J_P = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2, \tag{14.3}$$

unde r_i sînt distanțele punctelor materiale M_i ale sistemului la punctul O, iar z_i sînt distanțele punctelor M_i la planul (P).

b. Definițiile și expresiile momentelor de inerție se pot extinde și asupra sistemelor continue, înlocuind punctul M_i cu punctul curent M de masă dm și transformînd sumele în integrale simple, duble sau triple, după cum domeniul continuului este un arc de curbă, o arie sau un volum.

Astfel, momentul de inerție polar al unui solid rigid se exprimă prin:

$$J_o = \int_{(D)} r^2 \, dm,$$

unde: r este distanța punctului curent la punctul O, iar (D) este domeniul ocupat de solidul rigid.

Se poate scoate în evidență domeniul de integrare, introducînd densitatea ρ. Astfel, pentru un volum: $dm = \rho dV$ (unde ρ este densitatea volumică), pentru o arie: $dm = \rho dA$ (unde ρ este densitatea superficială) și pentru un arc de curbă: $dm = \rho ds$ (unde ρ este densitatea liniară).

Deci, momentul de inerție al unui solid rigid se exprimă prin:

$$J_o = \iiint_{(V)} \rho \, r^2 \, dV.$$

Dacă continuul este şi omogen :

$$J_o = \rho \iiint_{(V)} r^2 \, dV = \rho \, I_o, \tag{14.4}$$

unde I_o este momentul de inerţie polar al volumului, moment de inerţie *geometric*[1], spre deosebire de J_o, care se numeşte moment de inerţie al masei solidului rigid, moment de inerţie *masic* sau *mecanic*.

c. *Observaţii.* 1° Cele arătate aici se aplică întocmai şi pentru momentele de inerţie axiale sau planare, avînd grijă ca în expresiile momentelor de inerţie să apară distanţa punctului curent pînă la axa sau pînă la planul considerat.

2° De asemenea, dacă se presupune că sistemul material are două dimensiuni sau o singură dimensiune, momentele de inerţie respective sînt exprimate prin integrale duble sau simple.

3° Momentele de inerţie axiale au fost notate cu J_Δ, indicele reprezentînd axa (Δ). Dacă se folosesc expresiile analitice ale momentelor de inerţie în raport cu axele triedrului tridreptunghic *Oxyz*, notaţiile sînt : J_x, J_y şi J_z.

Momentele de inerţie planare se notează cu J_P, (P) reprezentînd planul faţă de care se calculează aceste momente. În cazul expresiilor analitice, notaţiile sînt : J_{xoy}, J_{yoz} şi J_{zox}.

În fine, în cazul în care nu se precizează figura geometrică (punct, axă, plan) faţă de care se calculează momentele de inerţie, se poate folosi notaţia fără indice J.

4° Prin definiţie, raza de inerţie[2] *a unui sistem material de masă* m, *faţă de un punct, o axă sau un plan, este distanţa unui punct (în care s-ar concentra întreaga masă a sistemului) pînă la punctul, axa sau planul considerat, astfel încît momentul de inerţie al punctului material să fie egal cu momentul de inerţie, faţă de punct, axă sau plan, al sistemului material*, adică :

$$mi^2 = J,$$

de unde :

$$i = \sqrt{\frac{J}{m}}. \tag{14.5}$$

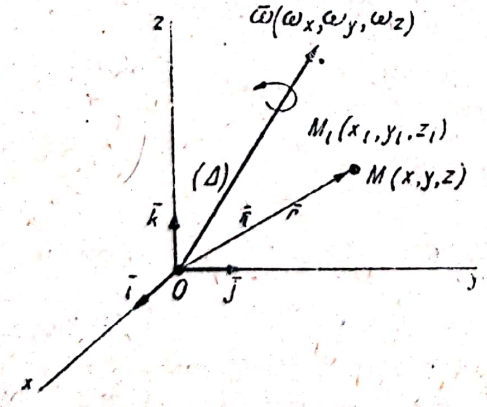


Fig. 357

d. Expresiile analitice ale momentelor de inerţie apar la calculul expresiilor analitice ale unor mărimi mecanice pentru un sistem material în mişcare, în raport cu un triedru tridreptunghic *Oxyz*. Astfel, la calculul mo-

[1] Momentele de inerţie geometrice ale ariilor figurilor plane sînt folosite, într-o largă măsură, în rezistenţa materialelor. De aceea, ele sînt dezvoltate în vol. II ca forme particulare ale momentelor de inerţie masice.

[2] Denumită şi rază de giraţie.

mentului cinetic, în raport cu un punct O, al unui sistem nedeformabil de puncte materiale $M_i(x_i, y_i, z_i)$ de mase m_i în mișcare de rotație în jurul unei axe $\Delta(\bar{\omega})$ trecînd prin O (fig. 357), s-au folosit (§ 131, *b*, 7°) expresiile complexe:

$$\bar{r}_i = x_i\bar{i} + y_i\bar{j} + z_i\bar{k}, \quad \bar{\omega} = \omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k},$$

care s-au introdus în (13.18), rezultatul fiind:

$$\bar{K}_o = (\omega_x J_x - \omega_y J_{xy} - \omega_z J_{xz})\bar{i} + (\omega_y J_y - \omega_z J_{yz} - \omega_x J_{yx})\bar{j} + \\ + (\omega_z J_z - \omega_x J_{zx} - \omega_y J_{zy})\bar{k}. \tag{14.6}$$

În expresia (14.6) s-a notat cu:

$$J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2),\ J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i(z_i^2 + x_i^2),\ J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2) \tag{14.7}$$

momentele de inerție ale sistemului în raport cu axele Ox, Oy și Oz, iar cu:

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i; \qquad J_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i; \qquad J_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i \tag{14.8}$$

produsele de inerție [1] ale sistemului, în raport cu perechile de plane: yOz și zOx; zOx și xOy, xOy și yOz. Este evident că:

$$J_{xy} = J_{yx}, \quad J_{yz} = J_{zy}, \quad J_{zx} = J_{xz}.$$

De asemenea, rezultatele se pot extinde și la sistemele continue nedeformabile, adică la solide rigide, prin înlocuirile indicate mai înainte. În acest scop, figura 357 cuprinde notații atît pentru sisteme discrete $M_i(\bar{r}_i)$ cît și pentru sisteme continue $M(\bar{r})$.

O altă expresie analitică utilă, care se deduce din:

$$\bar{K}_o\bar{\omega} = \sum(\bar{r} \times m\bar{v})\bar{\omega} = \sum m\,(\bar{\omega} \times \bar{r})\bar{v} = \sum mv^2,$$

este:

$$2E = J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2 - 2J_{xy}\omega_x\omega_y - 2J_{yz}\omega_y\omega_z - 2J_{zx}\omega_z\omega_x, \tag{14.9}$$

unde E este energia cinetică a sistemului în mișcarea de rotație în jurul axei (Δ).

În cazul particular în care (Δ) coincide cu Oz:

$$\bar{\omega} = \omega\bar{k}, \quad \bar{K}_o = \omega(-J_{xz}\bar{i} - J_{yz}\bar{j} + J_z\bar{k})$$

$$K_z = J_z\omega, \quad 2E = J_z\omega^2,$$

unde s-au notat cu ω și K_z valorile vectorilor $\bar{\omega}$ și $\bar{K}_o$ de pe axa Oz.

e. *Observații și consecințe.* 1° Relațiile (14.1), (14.2) etc. dau expresiile scalare ale momentelor de inerție. Momentele de inerție în raport cu un punct, o axă sau cu un plan sînt totdeauna pozitive, pe cînd produsele de inerție pot fi pozitive, negative sau nule.

[1] Denumite și momente de inerție centrifugale.

2° În baza expresiilor (14.1), (14.2), (14.3), (14.7) şi (14.8) se pot stabili uşor următoarele relaţii între momentele de inerţie ale unui sistem material în raport cu originea, cu axele şi cu planele unui triedru tridreptunghic $Oxyz$:

$$J_x = J_{xoz} + J_{xoy},\ J_y = J_{yox} + J_{yoz},\ J_z = J_{zoy} + J_{zox}, \qquad (14.10)$$

$$J_o = J_{yoz} + J_{zox} + J_{xoy} = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z) = J_x + J_{yoz} =$$

$$= J_y + J_{zox} = J_z + J_{xoy}.$$

3° Se observă că în identitatea algebrică :

$$xy = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2\right],$$

$$d_1^2 = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{ şi } d_2^2 = \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2$$

sînt pătratele distanţelor punctului curent M de masă m şi coordonate x, y, z, al sistemului material, pînă la planele bisectoare ale diedrelor formate cu planele xOz şi yOz.

În consecinţă :

$$J_{xy} = \sum mxy = \frac{1}{2}\sum m(d_1^2 - d_2^2) = \frac{1}{2}(J_1 - J_2),$$

adică : produsul de inerţie poate fi oricînd exprimat prin semidiferenţa a două momente de inerţie. Astfel se explică de ce produsul de inerţie poate fi pozitiv, negativ sau nul.

§ 145. Momente de inerţie în raport cu axe paralele. Teorema lui Steiner

a. Momentul de inerţie al unui sistem nedeformabil de puncte materiale în raport cu o axă caracterizează nu numai inerţia sistemului în mişcarea de rotaţie în jurul axei, ci şi modul de împrăştiere a punctelor sistemului în raport cu axa.

Momentele de inerţie, fiind funcţii de distanţele punctelor materiale la o figură geometrică (punct, axă, plan), variază dacă variază poziţia figurii considerate.

În cele ce urmează se vor stabili, la început, relaţiile dintre momentele de inerţie ale aceluiaşi sistem de puncte materiale în raport cu două puncte O şi O', apoi relaţiile dintre momentele de inerţie în raport cu două axe paralele (Δ) şi (Δ').

Se consideră sistemul nedeformabil de puncte materiale M_i $(i = 1, 2, 3, ..., n)$, de mase m_i, determinate în raport cu reperul cu originea în O, prin vectorii $\bar{r}_i$. Poziţiile punctelor sistemului sînt determinate în raport cu un

alt reper cu originea în O', prin $\bar{r}_i'$, iar O are faţă de reperul din O' vectorul de poziţie $\bar{r}_o$ (fig. 358).

Deoarece :

$$\bar{r}_i' = \bar{r}_o + \bar{r}_i, \tag{14.11}$$

$$J_{o'} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i'^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (\bar{r}_o + \bar{r}_i)^2 = m r_o^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_o \bar{r}_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = m r_o^2 + 2 \bar{r}_o \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i + J_o = m r_o^2 + 2 \bar{r}_o m \bar{r}_c + J_o,$$

$$J_{o'} = m r_o^2 + 2 \bar{r}_o \bar{S}_o + J_o, \tag{14.12}$$

unde $\bar{r}_c$ este vectorul de poziţie al centrului C de masă al sistemului, iar $\bar{S}_o$ este momentul static al sistemului de puncte materiale în raport cu originea O.

Dacă originea O coincide cu C : $\bar{S}_o = 0$, iar relaţia (14.12) devine :

$$J_{o'} = m r_o^2 + J_o, \tag{14.13}$$

adică : *momentul de inerţie al unui sistem de puncte materiale în raport cu un punct oarecare este egal cu momentul de inerţie al sistemului în raport cu centrul său de masă, adunat cu masa totală a sistemului, înmulţită cu pătratul distanţei dintre centrul de masă şi punctul considerat.*

b. Pentru stabilirea unor relaţii similare în raport cu axe paralele, se consideră două axe paralele oarecare (Δ) şi (Δ'), şi pe aceste axe, punctele O, respectiv O', ca originile a două repere. Pentru simplificarea calculelor se alege OO' perpendicular pe direcţia comună a axelor (Δ) şi (Δ').

Notînd cu $\bar{u}$ versorul direcţiei axelor, cu d_i şi d_i' distanţele punctului M_i la axele (Δ) şi (Δ') (fig. 358), se scrie :

$$d_i^2 = r_i^2 - (\bar{r}_i \bar{u})^2, \quad d_i'^2 = r_i'^2 - (\bar{r}_i' \bar{u})^2.$$

În consecinţă :

$$J_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i [r_i^2 - (\bar{r}_i \bar{u})^2] =$$

$$= J_o - \sum_{i=1}^{n} m_i (\bar{r}_i \bar{u})^2 \tag{14.14}$$

şi la fel :

$$J_{\Delta'} = J_{o'} - \sum_{i=1}^{n} m_i (\bar{r}_i' \bar{u})^2.$$

Însă din (14.11) se deduce :

$$\bar{r}_i' \bar{u} = (\bar{r}_o + \bar{r}_i)\, \bar{u} = \bar{r}_i \bar{u},$$

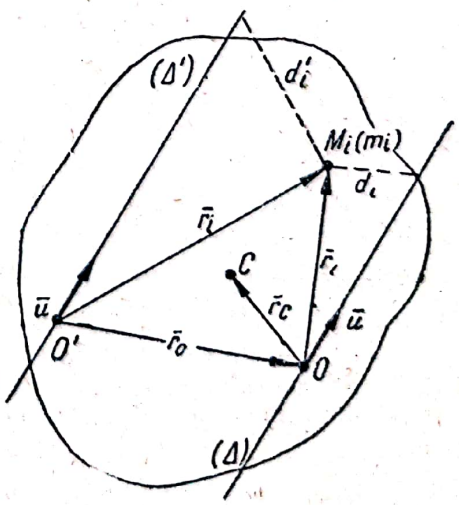


Fig. 358

astfel că în baza relaţiilor (14.14) şi (14.12) :

$$J_{\Delta'} = J_{o'} - \sum_{i=1}^{n} m_i(\bar{r}_i'\bar{u})^2 = J_{o'} - (J_o - J_\Delta) = mr_o^2 + 2\,\bar{r}_o\bar{S}_o + J_\Delta .$$

Deoarece $|\bar{r}_o| = d$ este distanţa dintre cele două axe, se obţine relaţia căutată :

$$J_{\Delta'} = md^2 + 2\,\bar{r}_o\bar{S}_o + J_\Delta . \tag{14.15}$$

Dacă O coincide cu centrul de masă al sistemului sau, cu alte cuvinte, dacă axa (Δ) trece prin centrul de masă al sistemului : $\bar{S}_o = 0$ şi relaţia (14.15) devine :

$$J_{\Delta'} = md^2 + J_\Delta , \tag{14.16}$$

adică : *momentul de inerţie al unui sistem de puncte materiale în raport cu o axă oarecare este egal cu momentul de inerţie al sistemului în raport cu o axă care trece prin centrul de masă al sistemului, paralel cu axa considerată, adunat cu masa totală a sistemului, înmulţită cu pătratul distanţei dintre cele două axe.*

c. *Observaţii şi consecinţe.* 1° Relaţiile (14.12), (14.13), (14.15) şi (14.16) se încadrează în *teorema lui Steiner*, teoremă care cuprinde şi următoarea completare :

Produsul de inerţie al unui sistem de puncte materiale, în raport cu planele unui diedru dreptunghic, este egal cu produsul de inerţie al sistemului în raport cu planele unui diedru paralel, la fel orientat cu primul şi a cărui muchie trece prin centrul de masă al sistemului, adunat cu produsul de inerţie, în raport cu planele primului diedru, al centrului de masă în care s-ar concentra întreaga masă a sistemului.

2° În cazul unui sistem plan de puncte materiale, teorema lui Steiner are acelaşi enunţ, cu deosebirea că pentru produsul de inerţie este :

Produsul de inerţie în raport cu o pereche de axe rectangulare este egal cu produsul de inerţie în raport cu axele paralele, la fel orientate cu primele, dar care trec prin centrul de masă al sistemului, adunat cu produsul de inerţie, în raport cu primele axe, al centrului de masă în care s-ar concentra întreaga masă a sistemului.

3° Ca o consecinţă a teoremei lui Steiner rezultă că :

Dintre toate momentele de inerţie ale unui sistem de puncte materiale, în raport cu diferite puncte sau în raport cu axe sau plane paralele, momentele de inerţie cele mai mici corespund centrului de masă, respectiv axelor sau planelor care trec prin centrul de masă al sistemului.

4° *Aplicaţie.* Să se calculeze momentele de inerţie ale unei sfere omogene de rază R în raport cu centrul, în raport cu un diametru şi în raport cu un punct de pe suprafaţa sferei.

Rezolvare. În primul rînd, în baza simetriei şi a relaţiilor (14.10) :

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} J_o .$$

astfel că în baza relaţiilor (14.14) şi (14.12) :

$$J_{\Delta'} = J_{o'} - \sum_{i=1}^{n} m_i(\bar{r}_i'\bar{u})^2 = J_{o'} - (J_o - J_\Delta) = mr_o^2 + 2\,\bar{r}_o\bar{S}_o + J_\Delta .$$

Deoarece $|\bar{r}_o| = d$ este distanţa dintre cele două axe, se obţine relaţia căutată :

$$J_{\Delta'} = md^2 + 2\,\bar{r}_o\bar{S}_o + J_\Delta . \tag{14.15}$$

Dacă O coincide cu centrul de masă al sistemului sau, cu alte cuvinte, dacă axa (Δ) trece prin centrul de masă al sistemului : $\bar{S}_o = 0$ şi relaţia (14.15) devine :

$$J_{\Delta'} = md^2 + J_\Delta , \tag{14.16}$$

adică : *momentul de inerţie al unui sistem de puncte materiale în raport cu o axă oarecare este egal cu momentul de inerţie al sistemului în raport cu o axă care trece prin centrul de masă al sistemului, paralel cu axa considerată, adunat cu masa totală a sistemului, înmulţită cu pătratul distanţei dintre cele două axe.*

c. *Observaţii şi consecinţe.* 1° Relaţiile (14.12), (14.13), (14.15) şi (14.16) se încadrează în *teorema lui Steiner*, teoremă care cuprinde şi următoarea completare :

Produsul de inerţie al unui sistem de puncte materiale, în raport cu planele unui diedru dreptunghic, este egal cu produsul de inerţie al sistemului în raport cu planele unui diedru paralel, la fel orientat cu primul şi a cărui muchie trece prin centrul de masă al sistemului, adunat cu produsul de inerţie, în raport cu planele primului diedru, al centrului de masă în care s-ar concentra întreaga masă a sistemului.

2° În cazul unui sistem plan de puncte materiale, teorema lui Steiner are acelaşi enunţ, cu deosebirea că pentru produsul de inerţie este :

Produsul de inerţie în raport cu o pereche de axe rectangulare este egal cu produsul de inerţie în raport cu axele paralele, la fel orientate cu primele, dar care trec prin centrul de masă al sistemului, adunat cu produsul de inerţie, în raport cu primele axe, al centrului de masă în care s-ar concentra întreaga masă a sistemului.

3° Ca o consecinţă a teoremei lui Steiner rezultă că :

Dintre toate momentele de inerţie ale unui sistem de puncte materiale, în raport cu diferite puncte sau în raport cu axe sau plane paralele, momentele de inerţie cele mai mici corespund centrului de masă, respectiv axelor sau planelor care trec prin centrul de masă al sistemului.

4° *Aplicaţie.* Să se calculeze momentele de inerţie ale unei sfere omogene de rază R în raport cu centrul, în raport cu un diametru şi în raport cu un punct de pe suprafaţa sferei.

Rezolvare. În primul rînd, în baza simetriei şi a relaţiilor (14.10) :

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} J_o .$$

Apoi, elementul cuprins între razele r şi $r + \Delta r$ are masa :

$$\Delta m = \frac{4\pi}{3}[(r + \Delta r)^3 - r^3]\rho \text{ şi } dm = 4\pi\rho r^2 dr;$$

în fine :

$$J_o = \int_0^R r^2 dm = 4\pi\rho \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\rho}{5} R^5 = \frac{3}{5} m R^2, \quad (14.17)$$

unde ρ este densitatea, iar m masa totală a sferei.

Se deduce că :

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} m R^2. \quad (14.18)$$

Pentru calculul momentului de inerţie în raport cu un punct oarecare N de pe suprafaţa sferei, se aplică teorema lui Steiner :

$$J_N = \frac{3}{5} mR^2 + mR^2 = \frac{8}{5} mR^2. \quad (14.19)$$

Dacă sfera este goală în interior pînă la o distanţă r de centru :

$$J_o = \frac{4\pi\rho}{5}(R^5 - r^5). \quad (14.20)$$

§ 146. Momente de inerţie în raport cu axe concurente. Elipsoidul de inerţie

a. Pentru cunoaşterea momentelor de inerţie ale unui sistem material mai este necesar şi studiul variaţiei lor în raport cu axele concurente într-un punct O.

Se consideră o axă (Δ) care trece prin originea unui triedru tridreptunghic $Oxyz$ (fig. 357) şi este determinată prin versorul :

$$\bar{u} = \alpha\bar{i} + \beta\bar{j} + \gamma\bar{k},$$

unde α, β, γ sînt cosinusurile directoare ale axei.

Problema este următoarea : presupunîndu-se calculate momentele de inerţie ale sistemului material în raport cu axele triedrului, precum şi produsele de inerţie, să se calculeze momentul de inerţie J_Δ al sistemului în raport cu axa (Δ). Apoi, variind direcţia axei (Δ) să se studieze variaţia lui J_Δ.

Observînd că la § 144 s-a calculat expresia analitică (14.9) în raport cu triedrul $Oxyz$, a energiei cinetice a unui sistem material rigid în mişcare de rotaţie în jurul axei (Δ) şi că expresia intrinsecă a acestei energii este $\frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$, din comparaţie rezultă relaţia :

$$J_\Delta \omega^2 = J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2 - 2J_{xy}\omega_x\omega_y - 2J_{yz}\omega_y\omega_z - 2J_{zx}\omega_z\omega_x. \quad (14.21)$$

Scanned with OKEN Scanner

Împărţind cu ω^2 şi ţinînd seama de faptul că $\bar{\omega}$ şi $\bar{u}$ sînt coliniari, adică de relaţiile :

$$\frac{\omega_x}{\omega} = \alpha, \quad \frac{\omega_y}{\omega} = \beta, \quad \frac{\omega_z}{\omega} = \gamma,$$

se găseşte :

$$J_\Delta = J_x\alpha^2 + J_y\beta^2 + J_z\gamma^2 - 2J_{xy}\alpha\beta - 2J_{yz}\beta\gamma - 2J_{zx}\gamma\alpha. \tag{14.22}$$

În consecinţă, pentru a exprima momentul de inerţie al unui sistem material în raport cu o axă (Δ) este necesar să se calculeze în prealabil momentele de inerţie J_x, J_y, J_z şi produsele de inerţie J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}.

Este evident că J_Δ depinde de direcţia axei (Δ), deoarece în expresia (14.22) apar cosinusurile directoare α, β şi γ. Pentru a avea o imagine a variaţiei momentului de inerţie J_Δ în funcţie de direcţia axei, se consideră pe axa (Δ) punctele M şi M', simetrice în raport cu O, determinate de vectorii $\bar{r}$ şi $\bar{r}'$, astfel încît :

$$|\bar{r}| = |\bar{r}'| = \frac{k}{\sqrt{J_\Delta}}, \tag{14.23}$$

unde k este o constantă avînd expresia de dimensiuni : $[L^2M^{\frac{1}{2}}]$, şi $J_\Delta \neq 0$.

Coordonatele punctelor M şi M' sînt :

$$x = \pm\frac{k\alpha}{\sqrt{J_\Delta}}, \quad y = \pm\frac{k\beta}{\sqrt{J_\Delta}}, \quad z = \pm\frac{k\gamma}{\sqrt{J_\Delta}}; \tag{14.24}$$

semnele — corespund punctului M'.

Cînd variază direcţia axei (Δ), punctele M şi M' descriu aceeaşi suprafaţă a cărei ecuaţie se obţine eliminînd parametrii α, β şi γ între ecuaţiile (14.22) şi (14.24) :

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx = k^2. \tag{14.25}$$

Ecuaţia (14.25) reprezintă o cuadrică închisă, avînd centrul în O. Cuadrica nu are puncte la infinit, deoarece orice dreaptă (Δ) o intersectează în două puncte la distanţa $|\bar{r}|$ de centru, distanţă care nu se anulează şi nici nu devine infinită. Cuadrica este în general un elipsoid, cu excepţia cazului cînd sistemul material se reduce la o bară rigidă dreaptă, care coincide cu axa (Δ).

Acesta este *elipsoidul de inerţie* al sistemului material rigid în raport cu punctul O şi pentru determinarea lui sînt necesari coeficienţii J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}, precum şi valoarea constantei k. Această constantă poate primi orice valoare finită şi diferită de zero.

O dată determinat elipsoidul, cu ajutorul relaţiei (14.23) scrise sub forma $J_\Delta = \frac{k^2}{r^2}$ se poate calcula momentul de inerţie J_Δ al sistemului material în raport cu orice direcţie, folosind numai distanţa $OM = |\bar{r}|$, a unuia din punctele de intersecţie dintre axa (Δ) şi suprafaţa elipsoidului de inerţie.

Scanned with OKEN Scanner

Se ştie că un elipsoid are trei axe de simetrie şi trei plane de simetrie, determinate de axele luate două cîte două. Atît axele cît şi planele de simetrie trec prin centrul elipsoidului. Aceste axe şi plane de simetrie sînt *axele* şi *planele principale de inerţie* ale sistemului material corespunzătoare punctului O.

Fiecărui punct din spaţiu îi corespunde pentru un acelaşi sistem material un alt elipsoid de inerţie.

Dacă punctul O coincide cu centrul de masă al sistemului, elipsoidul se numeşte *central*, iar axele şi planele lui sînt *axele şi planele centrale şi principale de inerţie* ale sistemului material.

Dacă se raportează elipsoidul la triedrul $OXYZ$, determinat de axele sale de simetrie, ecuaţia sa devine:

$$J_X X^2 + J_Y Y^2 + J_Z Z^2 = k^2, \tag{14.26}$$

unde J_X, J_Y şi J_Z sînt *momentele principale de inerţie* în raport cu noile axe. Se observă că produsele de inerţie în raport cu triedrul $OXYZ$ sînt nule:

$$J_{XY} = 0, \; J_{YZ} = 0, \; J_{ZX} = 0. \tag{14.27}$$

Ecuaţiile (14.27) reprezintă condiţiile necesare şi suficiente pentru ca axele şi planele triedrului $OXYZ$ să fie axe principale, respectiv plane principale de inerţie, pentru sistemul material, relativ la punctul O.

b. *Observaţii şi consecinţe.* 1° Pentru ca o axă, de exemplu Oz, să fie axă principală de inerţie relativ la punctul O, este necesar şi suficient ca:

$$J_{yz} = \sum myz = 0 \quad \text{şi} \quad J_{zx} = \sum mzx = 0. \tag{14.28}$$

2° Dacă o axă, de exemplu Oz, este o axă de simetrie pentru sistemul material, ea este în acelaşi timp şi axă principală de inerţie relativ la punctul O.

În adevăr, punctele materiale ale sistemului fiind simetric dispuse în raport cu această axă, oricărui punct de coordonate x, y, z îi corespunde un punct de masă egală avînd coordonatele $-x$, $-y$, z şi în consecinţă sînt satisfăcute condiţiile (14.28).

3° Reciproca nu este adevărată; dacă o axă este axă principală de inerţie ea nu este neapărat şi axă de simetrie: un sistem material oarecare poate să nu aibă nici o axă de simetrie şi totuşi are în orice punct al spaţiului un elipsoid de inerţie, axe şi plane principale de inerţie.

4° Scriind ecuaţia (14.26) sub forma:

$$\frac{X^2}{\frac{k^2}{J_X}} + \frac{Y^2}{\frac{k^2}{J_Y}} + \frac{Z^2}{\frac{k^2}{J_Z}} = 1, \tag{14.29}$$

se observă că:

$$a = \frac{k}{\sqrt{J_X}}, \quad b = \frac{k}{\sqrt{J_Y}}, \quad c = \frac{k}{\sqrt{J_Z}} \tag{14.30}$$

sînt mărimile semiaxelor elipsoidului şi că, după direcţia celei mai mari axe, momentul de inerţie al sistemului este cel mai mic, deci: *Dacă elipsoidul este central, momentul de inerţie al sistemului material în raport cu axa mare a elipsoidului central este cel mai mic dintre toate momentele de inerţie posibile, în raport cu orice axă.*

Scanned with OKEN Scanner

B. MIŞCĂRI PARTICULARE

§ 147. Solidul rigid cu o axă fixă. Aplicaţii

a. În statică, la § 74, s-a studiat problema repausului unui solid rigid cu două puncte fixe, adică cu o *axă fixă* O_1O_2 (fig. 359). Cele două puncte fixe au fost asimilate fiecare cu cîte o articulaţie sferică.

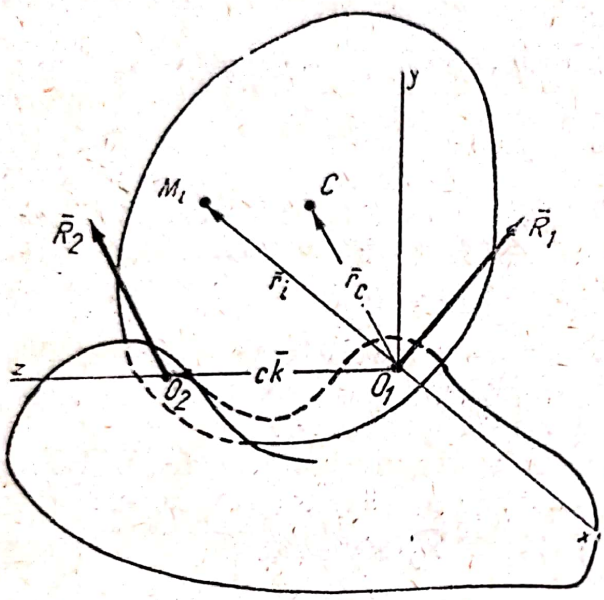


Fig. 359

Forţele date sînt reprezentate prin torsorul din O_1 de componente $\bar{R}$ şi $\bar{M}$. Forţele de legătură — ca şi în problema de statică — sînt numai reacţiunile $\bar{R}_1$ şi $\bar{R}_2$ din punctele O_1 şi O_2, dacă se neglijează frecările din articulaţii.

Pentru a rezolva problema mişcării solidului cu o axă fixă se poate folosi teorema energiei, teorema momentului cinetic sau metoda cinetostatică. Pentru aceasta se notează cu : m_i masa unui punct material M_i, $\bar{r}_i$ vectorul de poziţie al punctului M_i, cu m masa solidului, C centrul său de masă determinat în raport cu reperul avînd originea în O_1 prin $\bar{r}_c$, iar poziţia punctului O_2 prin $\overline{O_1O_2}$, de modul c. Ecuaţiile vectoriale date de metoda cinetostatică (d'Alembert) sînt :

$$\bar{R} + \bar{R}_1 + \bar{R}_2 - \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{a}_i = 0, \tag{14.31}$$

$$\bar{M} + \overline{O_1O_2} \times \bar{R}_2 - \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i = 0, \tag{14.32}$$

unde $\bar{a}_i$ este acceleraţia punctului M_i.

Se ştie (*v. Statica* § 74) că solidul cu o axă fixă are un singur grad de libertate reprezentat prin parametrul θ, unghiul format între două plane care conţin axa fixă, unul fix, iar celălalt solidar cu solidul în mişcare. De asemenea, notînd cu ω valoarea vitezei unghiulare în mişcarea de rotaţie, se poate asocia acestei mişcări vectorul $\bar{\omega}$ dirijat după axa O_1O_2.

În consecinţă : $\bar{v}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i$ şi

$$\bar{a}_i = \dot{\bar{v}}_i = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_i + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_i + (\bar{\omega}\bar{r}_i)\,\bar{\omega} - \omega^2 \bar{r}_i, \tag{14.33}$$

unde $\dot{\bar{\omega}}$ este vectorul dirijat după axa O_1O_2 reprezentînd acceleraţia unghiulară în mişcarea de rotaţie a solidului.

În aceste condiţii, ecuaţiile (14.31) şi (14.32) devin după transformări :

$$\bar{R} + \bar{R}_1 + \bar{R}_2 - \dot{\bar{\omega}} \times m\bar{r}_c - (\bar{\omega} m\bar{r}_c)\,\bar{\omega} + m\omega^2 \bar{r}_c = 0, \tag{14.34}$$

$$\bar{M} + \overline{O_1O_2} \times \bar{R}_2 - \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times (\dot{\bar{\omega}} \times m_i \bar{r}_i) + \sum_{i=1}^{n} m_i (\bar{\omega}\, \bar{r}_i)\,(\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = 0.$$

Pentru a ajunge la ecuaţii scalare se consideră triedrul tridreptunghic O_1xyz invariabil legat de solid. Se alege acelaşi triedru ca la § 74, ceea ce permite folosirea relaţiilor (7.8) şi în plus :

$$\bar{\omega} = \omega \bar{k}, \quad \dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega} \bar{k}. \tag{14.35}$$

Din înlocuirea în (14.34) a relaţiilor (7.8) şi (14.35) se obţin următoarele ecuaţii :

$$\left.\begin{aligned} &X + X_1 + X_2 + m(\dot{\omega} y_c + \omega^2 x_c) = 0, \quad M_x - cY_2 + \dot{\omega} J_{xz} - \omega^2 J_{yz} = 0 \\ &Y + Y_1 + Y_2 + m(-\dot{\omega} x_c + \omega^2 y_c) = 0 \quad M_y + cX_2 + \dot{\omega} J_{yz} + \omega^2 J_{xz} = 0 \\ &Z + Z_1 + Z_2 = 0 \qquad\qquad M_z - \dot{\omega} J_z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{14.36}$$

unde : x_c, y_c, z_c sînt coordonatele centrului de masă, J_{xz}, J_{yz} sînt produse de inerţie în raport cu planele sistemului de referinţă, iar J_z este momentul de inerţie, în raport cu axa O_1z.

Se poate arăta că ultima ecuaţie din (14.36) se obţine imediat, aplicînd teorema energiei sau teorema momentului cinetic.

b. *Observaţii şi completări.* 1° Ca o verificare, dacă se presupune că $\bar{\omega} = 0$, deci $\dot{\bar{\omega}} = 0$, se regăsesc ecuaţiile stabilite la § 74, în problema repausului solidului cu axă fixă.

2° Ultima ecuaţie din sistemul (14.36), scrisă sub forma : $\ddot{\theta} - \frac{1}{J_z} M_z = 0$, este, în general, o ecuaţie diferenţială de ordinul doi în raport cu θ (care poate să apară şi în expresia lui M_z).

După integrarea ei, se determină cele două constante de integrare prin condiţiile iniţiale :

$$\text{la } t = 0 \quad \theta = \theta_0 \quad \text{şi} \quad \dot{\theta} = \omega_0$$

şi se ajunge la ecuaţia care dă legea mişcării :

$$\theta = f(t) \text{ de unde } \omega = \dot{f}(t).$$

3° Celelalte ecuaţii din (14.36) rezolvate, dau :

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{c}(M_y + \dot{\omega} J_{yz} + \omega^2 J_{xz}) - m(\dot{\omega} y_c + \omega^2 x_c) - X, \\ Y_1 &= -\frac{1}{c}(M_x + \dot{\omega} J_{xz} - \omega^2 J_{yz}) + m(\dot{\omega} x_c - \omega^2 y_c) - Y, \\ X_2 &= -\frac{1}{c}(M_y + \dot{\omega} J_{yz} + \omega^2 J_{xz}), \\ Y_2 &= \frac{1}{c}(M_x + \dot{\omega} J_{xz} - \omega^2 J_{yz}), \quad Z_1 + Z_2 = -Z. \end{aligned}\right\} \qquad (14.37)$$

4° Se constată astfel că necunoscutele Z_1 şi Z_2 nu sînt determinate. Explicaţia este aceeaşi ca pentru problema tratată în *Statică* la § 74; ecuaţia suplimentară necesară se poate obţine printr-o condiţie de echilibru elastic, se înţelege, renunţînd la ipoteza rigidităţii solidului.

5° În funcţionarea maşinilor avînd piese rotative în jurul unor axe fixe este foarte important să se micşoreze cît mai mult uzura pieselor de legătură. Se ştie că uzura se datoreşte frecării, iar aceasta este cu atît mai mare cu cît forţele de legătură normale sînt mai mari. În consecinţă se pot studia teoretic, în vederea aplicaţiilor practice, cazurile în care una din reacţiuni ($\bar{R}_2$) sau ambele ($\bar{R}_1$ şi $\bar{R}_2$) se anulează.

În primul caz este necesar ca :

$$J_{yz} = 0,\ J_{xz} = 0, \quad M_x = 0 \text{ şi } M_y = 0,$$

adică : *axa de rotaţie O_1z să fie axă principală de inerţie, iar momentul rezultant al forţelor date în raport cu O_1 să fie orientat după O_1z.* În acest caz, solidul are nevoie de un singur punct de legătură O_1, iar O_1z se numeşte *axă permanentă de rotaţie.*

În cel de-al doilea caz sînt necesare condiţiile :

$$J_{yz} = 0,\ J_{xz} = 0,\ M_x = 0,\ M_y = 0,$$

şi

$$x_c = 0,\ y_c = 0,\ X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0,$$

adică : *axa de rotaţie O_1z să fie axă centrală şi principală de inerţie, iar torsorul din O_1 al forţelor exterioare să se reducă la un cuplu al cărui moment să fie orientat după O_1z.*

În acest caz, solidul nu mai are nevoie de nici un punct de legătură şi totuşi se roteşte în jurul unei axe fixe, care poartă numele de *axă spontană de rotaţie.*

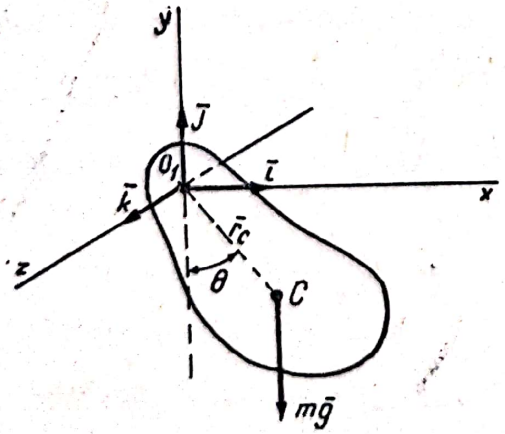


Fig. 360

6° În cazul particular în care forţele exterioare se echilibrează, $\dot{\omega} = 0$, $\omega = \omega_0$, mişcarea solidului în jurul unei axe centrale şi principale de inerţie este o rotaţie uniformă. Această mişcare este o mişcare în virtutea inerţiei, întocmai ca şi mişcarea de translaţie rectilinie şi uniformă a unui solid rigid.

7° Importanţa practică a celor stabilite aici reiese din faptul că la orice piesă de maşină care se roteşte în jurul unei axe care nu este axă centrală şi principală de inerţie a acestei piese, reacţiunile din lagărele axei nu sînt nule, ele depind de ω^2 şi de $\dot{\omega}$. Ca urmare se pot produce fenomene dăunătoare, ca : presiuni mari pe lagăre, încălziri prin frecare, smuciri şi uneori chiar efecte de rezonanţă.

c. **Aplicaţii.** 1° *Pendulul fizic* este un solid rigid greu, care se roteşte în jurul unei axe orizontale O_1z.

Sistemul de referinţă faţă de care se va studia mişcarea se compune din axa de rotaţie ca axă O_1z, planul vertical care trece prin centrul de masă C al solidului ca plan O_1xy şi axa O_1y după verticală (fig. 360).

Mişcarea şi reacţiunile solidului cu o axă fixă se pot determina folosind teoremele sau metodele generale. Astfel s-au obţinut ecuaţiile (14.36). Ecuaţia de mişcare pentru pendulul fizic devine:

$$\dot{\omega} J_z = M_z = -mgl \sin\theta \quad \text{sau} \quad \ddot{\theta} + \frac{gl}{i^2} \sin\theta = 0, \tag{14.38}$$

unde: m este masa solidului, $l = O_1C$ şi $i = \sqrt{\frac{J_z}{m}}$ raza de inerţie a solidului în raport cu axa O_1z.

Ecuaţia (14.38) este asemănătoare cu ecuaţia (10.65) a pendulului simplu: $\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin\theta = 0$. Dacă se notează $\frac{i^2}{l}$ prin l', aceasta este *lungimea pendulului simplu sincron cu pendulul fizic*: $l' = \frac{i^2}{l} = \frac{J_z}{ml}$.

Rezultatele cu privire la mişcarea pendulului simplu sînt valabile şi la pendulul fizic, astfel perioada micilor oscilaţii este:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{mlg}}. \tag{14.39}$$

Pentru calculul reacţiunilor se va folosi teorema mişcării centrului de masă (13.14). Pentru simplificare se va presupune că O_1xy este un plan de simetrie al solidului şi, ca urmare, $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Se obţine:

$$\begin{aligned} X_1 &= ml\,(\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2 \sin\theta), \\ Y_1 &= ml\,(\dot{\omega}\sin\theta + \omega^2\cos\theta) + mg, \\ X_2 &= 0,\ Y_2 = 0,\ Z_1 + Z_2 = 0. \end{aligned} \tag{14.40}$$

Axa O_1z este o axă permanentă de rotaţie cu un singur punct O_1 de legătură; deci $\bar{R}_2 = 0$, în consecinţă reacţiunea din O_1 nu are componente decît în planul de simetrie O_1xy. În ecuaţiile (14.40) se vor înlocui:

$$\dot{\omega} = -\frac{gl}{i^2} \sin\theta \quad \text{şi} \quad \omega^2 = \frac{2\,gl}{i^2} \cos\theta + C,$$

C fiind o constantă de integrare care se determină în funcţie de condiţiile iniţiale ale problemei.

2° Asupra unei roţi omogene de greutate G şi rază R, care se roteşte în jurul unei axe orizontale, se aplică un sabot de frînă acţionat de forţa constantă şi radială P. Dacă în momentul aplicării sabotului viteza unghiulară a roţii era ω_0, dacă μ este coeficientul de frecare între sabot şi roată şi dacă se neglijează raza fusului şi frecarea în fus, să se calculeze: legea mişcării de rotaţie, timpul t_1 din momentul aplicării sabotului pînă la oprire, precum şi numărul corespunzător de rotaţii n (fig. 361).

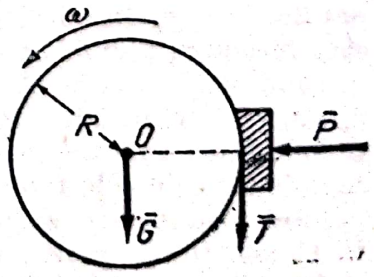


Fig. 361

Rezolvare. Ecuaţia mişcării este:

$$J\dot{\omega} = M_o, \quad \frac{G}{g}\frac{R^2}{2}\dot{\omega} = -\mu PR, \quad \dot{\omega} = -\frac{2\mu Pg}{GR};$$

se integrează de două ori şi se obţine:

$$\omega = \omega_0 - \frac{2\mu Pg}{GR}t; \qquad \theta = \omega_0 t - \frac{\mu Pg}{GR}t^2.$$

Timpul pînă la oprire este: $t_1 = \frac{GR\omega_0}{2\mu Pg}$, unghiul total de rotaţie: $\theta_1 = \frac{GR\omega_0^2}{4\mu gP}$, iar $n = \frac{GR\omega^2_0}{8\pi\mu gP}$.

3° Pentru determinarea experimentală a momentului de inerţie J al unei roţi de rază R, în raport cu axa care trece prin centrul de masă al roţii (fig. 362), se înfăşoară roata cu un fir, de masă neglijabilă, acţionat de greutatea p_1 care parcurge diferenţa de nivel h în timpul T_1. Pentru eliminarea frecării în axa roţii se repetă experienţa cu o greutate p_2, obţinîndu-se timpul T_2 pentru aceeaşi diferenţă de nivel. Se presupune cuplul de frecare în axă constant şi independent de greutatea care acţionează asupra firului. Să se calculeze expresia lui J (I. V. Meşcerski).

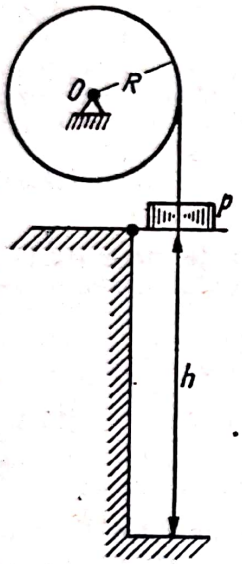


Fig. 362

Rezolvare. Notînd cu a_1, a_2 acceleraţiile în cădere a greutăţilor p_1, p_2 care antrenează roata, cu $\dot\omega_1 = \frac{a_1}{R}$, $\dot\omega_2 = \frac{a_2}{R}$ acceleraţiile unghiulare corespunzătoare ale roţii şi cu M_f momentul constant al cuplului de frecare în axă, se scriu ecuaţiile:

$$J\dot\omega_1 + \frac{p_1}{g}a_1R = p_1R - M_f, \qquad J\dot\omega_2 + \frac{p_2}{g}a_2R = p_2R - M_f.$$

Pe de altă parte: $h = \frac{a_1T_1^2}{2} = \frac{a_2T_2^2}{2}$

şi după eliminarea parametrilor: $\dot\omega_1$, $\dot\omega_2$, a_1, a_2, M_f între cele şase ecuaţii se găseşte:

$$J = \frac{\frac{1}{2h}(p_1 - p_2) - \frac{1}{g}\left(\frac{p_1}{T_1^2} - \frac{p_2}{T_2^2}\right)}{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2}}R^2.$$

§ 148. Mişcarea plan-paralelă a solidului rigid. Mişcarea plană

a. Se ştie (§ 116) că un solid rigid are o mişcare plan-paralelă dacă există un plan, invariabil legat de solid, care se mişcă într-un plan fix. Dacă există un asemenea plan este suficient să se cunoască mişcarea unei secţiuni plane, paralelă cu planul fix, dusă printr-un punct oarecare al sodiului. Aceasta este mişcarea plană. Secţiunea plană poate fi dusă şi prin centrul C de masă al solidului. Se ştie (§ 117, *i*) că mişcarea plană este determinată prin $\bar r_o = \bar r_o(t)$, vectorul de poziţie, în raport cu axele fixe $O'x'y'$, al originii O a axelor mobile Oxy, solidare cu planul mobil, şi prin $\theta = \varphi(t)$, unghiul dintre axele mobile faţă de cele fixe (de exemplu, Ox faţă de $O'x'$).

Fără a particulariza problema se poate alege originea axelor mobile chiar în C, centrul de masă. În acest caz, necunoscutele problemei sînt $\bar r_c\ (x_c, y_c)$ şi θ, unde x_c şi y_c sînt coordonatele centrului de masă al solidului rigid în

raport cu axele fixe $O'x'y'$. Cele trei necunoscute scalare corespund celor trei grade de libertate ale solidului rigid.

b. Ecuațiile mișcării se deduc din teoremele și metodele generale. Astfel, din teorema mișcării centrului de masă se obține ecuația :

$$m\ddot{\bar{r}}_c = \bar{R} + \bar{R}', \tag{14.41}$$

unde m este masa solidului, $\bar{R}$ este suma forțelor exterioare date și $\bar{R}'$ este suma forțelor de legătură.

Proiectînd ecuația (14.41) pe axele fixe se obțin ecuațiile scalare :

$$m\ddot{x}_c = X + X', \qquad m\ddot{y}_c = Y + Y', \tag{14.42}$$

unde X, Y și X', Y' sînt valorile sumelor proiecțiilor forțelor date și ale forțelor de legătură pe axele fixe.

Din teorema momentului cinetic față de centrul de masă rezultă ecuația :

$$\dot{\bar{K}}_c = \bar{M}_c + \bar{M}'_c, \tag{14.43}$$

unde $\bar{K}_c$ este momentul cinetic, în mișcarea relativă a solidului rigid, în raport cu C, iar $\bar{M}_c$ și $\bar{M}'_c$ sînt momentele rezultante ale forțelor date și de legătură în raport cu C. Proiectînd ecuația vectorială (14.43) pe axa Cz perpendiculară pe planul fix se ajunge la ecuația scalară :

$$J_z\ddot{\theta} = M_z + M'_z, \tag{14.44}$$

unde : J_z este momentul de inerție al solidului rigid în raport cu axa Cz, iar M_z și M'_z sînt valorile momentelor rezultante față de Cz ale forțelor date și de legătură.

În concluzie, mișcarea plan-paralelă a solidului rigid se studiază cu ajutorul ecuațiilor (14.42) și (14.44).

c. *Observații și consecințe.* 1° Dacă se poate asimila solidul rigid cu o placă plană care se mișcă într-un plan fix (mișcare plană), ecuația (14.44) capătă forma :

$$J_c\ddot{\theta} = M_c + M'_c, \tag{14.45}$$

unde, atît momentul de inerție cît și valorile momentelor forțelor date și de legătură se calculează în raport cu punctul C (fig. 363).

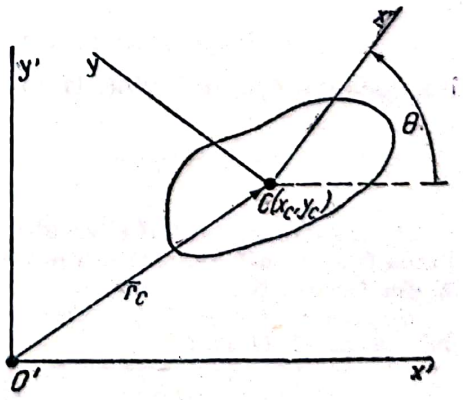


Fig. 363

2° În cazul unui sistem de solide rigide care au mișcări paralele cu un plan fix, se aplică fiecărui solid ecuațiile (14.41), (14.43) sau echivalentele lor scalare, avînd grija să se considere și forțele de legătură interioare (dintre solidele sistemului).

d. **Aplicaţii.** 1° O roată omogenă, de greutate $\bar{G}$ şi rază R, se rostogoleşte fără să alunece pe o şină orizontală. În momentul iniţial centrul roţii are viteza $\bar{v}_0$ (fig. 364). Dacă s este coeficientul de frecare la rostogolire, se cere: legea mişcării, timpul şi distanţa parcursă, pînă la oprire.

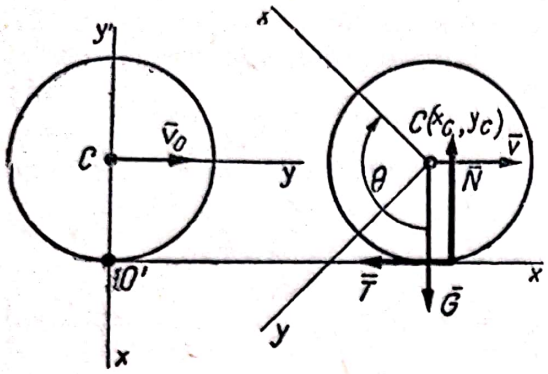


Fig. 364

Rezolvare. Se alege ca sistem de referinţă fix $O'x'y'$, legat de poziţia iniţială a roţii, $O'x'$ după şină, $O'y'$ trecînd prin centrul roţii C. Axele mobile, în momentul iniţial, sînt: Cx în direcţia axei $O'y'$, dar în sensul opus, iar Cy paralel şi în acelaşi sens cu $O'x'$, respectiv cu $\bar{v}_0$.

Forţele care intervin sînt: greutatea $\bar{G}$, reacţiunea normală $\bar{N}$, cuplul de frecare la rostogolire de moment $|\bar{M}_r| = Ns$, forţa de frecare la alunecare $|\bar{T}| \leqslant N\mu$, fără de care nu este posibilă rostogolirea. Ecuaţia mişcării în care s-a ţinut seama de sensurile convenite pentru forţe, momentele lor şi sensul momentului cinetic sînt:

$$\frac{G}{g}\ddot{x}_c = -T, \quad \frac{G}{g}\ddot{y}_c = N - G = 0, \quad J_c\ddot{\theta} = TR - Ns.$$

Se mai adaugă şi condiţia de rostogolire fără alunecare: $x_c = R\,\theta$. Eliminînd pe N, T şi x_c, se găseşte: $\ddot{\theta} = -\dfrac{2gs}{3R^2}$.

Rezultatele integrărilor sînt:

$$\omega = \omega_0 - \frac{2gs}{3R^2}t, \qquad v = v_0 - \frac{2gs}{3R}t,$$

$$\theta = \omega_0 t - \frac{gs}{3R^2}t, \qquad x_c = v_0 t - \frac{gs}{3R}t^2.$$

Condiţia pentru T este:

$$|T| = \frac{G}{g}\ddot{x}_c = \frac{2sG}{3R} \leqslant \mu G, \quad \text{deci} \quad \frac{s}{R} \leqslant \frac{3}{2}\mu.$$

Timpul de oprire este:

$$t_1 = \frac{3Rv_0}{2gs},$$

iar distanţa parcursă pînă la oprire este:

$$x_1 = \frac{3Rv_0^2}{4gs}.$$

2° O şaibă de rază R şi greutate $\bar{G}$ este înfăşurată pe un fir fixat cu un capăt de tavan. Şaiba fiind lăsată să cadă din poziţia cea mai de sus, să se studieze mişcarea ei şi tensiunea S din fir (N. N. Buchholtz).

Rezolvare. În raport cu axele $O'x'y'$ şi Cxy alese ca în figura 365, ecuaţiile mişcării centrului de masă O sînt:

$$\frac{G}{g}\ddot{x}_c = G - S, \quad \frac{G}{g}\ddot{y}_c = 0,$$

iar a mişcării în raport cu C : $J_c\ddot{\theta} = SR$, cu condiţia : $x_c = R + R\theta$ şi consecinţele ei : $\dot{x}_c = R\dot{\theta}$, $\ddot{x}_c = R\ddot{\theta}$. După eliminarea tensiunii S, ţinînd seama că $J_c = \frac{GR^2}{2g}$, se ajunge la ecuaţiile :

$$\ddot{\theta} = \frac{2g}{3R}, \qquad \ddot{x}_c = \frac{2g}{3}, \qquad \ddot{y}_c = 0,$$

care integrate dau :

$$\theta = \frac{g}{3R}t^2, \qquad x_c = R + \frac{g}{3}t^2, \qquad y_c = 0, \qquad S = \frac{P}{3},$$

deoarece condiţiile iniţiale sînt :

$$\theta_0 = \dot{\theta}_0 = 0, \quad (x_c)_0 = R, \quad (\dot{x}_c)_0 = 0, \quad (y_c)_0 = 0, \quad (\dot{y}_c)_0 = 0.$$

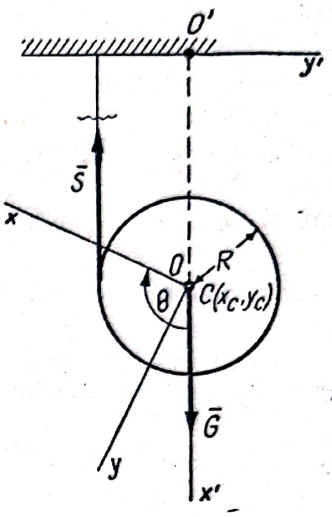


Fig. 365

3° O bară dreaptă, omogenă, de greutate G, de lungime $2l$, se sprijină cu un capăt pe o podea orizontală fără frecare. Unghiul dintre bară şi verticală fiind în momentul iniţial θ_0, bara începe să cadă pornind din poziţia de repaus. Să se studieze mişcarea barei şi reacţiunea podelei (N. N. Buchholtz).

Rezolvare. Forţele fiind verticale, iar bara iniţial în repaus, centrul ei de masă se va mişca pe verticală, astfel că se aleg ca axe fixe : $O'y'$ verticala centrului C, $O'x'$ orizontala care trece prin A, ca axe mobile Cy după direcţia barei, iar Cx perpendicular pe bară (fig. 366).

Ecuaţiile mişcării sînt :

$$x_c = 0, \qquad \frac{G}{g}\ddot{y}_c = N - G, \qquad J_c\ddot{\theta} = Nl\sin\theta,$$

unde :

$$y_c = l\cos\theta \qquad \text{şi} \qquad J_c = \frac{Gl^2}{3g}.$$

Se calculează :

$$\dot{y}_c = -l\dot{\theta}\sin\theta \quad \text{şi} \quad \ddot{y}_c = -l\ddot{\theta}\sin\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta;$$

după eliminare :

$$N = G\left[1 - \frac{l}{g}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\right] = \frac{Gl\ddot{\theta}}{3g\sin\theta},$$

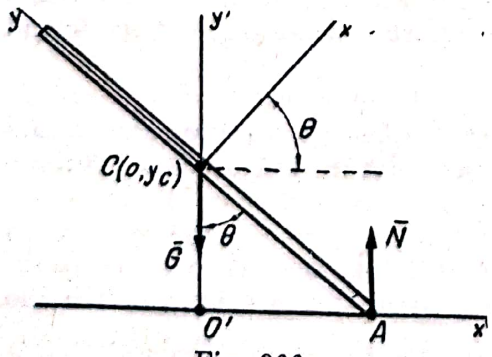


Fig. 366

se ajunge la ecuaţia diferenţială :

$$\frac{3g}{l}\sin\theta = \ddot{\theta} + 3(\ddot{\theta}\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta).$$

Se înmulţeşte cu $2\dot{\theta}\,dt$ şi se integrează :

$$C - \frac{6g}{l}\cos\theta = \dot{\theta}^2 + 3\dot{\theta}^2\sin^2\theta.$$

După determinarea constantei de integrare ($\dot{\theta}_0 = 0$, $\theta = \theta_0$), se găseşte :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6g(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{l(1 + 3\sin^2\theta)}.$$

Apoi, prin derivare :

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{l} \cdot \frac{4 - 6 \cos\theta_0 \cos\theta + 3\cos^2\theta}{(1 + 3\sin^2\theta)^2} \sin\theta$$

şi :

$$N = G \frac{4 - 6 \cos\theta_0 \cos\theta + 3\cos^2\theta}{(1 + 3\sin^2\theta)^2}.$$

Observaţii. α) În cazul $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ (problema din Buchholtz), $N = \frac{4}{7} G$, în momentul iniţial, şi $N = \frac{G}{4}$, în momentul final $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$. Reacţiunea în momentul căderii barei pe planul orizontal este întotdeauna $\frac{G}{4}$ independent de θ_0.

β) Folosirea teoremei energiei cinetice atît la această aplicaţie cît şi la cele precedente permite stabilirea mai uşoară şi mai rapidă a unora din rezultate.

CAPITOLUL XV

PROBLEME SPECIALE

A. DISPOZITIVE MECANICE SIMPLE

§ 149. Generalităţi

a. Încă din timpurile cele mai îndepărtate omul s-a folosit de diferite corpuri solide cu care şi-a înjghebat dispozitive ca să-şi uşureze munca. La început, aceste dispozitive erau rudimentare, reducîndu-se la echivalentele lor de astăzi : pîrghia, planul înclinat, pana etc. Cu timpul, şi mai ales după descoperirea roţii, dispozitivele s-au mai perfecţionat, au apărut scripeţii şi sistemele de scripeţi etc.

Aceste dispozitive mecanice, denumite curent *maşini simple*, sînt precursoarele maşinilor propriu-zise sau a *instalaţiilor complexe* din timpurile moderne.

Studiul lor se va face, în cele ce urmează, pe baza următoarelor caracterizări :

1° Maşina simplă este un sistem de corpuri, de obicei solide, numite piesele maşinii, legate între ele, sistem care primeşte energie dinafară, o transformă şi o retransmite în afara sistemului.

2° În timpul funcţionării, piesele maşinii sînt în mişcare.

3° Sistemul are un singur grad de libertate, legăturile pieselor sînt astfel realizate încît mişcarea unei particule oarecare determină în mod univoc mişcările tuturor particulelor sistemului.

4° Piesele maşinii au, în general, mişcări simple sau asemenea mişcări încît, dacă o particulă *oarecare* a sistemului are, într-un interval de timp, energia cinetică constantă, energia cinetică a oricărei piese a maşinii rămîne constantă în acel interval de timp.

În aceste condiţii se zice că maşina funcţionează *în regim permanent.*

Exemple.[1] Pîrghia, planul înclinat, șurubul, scripetele, sistemele de scripeți, troliul pot fi considerate mașini simple, pe cînd sistemul bielă-manivelă nu poate fi denumit mașină simplă, deoarece, deși satisface primele trei condiții, nu o satisface pe a patra.

De obicei, mașinile simple permit ca prin aplicarea unor forțe mici P (forțe motoare), de pildă, a brațelor, să se învingă rezistențe mari Q (forțe rezistente, utile), de pildă, ridicarea unor sarcini mari. Se înțelege că, în anumite condiții de funcționare, se poate ca $P \geqslant Q$, cum se întîmplă în cazul unor tipuri de pîrghii.

b. Descoperirea sau perfecționarea oricărei mașini sau instalații, în general, pune premisele ușurării condițiilor de muncă și îmbunătățirii condițiilor de trai a oamenilor muncii. Din nefericire însă, în regimurile în care se menține exploatarea omului de către om, orice descoperire sau perfecționare are drept consecință înrăutățirea condițiilor de existență, accentuarea exploatării, șomajul.

O altă latură a descoperirii mașinilor simple o reprezintă încercările pentru realizarea unei mișcări perpetue. Bazați pe faptul că prin aplicarea unor forțe mici se învinge rezistențe relativ mari, mulți oameni au încercat — unii mai încearcă și azi — să realizeze o mașină care, o dată pornită, să nu se mai oprească, fără ca să primească energie dinafară, mai mult, dacă se poate, chiar să și furnizeze energie. Acestea sînt elementele celebrei probleme denumite *perpetuum mobile*, rămasă nerezolvată. În condițiile enunțate, problema nu se poate rezolva. Se știe că în cazul unui sistem conservativ izolat, sau închis, energia mecanică a sistemului se conservă, adică sistemul o dată pornit nu s-ar mai opri niciodată. Un asemenea sistem este însă imposibil de realizat, deoarece nu se pot elimina frecările care fac ca energia mecanică a sistemului să se transforme ireversibil în energie termică. Se știe că energia termică rezultată din frecare nu se transformă de la sine în energie mecanică. Astfel că mașina se va opri după un timp mai mult sau mai puțin îndelungat, dacă nu i se furnizează energie dinafara ei.

c. De obicei, o mașină simplă primește energia agentului care o acționează, sub formă de *lucru mecanic motor*. Acest lucru mecanic se transformă în mașină și se folosește parțial, tot sub formă de lucru mecanic, pentru învingerea rezistențelor.

Importante pentru studiul mașinilor simple sînt, în primul rînd, următoarele caracteristici:

1° *Raportul de transformare* (ν) este raportul dintre forța rezistentă utilă (Q) și forța motoare aplicată (P), adică:

$$\nu = \frac{Q}{P}. \tag{15.1}$$

2° *Randamentul* (η) este raportul dintre lucrul mecanic rezistent util (L_u), furnizat de mașină prin învingerea rezistențelor utile, și lucrul mecanic motor (L_m), primit de mașină, adică:

$$\eta = \frac{L_u}{L_m}. \tag{15.2}$$

[1] Pentru cunoașterea aspectului și funcționării lor, vezi Gh. Manea. *Organe de mașini*. Editura tehnică, 1956.

În general, se caută ca raportul de transformare al maşinii simple să fie cît mai mare cu putinţă. Teoretic, se pot compune maşini cu orice raport de transformare, condiţiile de funcţionare însă limitează în practică acest raport.

O maşină este cu atît mai economică cu cît randamentul ei este mai apropiat de 1, *valoare limită*, nerealizabilă în practică.

Randamentul oricărei maşini este subunitar.

Exemple: Maşini cu aburi ..... $\eta = 0{,}10—0{,}20$
Motoare cu combustie internă ..... $\eta = 0{,}25—0{,}35$
Maşini electrice ..... $\eta = 0{,}80—0{,}95$

§ 150. Condiţia de funcţionare în regim permanent

a. Pentru ca o maşină simplă să funcţioneze în regim permanent, adică pentru ca energia cinetică a oricărei piese şi a întregului sistem să rămînă constantă, este necesar şi suficient ca, potrivit teoremei energiei :

$$dE = \Delta L_{ext} + \Delta L_{int} = 0, \qquad (15.3)$$

adică : suma lucrurilor mecanice ale tuturor forţelor exterioare şi interioare să fie nulă în intervalul de timp considerat.

b. În analiza funcţionării unei maşini simple se iau în considerare următoarele forţe aplicate sistemului :

1° *Forţe motoare*, datorite acţiunii musculare, a aburilor, a vîntului, a gazelor arse într-un cilindru etc., toate forţe exterioare sistemului.

2° *Forţe rezistente utile*, datorite sarcinilor de ridicat, a rezistenţelor de învins etc., toate forţe exterioare.

3° *Forţe de legătură normale* dintre piesele maşinii, forţe interioare, sau dintre piese şi solidele înconjurătoare, forţe exterioare.

4° *Forţe rezistente dăunătoare*, în care se înglobează forţele de legătură tangenţiale (frecări) dintre piesele maşinii, forţe interioare, apoi forţele de legătură tangenţiale dintre piesele maşinii şi solidele înconjurătoare (frecări), rezistenţele mediului înconjurător faţă de mişcarea pieselor, sarcinile moarte (greutăţile pieselor mobile ale maşinii) etc., toate forţe exterioare.

c. Lucrul mecanic elementar al forţelor aplicate sistemului se compune din :

1° *Lucrul mecanic motor* (ΔL_m) datorit forţelor motoare şi care este *pozitiv*.

2° *Lucrul mecanic util* (ΔL_u), al forţelor rezistente utile, care este *negativ*.

3° *Lucrul mecanic normal* (ΔL_n) al forţelor de legătură normale (interioare şi exterioare), care este *nul* pentru toate deplasările caracteristice funcţionării normale a maşinii, în ipoteza rigidităţii pieselor.

4° *Lucrul mecanic pierdut* (ΔL_p) al forţelor de legătură tangenţiale (frecări interioare şi exterioare), al rezistenţelor mediului fluid înconjurător, al sarcinilor moarte etc., şi care este *negativ*.

Toate lucrurile mecanice negative se înglobează în *lucrul mecanic rezistent*, care se compune din două părţi distincte: lucrul mecanic util şi lucrul mecanic pierdut. Se înţelege că precizarea utilităţii este legată de natura maşinii şi de modul ei de funcţionare.

Scanned with OKEN Scanner

Pe această bază, ecuaţia (15.3) se poate scrie sub forma :

$$\Delta L_{ext} + \Delta L_{int} = \Delta L_m - \Delta L_u - \Delta L_p = 0, \tag{15.4}$$

de unde :

$$\Delta L_m = \Delta L_u + \Delta L_p, \tag{15.5}$$

adică : *condiţia necesară şi suficientă ca o maşină simplă să funcţioneze în regim permanent este ca lucrul mecanic motor să egaleze, în orice interval de timp, lucrul mecanic rezistent.*

d. *Observaţii.* 1° Randamentul maşinii simple se mai pune şi sub forma :

$$\eta = \frac{\Delta L_u}{\Delta L_m} = \frac{\Delta L_m - \Delta L_p}{\Delta L_m} = 1 - \frac{\Delta L_p}{\Delta L_m} < 1 \tag{15.6}$$

sau :

$$\eta = \frac{\Delta L_u}{\Delta L_u + \Delta L_p}.$$

2° Dacă dt este intervalul de timp considerat, randamentul maşinii poate fi exprimat şi în funcţie de puteri :

$$\eta = \frac{P_u}{P_m} = 1 - \frac{P_p}{P_m}, \tag{15.7}$$

unde : P_m este puterea agentului motor, P_u este puterea utilă, P_p este puterea pierdută.

3° Şi în calculul raportului de transformare intervin, pe lîngă forţele motoare (P), forţele rezistente utile (Q) şi forţele rezistente dăunătoare. Din această cauză, raportul de transformare real ν este inferior raportului de transformare ideal ν_0, corespunzător cazului în care forţele rezistente dăunătoare ar fi nule.

4° Pentru îmbunătăţirea atît a randamentului cît şi a raportului de transformare al maşinii simple şi, în general, al maşinilor, se aplică o serie de măsuri ca :

α) micşorarea frecărilor, prin ungere, prin folosirea rulmenţilor cu bile sau cu role etc. ;

β) micşorarea sarcinilor moarte, prin folosirea de piese uşoare, printr-o cît mai bună centrare a pieselor în mişcare etc.

§ 151. Aplicaţii

1° Pîrghia este un solid avînd de obicei forma unei bare care se poate roti în jurul unui punct fix O (articulaţie sau reazem) şi este acţionat de forţele $\bar{P}$ (forţa motoare), $\bar{Q}$ (forţa rezistentă utilă), $\bar{G}$ (greutatea proprie). Prin folosirea unor materiale uşoare şi printr-o bună echilibrare a pîrghiei, greutatea ei poate fi neglijată într-un prim calcul. Alte elemente mecanice sînt : forţa de legătură normală $\bar{N} = \bar{P} + \bar{Q}$; în cazul forţelor paralele : $N = P + Q$; cuplul de frecare în articulaţie de moment : $M_f \leqslant \mu' N r$, unde μ' este coeficientul de frecare în articulaţii (fusuri), iar r este raza fusului.

Se presupune că pîrghia are o rotaţie elementară compatibilă cu legăturile (fig. 367), de unghiul $\Delta\theta$.

Condiţia de funcţionare în regim permanent este:

$$Pa\Delta\theta = Qb\Delta\theta + \mu'(P+Q)r\Delta\theta, \tag{15.8}$$

unde Pa şi Qb sînt valorile momentelor forţelor P şi Q în raport cu axa de rotaţie.

Raportul de transformare dedus din (15.8) este:

$$\nu = \frac{Q}{P} = \frac{a-\mu' r}{b+\mu' r}. \tag{15.9}$$

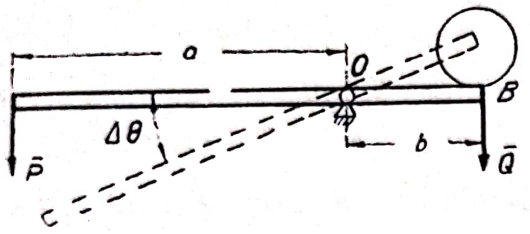


Fig. 367

Raportul de transformare ideal, pentru $\mu' = 0$, este:

$$\nu_0 = \left(\frac{Q}{P}\right)_0 = \frac{a}{b} > \frac{a-\mu' r}{b+\mu' r}. \tag{15.10}$$

Teoretic, raportul de transformare poate primi orice valoare. Randamentul este:

$$\eta = \frac{\Delta L_u}{\Delta L_m} = \frac{Qb\Delta\theta}{Pa\Delta\theta} = \frac{Q}{P}\cdot\frac{b}{a} = \frac{\nu}{\nu_0} < 1,$$

evident că valoarea ideală 1 corespunde ipotezei $\mu' = 0$.

Calculînd şi deplasările elementare ale punctelor A şi B,

$$\Delta s = a\Delta\theta \qquad \Delta q = b\Delta\theta,$$

se găseşte:

$$\Delta q = \frac{\Delta s}{\frac{a}{b}} = \frac{\Delta s}{\nu_0},$$

adică:

α) deplasările sînt independente de frecări,

β) deplasarea rezistenţei utile este invers proporţională cu raportul de transformare ideal, adică: *ceea ce se cîştigă în forţă, se pierde în deplasare.*

În realitate, din cauza frecărilor, se cîştigă mai puţin în forţă decît se pierde în deplasare.

Totuşi, pîrghia rămîne una din cele mai utile maşini simple, pentru uşoara ei manipulare şi pentru raportul ei relativ mare de transformare.

2° **Scripetele fix** se compune dintr-un disc cilindric, avînd un şanţ scobit (fig. 368, *a*) în suprafaţa laterală, peste care este aşezat cablul (fir) de capetele căruia atîrnă sarcina $\bar{Q}$ şi acţionează forţa motoare $\bar{P}$. Fusul scripetelui se reazemă pe un palier fix. Discul, solidar cu fusul, este acţionat prin fir, care nu alunecă în şanţ, ci, aderînd, antrenează discul (fig. 368, *b*).

Nu se va confunda scripetele cu un disc blocat pe care alunecă firul (frecarea firelor). La discul blocat, pentru deplasarea firului, acţiunea ($\bar{P}$) trebuie să echilibreze atît sarcina ($\bar{Q}$) cît şi frecarea mare dintre fir şi disc. La scripete, frecarea de alunecare ajută la antrenarea discului, iar acţiunea trebuie să echilibreze sarcina şi frecarea din fus, care, în general, este mică. În consecinţă, mişcarea relativă dintre fir şi discul blocat este o *alunecare*, pe cînd între fir şi scripete este o *rostogolire* fără alunecare.

Un alt fenomen care apare în practică este *rigiditatea cablului*. Firul este conceput ca *neextensibil* şi *perfect flexibil*. În realitate, cablurile se lungesc dacă sînt întinse şi nu aderă perfect la suprafaţa pe care sînt înfăşurate. Această imper-

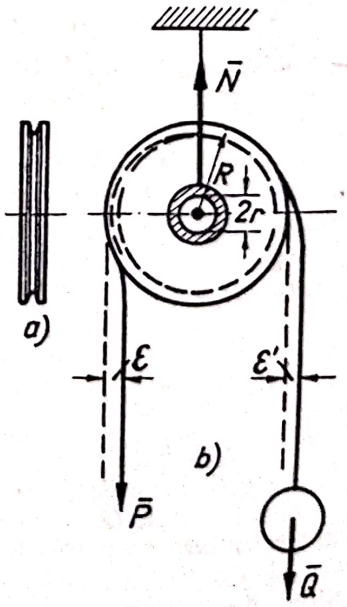


Fig. 368

fecţiune se manifestă printr-o întîrziere a cablului la trecerea de la o curbură la alta. Astfel, capătul de care atîrnă sarcina $\bar{Q}$ la ridicare se racordează cu întîrziere la disc, iar capătul acţionat de $\bar{P}$ întîrzie în trecerea de la curbura discului la linia dreaptă. Din această cauză, $\bar{P}$ se găseşte la distanţa $R - \varepsilon$ de fus, iar $\bar{Q}$ la distanţa $R + \varepsilon'$ de fus. Aceasta se traduce printr-o mărire a momentului sarcinii rezistente şi o micşorare a momentului forţei motoare, adică printr-o micşorare atît a raportului de transformare cît şi a randamentului scripetelui.

Scriind condiţia (15.5) pentru o rotaţie de unghi $\Delta\theta$:

$$P(R - \varepsilon)\,\Delta\theta = Q(R + \varepsilon')\,\Delta\theta + (P + Q)\,\mu' r\Delta\theta,$$

se obţine:

$$\nu = \frac{Q}{P} = \frac{R - \varepsilon - \mu' r}{R + \varepsilon' + \mu' r} = \frac{1}{k}, \tag{15.11}$$

unde:

$$k \approx 1 + \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{R} + \frac{2\mu' r}{R} = 1 + \lambda + \frac{2\mu' r}{R} > 1,$$

iar ε, ε', respectiv λ, se găsesc în tabele. Deci raportul de transformare este subunitar, iar randamentul:

$$\eta = \frac{Q\Delta q}{P\Delta s} = \frac{1}{k} \cdot 1 = \frac{1}{k} < 1, \tag{15.12}$$

deoarece raportul $\frac{\Delta q}{\Delta s}$ nu depinde de frecări sau de rigiditatea cablului, ci numai de lungirea lui, care fiind neglijabilă se poate scrie:

$$\frac{\Delta q}{\Delta s} = \left(\frac{\Delta q}{\Delta s}\right)_0 = \left(\frac{P}{Q}\right)_0 \eta_0 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Cu tot raportul de transformare subunitar, scripetele are o largă utilizare, fiind un schimbător al sensului forţei motoare. În adevăr, ridicarea sarcinii $\bar{Q}$ se face trăgînd de cablu în jos, ceea ce este mult mai uşor decît a-l trage în sus, omul putînd la nevoie folosi şi propria sa greutate.

3° **Scripetele mobil** este caracterizat prin faptul că sarcina este prinsă de fusul scripetelui, un capăt al cablului este fix, iar celălalt acţionat de forţa motoare $\bar{P}$ (fig. 369). Se pot folosi rezultatele de la scripetele fix, observînd că sarcina $\bar{Q}$ corespunde reacţiunii $\bar{N}$, iar tensiunea $\bar{Q}_1$, sarcinii $\bar{Q}$:

$$Q = P + Q_1, \qquad \frac{Q_1}{P} = \frac{1}{k},$$

de unde:

$$P = \frac{k}{k+1} Q, \qquad \nu = \frac{Q}{P} = \frac{k+1}{k} > 1.$$

Raportul de transformare ideal corespunde valorii $k = 1$, $\nu_0 = 2$.

Pentru randament, $\eta = \frac{Q\Delta q}{P\Delta s}$ şi deoarece deplasările, în cazul cablurilor neextensibile, nu depind de frecări sau de rigiditatea cablului:

$$\frac{\Delta q}{\Delta s} = \left(\frac{\Delta q}{\Delta s}\right)_0 = \left(\frac{P}{Q}\right)_0 \eta_0 = \frac{1}{2} 1 = \frac{1}{2},$$

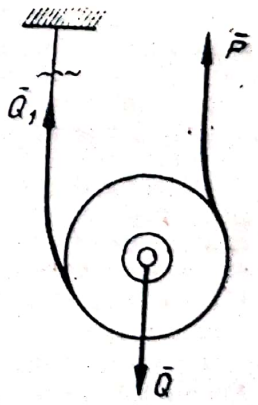


Fig. 369

rezultă :

$$\eta = \frac{Q\Delta q}{P\Delta s} = \nu\,\frac{1}{2} = \frac{k+1}{2k} < 1.$$

De obicei, scripetele mobil se combină cu un scripete fix, astfel încît cablul să fie acţionat în jos de forţa $\bar{P}$. Un calcul simplu stabileşte următoarele rezultate :

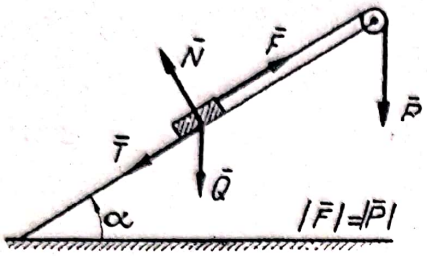


Fig. 370

$$\nu = \frac{k+1}{k^2}, \qquad \eta = \frac{k+1}{2\,k^2}.$$

Această combinaţie constituie cel mai simplu sistem de scripeţi[1].

4° **Planul înclinat** serveşte la ridicarea sarcinilor care, aşezate pe plan, sînt trase în sus cu ajutorul unui cablu. Uneori, cablul este trecut peste un scripete fix (fig. 370).

Studiind numai planul înclinat, se notează cu : $\bar{P}$ forţa motoare, Q greutatea sarcinii utile, $\bar{N}$ reacţiunea normală, $\bar{T}$ reacţiunea tangenţială a planului înclinat, μ coeficientul de frecare la alunecare, φ unghiul de frecare, α unghiul planului cu planul orizontal, Δs deplasarea elementară a sarcinii pe planul înclinat şi Δq deplasarea corespunzătoare pe verticală.

Condiţia mişcării în regim permanent este :

$$P\Delta s = Q\Delta q + T\Delta s,$$

cum :

$$N = Q\cos\alpha, \qquad T = \mu\,Q\cos\alpha, \qquad \Delta q = (\Delta s)\sin\alpha.$$

Deci :

$$\nu = \frac{Q}{P} = \frac{1}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = \frac{\cos\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}$$

şi :

$$\eta = \frac{Q\Delta q}{P\Delta s} = \nu\sin\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} < 1.$$

Pentru valori mici ale unghiurilor α şi φ, raportul de transformare este supraunitar, astfel pentru $\alpha = 30°$, $\mu = 0{,}1$ de găseşte :

$$\nu = 1{,}7 \text{ iar } \eta = 0{,}85.$$

5° Maşina simplă, denumită **şurub,** se compune din două piese : *şurubul* propriu-zis şi *mutelca* sa. Şurubul se execută dintr-un solid, cu forma unui cilindru circular drept pe suprafaţa căruia sînt tăiate, de pildă, la strung, şanţuri elicoidale. Mutelca este un solid în interiorul căruia s-au tăiat aceleaşi şanţuri, astfel încît cele două piese să se poată îmbina, iar printr-o mişcare de rotaţie şanţurile (*golurile*) uneia din piese să se completeze cu *plinurile* celeilalte (fig. 371, *a*).

Operaţia de îmbinare se numeşte înşurubare. După forma secţiunii plinului şi golului, şurubul şi mutelca au *filetul* pătrat, dreptunghiular, triunghiular etc. Tăierea filetului se bazează pe rotaţia axei strungului, axă pe care este fixată piesa, şi pe înaintarea, simultană şi proporţională cu rotaţia, a portcuţitului, în aşa fel încît urmele punctelor profilului (12—23—34) al cuţitului (fig. 371, *b*) să fie elice circulare drepte cu acelaşi pas.

---

[1] Sistemele mai complicate de scripeţi cum sînt : mufla, palanul, troliul etc. (v. A. G. Ioachimescu. *Mecanica raţională*. 1947) se pot trata ca exerciţii folosind metoda aplicată la § 151.

Dacă mutelca este fixă, pentru o rotaţie completă ($\theta = 2\pi$) a şurubului, acesta înaintează cu un pas. Înclinarea α a elicei unui punct oarecare M este unghiul dintre tangenta în M la elice şi proiecţia tangentei pe un plan dus prin M, perpendicular pe axa şurubului. Proiecţia elicei pe acest plan este un cerc cu centrul în O, pe axă, şi cu raza $OM = r$ (fig. 371, *c*). Dacă p este pasul comun al tuturor elicelor suprafeţei elicoidale, deoarece $p = 2\pi r \operatorname{tg}\alpha$, rezultă că $r\operatorname{tg}\alpha$ este constant, adică elicele mai apropiate de axa şurubului au înclinarea mai mare, iar cele mai depărtate au înclinarea mai mică.

Se notează cu r_e raza elicei celei mai depărate şi cu r_i raza elicei celei mai apropiate de axă: $r = r_i + \lambda (r_e - r_i)$, unde r este raza unei elice intermediare, iar λ un parametru variind între 0 şi + 1. Din cauza dimensiunilor mici ale plinurilor şi golurilor, în calcule, se poate aproxima că toate elicele au acelaşi r şi acelaşi α.

Se aplică şurubului un cuplu avînd momentul un vector axial de modul $M = Pl$, unde P este modulul forţei cu direcţia perpendiculară pe planul determinat de axă şi de manivela de lungime l. Şurubul înaintează în mutelcă şi exercită o acţiune asupra unui corp. Se notează cu $\bar{Q}$ reacţiunea după axă a acestuia. Pentru o rotaţie elementară de unghi $\Delta\theta$, înaintarea şurubului este Δq:

$$\frac{\Delta q}{\Delta\theta} = \frac{p}{2\pi} = \frac{2\pi r \operatorname{tg}\alpha}{2\pi} = r \operatorname{tg}\alpha. \qquad (15.13)$$

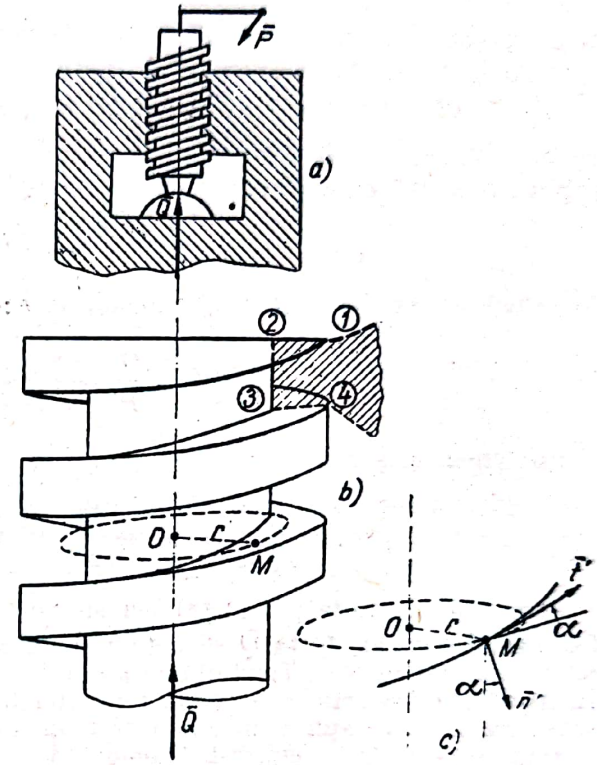


Fig. 371

Pentru calculul raportului de transformare ideal ν_0, cazul frecărilor nule, condiţia este $Pl\,\Delta\theta - Q\,\Delta q = 0$, de unde: $\nu_0 = \left(\frac{Q}{P}\right) = \frac{l\Delta\theta}{\Delta q} = \frac{l}{r \operatorname{tg}\alpha}$. Cum în general l este mare, r şi α mici, şurubul are un raport de transformare mare (35—40). Evident că în ipoteza frecărilor nule randamentul este 1.

Pentru cazul real se notează cu $\varphi = \operatorname{arctg}\mu$ unghiul de frecare dintre suprafeţele în contact ale plinurilor şi golurilor, cu n' modulul reacţiunii normale a mutelcii pe unitatea de arie din jurul punctului M a suprafeţei elicoidale de contact a şurubului, cu t' modulul reacţiunii tangenţiale pe unitatea de arie a aceleiaşi suprafeţe datorită frecării dintre mutelcă şi şurub şi cu ΔA un element de arie din jurul punctului M al suprafeţei. Se scrie relaţia limită dintre modulele forţelor elementare:

$$t'\Delta A = \mu n'\Delta A. \qquad (15.14)$$

Ţinînd seama de toate elementele de arie ale suprafeţei de contact, condiţia de funcţionare în regim permanent este:

$$Pl\Delta\theta = Q\Delta q + \Sigma(t'\Delta A)\Delta s, \qquad (15.15)$$

unde Δs este deplasarea pe elice corespunzătoare rotaţiei elementare de unghi $\Delta\theta$:

$$\Delta s = \frac{\Delta q}{\sin\alpha} = \frac{r\,\Delta\theta}{\cos\alpha}. \qquad (15.16)$$

O altă relaţie se deduce din condiţiile de echilibru ale forţelor aplicate şurubului; astfel, proiectînd toate forţele pe axa şurubului, se scrie:

$$Q - \Sigma(n'\Delta A)\cos\alpha + \Sigma(t'\Delta A)\sin\alpha = 0, \tag{15.17}$$

sumele referindu-se la toate elementele de arie ale suprafeţei de contact. Se elimină t', n' şi deplasările elementare între (15.13), (15.14), (15.15), (15.16) şi (15.17); astfel:

$$Q = (\cos\alpha - \mu\sin\alpha)\,\Sigma n'\Delta A,$$

$$Pl = Qr\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{\mu r}{\cos\alpha}\Sigma n'\Delta A = Q\,r\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{\mu r Q}{\cos\alpha\,(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)},$$

şi pînă la sfîrşit se găseşte:

$$M = Pl = Q\,r\,\mathrm{tg}\,(\alpha + \varphi). \tag{15.18}$$

Se calculează apoi raportul de transformare:

$$\nu = \frac{Q}{P} = \frac{l}{r\,\mathrm{tg}\,(\alpha + \varphi)} < \nu_0 \tag{15.19}$$

şi randamentul şurubului:

$$\eta = \frac{Q\Delta q}{Pl\Delta\theta} = \nu\frac{\Delta q}{l\Delta\theta} = \nu\frac{r\,\mathrm{tg}\,\alpha}{l} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,(\alpha + \varphi)} < 1. \tag{15.20}$$

Observaţie. Rezultatul (15.18) corespunde ipotezei înşurubării. Se poate întîmpla şi fenomenul contrar, forţa $\bar{Q}$ să acţioneze în sensul deşurubării. De pildă, un corp elastic este strîns şi deformat. Tendinţa corpului de a-şi relua forma dă naştere acţiunii axiale $\bar{Q}$. În acest caz, frecarea este opusă tendinţei de deşurubare şi, pentru a se evita deşurubarea, este necesar să se aplice un cuplu de moment: $M' = Qr\,\mathrm{tg}\,(\alpha - \varphi)$.

Dacă $\alpha > \varphi$, fără cuplul de moment M', şurubul se deşurubează.

Dacă $\alpha \leqslant \varphi$, şurubul este *autofixat*, deoarece nu mai este necesar un cuplu pentru menţinerea lui în repaus, $M' \leqslant 0$.

Deci, cu cît înclinarea este mai mică decît unghiul de frecare, cu atît deşurubarea se face mai greu, necesitînd aplicarea unui cuplu în acest sens, iar şurubul este autofixat şi se numeşte *şurub de fixare*.

Invers, cu cît înclinarea este mai mare decît unghiul de frecare, cu atît deşurubarea se face mai uşor, şurubul denumit *de mişcare* este un *transformator cinematic*. Un asemenea şurub este utilizat, de pildă, la cricurile de ridicat vehicule.

B. CIOCNIRI. PERCUŢII

§ 152. Exemple. Forţă percutantă. Percuţie

a. Cele două mărimi care caracterizează mişcarea mecanică sînt: cantitatea de mişcare ($m\bar{v}$) şi energia cinetică $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$, definite la cap. XIII. §§ 126 şi 135.

În timpul mişcării aceste mărimi variază potrivit teoremelor corespunzătoare exprimate prin relaţiile (13.6) şi (13.44). Astfel, cantitatea de mişcare

a unui punct material de masă m, acționat, un interval de timp $t' - t$, de o forță $\bar{F}$, variază după relația :

$$m\bar{v}' - m\bar{v} = \int_t^{t'} \bar{F}\, dt, \tag{15.21}$$

unde $\bar{v}$ este viteza punctului în momentul t, iar $\bar{v}'$ este viteza în momentul t'. Partea a II-a a relației este impulsul total al forței pentru intervalul de timp $t' - t$.

Dacă asupra punctului material acționează forțe obișnuite (atracția pămîntească, rezistența unui fluid etc.), variația cantității de mișcare este cu atît mai mică cu cît intervalul de timp $t' - t$ este mai mic. Deci, sub acțiunea forțelor obișnuite, mișcarea mecanică are un caracter *continuu*.

b. În natură se întîlnesc însă și mișcări mecanice cu variații mari, ale celor două mărimi caracteristice, într-un timp foarte mic. Asemenea fenomene se observă mai ales cînd două sau mai multe solide se întîlnesc în timpul mișcării lor. Astfel, lovirea unei mingi cu paleta, lovirea ei de un perete, baterea unui nit sînt exemple de mișcări în care viteza solidului variază brusc, iar cantitatea de mișcare și energia cinetică a solidului au variații apreciabile într-un timp foarte mic. *Acest lucru nu este posibil decît dacă forța care acționează asupra solidului în acel interval mic de timp este foarte mare.* În adevăr, presupunînd forța constantă și timpul $t' - t$, (din 15.21) se deduce :

$$\bar{F} = \frac{m(\bar{v}' - \bar{v})}{t' - t}. \tag{15.22}$$

Dacă numitorul $t' - t$ este foarte mic, de pildă, o zecime de secundă, pentru ca modulul numărătorului să fie mare, modulul forței trebuie să fie neobișnuit de mare. Asemenea forțe foarte mari, care acționează un timp foarte mic, aproape instantaneu, se numesc *forțe instantanee* sau *forțe percutante*. Pentru a le deosebi și în scris de forțele obișnuite se vor nota cu alte caractere ($\overline{\mathcal{F}}$).

Astfel, relația (15.21) în cazul forțelor percutante se scrie :

$$m\bar{v}' - m\bar{v} = \int_t^{t'} \overline{\mathcal{F}}\, dt = \overline{\mathcal{Q}}, \tag{15.23}$$

unde $\overline{\mathcal{Q}}$, impulsul forței percutante $\overline{\mathcal{F}}$, în intervalul de timp $t' - t$, se numește *percuția* acestei forțe. *Este evident că în timpul $t' - t$ forțele obișnuite au percuții foarte mici, neglijabile în comparație cu percuțiile forțelor percutante.*

Asemenea mișcări sînt denumite *ciocniri*.

Tot în categoria ciocnirilor sînt înglobate și mișcările solidelor cărora li se aplică brusc una sau mai multe legături care modifică mișcarea solidului într-un timp foarte scurt. Dimpotrivă, desprinderea bruscă de o legătură

nu constituie o ciocnire, deoarece pierderea bruscă a unei legături nu are drept urmare o variaţie bruscă a vitezei, respectiv a celor două măsuri ale mişcării mecanice.

c. Pentru o mai bună înţelegere a fenomenului de ciocnire se dau două exemple de calcul:

1° Un berbec folosit la bătătorirea pămîntului, în greutate de $G = 30$ kgf, este lăsat să cadă de la înălţimea $h = 1$ m. El pătrunde în pămînt pe o adîncime $d = 1$ cm. Să se calculeze forţa $\mathcal{F}$ şi timpul de aplicare pentru realizarea aceleiaşi pătrunderi (fig. 372).

Rezolvare. Fenomenul ciocnirii începe în momentul t, în care berbecul atinge pămîntul, şi se termină în momentul t', în care el a atins adîncimea d. Durata ciocnirii este $t' - t$. Energia cinetică din momentul t, Gh, se transformă integral în lucrul mecanic $\mathcal{F}d$, de deformaţie a porţiunii de pămînt. În ipoteza că rezistenţa pe care o opune pămîntul este constantă în timpul $t' - t$: $\mathcal{F} = \dfrac{Gh}{d}$, numeric: $\mathcal{F} = 3\,000$ kgf, forţa $\mathcal{F}$ este de 100 de ori mai mare decît greutatea berbecului. Pentru calculul timpului de acţionare al forţei $\mathcal{F}$ se aplică relaţia (15.23):

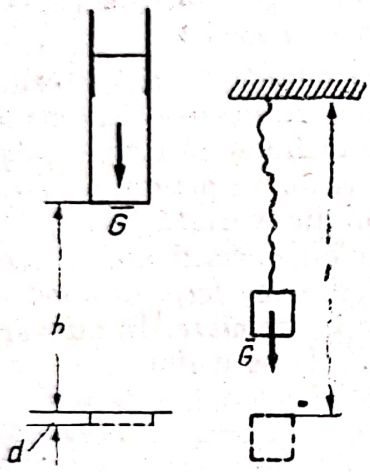


Fig. 372

Fig. 373

$$0 - mv = -\int_t^{t'} \mathcal{F}\,dt \approx -\mathcal{F}\int_t^{t'} dt \approx -\mathcal{F}(t' - t),$$

de unde:

$$t' - t = \frac{mv}{\mathcal{F}} = \frac{\dfrac{G}{g}\sqrt{2gh}}{\dfrac{Gh}{d}} = \frac{2d}{\sqrt{2gh}} \approx 0{,}00448\ s,$$

adică mai puţin ca o jumătate de sutime de secundă.

Din calcul reiese că variaţia cantităţii de mişcare este apreciabilă (13,4 kgfs) faţă de timpul extrem de mic de aplicare a forţei $\mathcal{F}$.

2° Se presupune că în timpul căderii libere a unui solid de greutate G se desfăşoară un cablu de lungime l care are un capăt fix şi celălalt legat de solid. Să se calculeze forţa $\mathcal{F}$ de întindere a cablului în momentul cînd acesta s-a desfăşurat complet (fig. 373).

În ipoteza căderii în vid, în momentul t al desfăşurării complete a cablului, viteza solidului este $v = \sqrt{2gl}$. Dacă se presupune cablul neextensibil, oprirea s-ar face în acelaşi moment, $t' = t$, adică în timp nul, acceleraţia ar deveni infinită ca şi forţa:

$$\mathcal{F} = G + \frac{G}{g}\cdot\frac{v}{t' - t} \to \infty,$$

calculată pe baza principiului lui d'Alembert.

Se constată că ipotezele au dus la rezultatul *absurd* că forţa este infinită, dar că acţionează un timp nul. Ori de cîte ori apar în mecanică asemenea rezultate, înseamnă că ipotezele au atins limitele lor de aplicabilitate şi că pentru găsirea unei soluţii acceptabile trebuie modificate ipotezele. La fel s-a procedat şi în problema frecării (cap. VII, B, § 78), renunţîndu-se la ipoteza rigidităţii solidelor. În exemplul de faţă, pentru rezolvare, este necesar să se admită lungirea cablului. Evident, problema depăşeşte cadrul mecanicii şi se rezolvă în rezistenţa materialelor pe baza cunoaşterii caracteristicilor fizice ale materialelor: deformaţii, proprietăţi elastice, limită de rupere etc., caracteristici pe care numai practica şi încercările de laborator le pot determina.

Scanned with OKEN Scanner

§ 153. Ipotezele ciocnirii

a. Din observarea şi analizarea fenomenului ciocnirii a două solide se ajunge la următoarele *constatări* :

1° Dacă t este momentul iniţial, iar t' este momentul final al interacţiunii lor, în general, există un moment intermediar t_0 $(t < t_0 < t')$ cînd interacţiunea [1] se anulează şi îşi schimbă sensul.

2° În intervalul foarte mic de timp $(t' - t)$, deplasările particulelor celor două solide sînt foarte mici.

3° Percuţiile forţelor obişnuite, pentru timpul ciocnirii, sînt foarte mici în comparaţie cu percuţiile forţelor percutante.

4° Forţele percutante sînt, pe de o parte, atît forţe exterioare cît şi interioare sistemului, iar pe de altă parte, ele sînt atît forţe active cît şi forţe de legătură, pasive.

5° În timpul ciocnirii, solidele se deformează şi revin într-o măsură oarecare la forma lor iniţială.

b. În aceste condiţii, studiul ciocnirii se va face pe baza următoarelor ipoteze :

1° Numai pentru stabilirea teoremelor, particulele sînt asimilate cu puncte materiale.

2° În timpul ciocnirii, poziţiile particulelor, în raport cu un reper fix, nu se modifică.

3° Percuţiile forţelor obişnuite sînt nule.

4° Valabilitatea principiilor fundamentale se menţine şi în intervalul de timp al ciocnirii. Ca o consecinţă, percuţiile din interiorul unui sistem sînt două cîte două egale şi direct opuse. Totuşi, ele nu se anulează reciproc, deşi au suma şi momentul rezultant nule, deoarece nu sînt aplicate aceluiaşi punct material.

§ 154. Problemele şi teoremele generale ale ciocnirii

a. De obicei, problemele de ciocnire au următorul enunţ : *Se cunosc, în momentul iniţial t al ciocnirii, poziţiile punctelor materiale M_i ale unui sistem prin $\bar{r}_i$ în raport cu un reper fix, vitezele iniţiale $\bar{v}_i$, masele m_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ şi se cere să se determine vitezele $\bar{v}_i'$ din momentul final t' al ciocnirii.*

[1] Se precizează şi cu acest prilej (v. §§ 6, 61, 135) că interacţiunea este privită aici atît prin *aspectul mecanic*, al modificării mişcării relative, cît şi prin *aspectul nemecanic*, al modificării formei celor două solide. În intervalul de timp $t_0 - t$ se produce o variaţie într-un sens a mişcării relative şi a formei solidelor, iar *o parte din energia cinetică* a sistemului se transformă în *lucru mecanic de deformaţie*. În momentul t_0 încetează modificarea mişcării relative şi a formei solidelor, pentru ca în intervalul de timp $t' - t_0$ să se producă, de obicei, o variaţie, în sens opus celei din intervalul de timp $t_0 - t$, atît a mişcării relative cît şi a formei solidelor. De obicei, în intervalul de timp $t' - t_0$, o parte a lucrului mecanic de deformaţie se transformă din nou în energie cinetică. Acesta este înţelesul anulării şi al schimbării de sens a interacţiunii.

Pentru rezolvare, pe baza ipotezelor, se va considera $\bar{r}_i$ constant, se vor neglija forţele obişnuite, se vor exprima percuţiile forţelor percutante, se vor aplica principiile şi teoremele generale.

Se va constata că problema rămîne, în general, nedeterminată dacă nu se ţine seama şi de caracteristicile elastice ale sistemelor materiale.

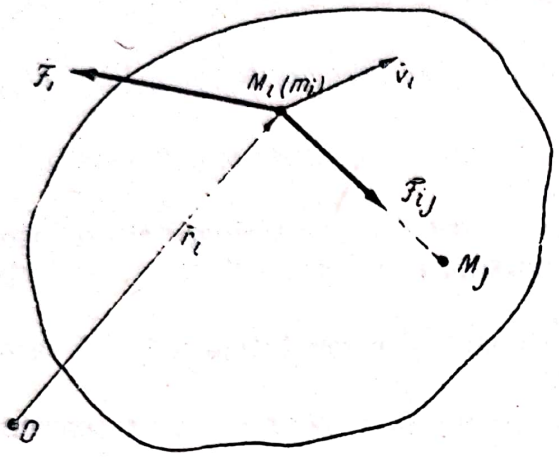


Fig. 374

b. **Teorema cantităţii de mişcare.** 1° Se notează cu $\overline{\mathfrak{F}}_i$ rezultanta forţelor percutante exterioare aplicate punctului material M_i, iar cu $\overline{\mathfrak{F}}_{ij}$ forţa percutantă interioară aplicată punctului M_i datorită punctului M_j, în cazul cînd ea există (fig. 374).

Principiul acţiunii, aplicat punctului material M_i în ipoteza neglijării forţelor obişnuite nepercutante, se exprimă prin :

$$m_i\ddot{\bar{r}}_i = \overline{\mathfrak{F}}_i + \sum_{j=1}^{n}\overline{\mathfrak{F}}_{ij}, \quad (\overline{\mathfrak{F}}_{ii} = 0)$$

sau :

$$\mathrm{d}(m_i\bar{v}_i) = \overline{\mathfrak{F}}_i\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n}\overline{\mathfrak{F}}_{ij}\,\mathrm{d}t, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{15.24}$$

Prin integrare în intervalul de timp $t' - t$ se obţine :

$$m_i\bar{v}_i' - m_i\bar{v}_i = \overline{\mathfrak{Q}}_i + \sum_{j=1}^{n}\overline{\mathfrak{Q}}_{ij}, \qquad (\overline{\mathfrak{Q}}_{ii} = 0). \tag{15.25}$$

Însumînd toate relaţiile (15.25) pentru toate punctele materiale ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) şi observînd că pe baza aplicării principiului egalităţii acţiunii şi reacţiunii :

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{ij} + \overline{\mathfrak{Q}}_{ji} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\mathfrak{Q}}_{ij} = 0,$$

rămîne :

$$\bar{H}' - \bar{H} = \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{v}_i' - \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n}\overline{\mathfrak{Q}}_i, \tag{15.26}$$

adică : *Variaţia cantităţii de mişcare a sistemului de puncte materiale, pe durata ciocnirii, este egală cu suma percuţiilor exterioare (date şi de legătură).*

2° Deoarece : $\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{v}_i = m\bar{v}$ este cantitatea de mişcare a unui punct material avînd masa sistemului şi mişcarea centrului de masă al sistemului, relaţia (15.26), scrisă sub forma :

$$m\bar{v}' - m\bar{v} = \sum_{i=1}^{n}\overline{\mathfrak{Q}}_i, \tag{15.27}$$

Scanned with OKEN Scanner

exprimă că : *Variaţia cantităţii de mişcare a sistemului este aceea a centrului de masă în care s-ar concentra masa sistemului şi asupra căruia ar acţiona, pe durata ciocnirii, toate forţele percutante exterioare.*

3° În cazul în care sistemul nu are legături, ciocnirea se numeşte liberă, iar dacă nu există forţe percutante exterioare, cantitatea de mişcare a sistemului se conservă :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i' = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i. \tag{15.28}$$

4° În cazul cînd forţele exterioare percutante sînt perpendiculare pe o direcţie oarecare *(Ox)*, deoarece $\mathfrak{A}_{ix} = 0$, rezultă :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i v_{ix}' = \sum_{i=1}^{n} m_i v_{ix}, \tag{15.29}$$

adică : valoarea proiecţiei cantităţii de mişcare a sistemului pe direcţia considerată se conservă.

c. **Teorema momentului cinetic.** 1° Se înmulţesc ambele părţi ale relaţiei (15.25) vectorial cu $\bar{r}_i$:

$$\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i' - \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \bar{r}_i \times \bar{\mathfrak{A}}_i + \bar{r}_i \times \sum_{j=1}^{n} \bar{\mathfrak{A}}_{ij} \quad (\bar{\mathfrak{A}}_{ii} = 0) \tag{15.30}$$

şi se adună toate relaţiile (15.30) scrise pentru $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Se demonstrează, la fel ca la § 132, *b*, că :

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \sum_{j=1}^{n} \bar{\mathfrak{A}}_{ij} = 0 \tag{15.31}$$

şi se obţine pînă la sfîrşit :

$$\bar{K}_o' - \bar{K}_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m\bar{v}_i' - \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{\mathfrak{A}}_i, \tag{15.32}$$

adică : *Variaţia momentului cinetic, faţă de un punct oarecare, al unui sistem de puncte materiale, pentru durata ciocnirii, este egală cu momentul rezultant, faţă de acelaşi punct, al tuturor percuţiilor exterioare (date şi de legătură).*

2° Teorema momentului cinetic se aplică şi în cazul cînd momentele se consideră faţă de o axă. În acest caz relaţiile devin scalare.

3° În cazul cînd nu există percuţii exterioare sau dacă momentele percuţiilor exterioare, faţă de un punct sau o axă, sînt nule, momentul cinetic al sistemului, faţă de punct sau axă, *se conservă.*

§ 155. Ciocnirea a două sfere

a. **Ciocnirea dreaptă.** Dacă două solide au, în momentul ciocnirii, mişcări de translaţie, iar vitezele lor sînt dirijate după normala comună în punctul de contact, ciocnirea se numeşte *dreaptă.* Dacă solidele au forma sferică[1],

[1] În general, dacă normala comună din punctul de contact trece prin centrele de masă ale celor două solide.

ciocnirea dreaptă este şi *centrică*. Se consideră ciocnirea dreaptă a două sfere cu centrele O_1 şi O_2, cu masele m_1 şi m_2, avînd în momentul iniţial (t) al ciocnirii vitezele $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$. Pentru ca ciocnirea să se producă este necesar ca :

$$\frac{\bar{v}_1 - \bar{v}_2}{\overline{O_1O_2}} > 0.$$

Se cere să se determine vitezele sferelor în momentul final (t') al ciocnirii.

În primul rînd, se observă că forţele percutante fiind şi ele dirijate după normala comună dau momente nule faţă de centrele O_1 şi O_2, astfel că se poate admite că sferele au şi după ciocnire mişcări de translaţie paralele cu linia centrelor. În aceste condiţii este suficient să se studieze mişcările centrelor de masă O_1 şi O_2 pe axa $\overline{O_1O_2}$. Dacă v_1 şi v_2 ($v_1 > v_2$) sînt valorile, faţă de axă, a vitezelor la începutul ciocnirii, se notează cu v_1' şi v_2' valorile vitezelor centrelor la sfîrşitul ciocnirii.

În al doilea rînd, se va analiza fenomenul ciocnirii celor două sfere în două faze distincte : faza *comprimării*, care începe în momentul t şi se termină în momentul t_0 cînd începe faza *destinderii* care se termină în momentul t' cînd cele două sfere se separă.

În faza de comprimare mişcarea relativă, exprimată în momentul t prin $v_1 - v_2$, scade pînă la zero în momentul t_0 cînd sferele au aceiaşi viteză v_0 (necunoscută).

În faza de destindere mişcarea relativă îşi schimbă sensul şi creşte, viteza relativă ajungînd la $v_1' - v_2'$ în momentul t'.

Deoarece în tot timpul ciocnirii nu există percuţii exterioare ci numai interioare, cantitatea de mişcare a sistemului se conservă în orice moment al intervalului de timp $t' - t$, adică :

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)\, v_0 = m_1v_1' + m_2v_2'. \tag{15.33}$$

Din sistemul de două ecuaţii (15.33) cu trei necunoscute v_0, v_1' şi v_2', se obţin relaţiile :

$$v_0 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1v_1' + m_2v_2'}{m_1 + m_2}. \tag{15.34}$$

Cea de-a treia ecuaţie necesară nu se poate obţine fără considerarea însuşirilor fizice ale materialelor sferelor (deformaţii, elasticitate etc.).

Pentru aceasta se calculează percuţiile interioare $\mathfrak{P}$ şi $\mathfrak{P}'$ din faza de comprimare, respectiv din faza de destindere :

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= m_1(v_1 - v_0) = m_2(v_0 - v_2), \\ \mathfrak{P}' &= m_1(v_0 - v_1') = m_2(v_2' - v_0), \end{aligned} \tag{15.35}$$

expresii care după folosirea relaţiilor (15.34) devin :

$$\mathfrak{P} = \frac{m_1m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad \text{şi} \quad \mathfrak{P}' = \frac{m_1m_2(v_2' - v_1')}{m_1 + m_2}. \tag{15.36}$$

Scanned with OKEN Scanner

În continuare se notează raportul $\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{L}}$ cu e:

$$\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{L}} = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = e \qquad (15.37)$$

și se constată că este egal cu *raportul cu semn schimbat al vitezelor relative de la sfîrșitul și de la începutul ciocnirii.*

Valoarea e se numește *coeficient de restituire* al percuției. Dacă cele două faze ar fi simetrice, adică dacă sferele comprimate s-ar destinde integral, cazul elasticității perfecte ar fi reprezentat de $e = 1$. Din această cauză e se mai numește uneori și *coeficient de elasticitate.* Se precizează însă că, în mecanica teoretică, e nu reflectă însușirile elastice ale celor două solide, ci caracterizează, din punct de vedere elastic, fenomenul ciocnirii celor două solide; de aceea, pe lîngă coeficient de restituire, mai poate fi numit și *coeficient de elasticitate al ciocnirii.*

Dacă după comprimare nu se mai produce destinderea, sferele rămînînd deformate și contopite, rezultă că:

$$t' = t_0 \quad \text{și} \quad v_1' = v_2' = v_0, \quad \text{iar} \quad \mathfrak{L}' = 0 \text{ și deci } e = 0.$$

Această situație ar corespunde ciocnirii *perfect plastice.* Cum în realitate ciocnirile nu fac parte din cele două categorii limită $e = 1$ și $e = 0$, în practică ciocnirile se consideră cu un coeficient de restituire $0 < e < 1$. Determinarea coeficientului se face pe baza experiențelor.

O dată coeficientul e al ciocnirii cunoscut, problema ciocnirii drepte a celor două sfere se consideră rezolvată prin calcularea vitezelor v_1' și v_2' cu ajutorul ecuațiilor (15.33) și (15.37):

$$v_1' = \frac{v_1(m_1 - em_2) + v_2(1 + e)\, m_2}{m_1 + m_2}, \qquad v_2' = \frac{v_2(m_2 - em_1) + v_1(1 + e)\, m_1}{m_2 + m_1}, \qquad (15.38)$$

sau, ținînd seama de (15.34):

$$v_1' = v_0 - \frac{v_1 - v_2}{1 + \frac{m_1}{m_2}} e; \quad v_2' = v_0 + \frac{v_1 - v_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} e. \qquad (15.39)$$

b. *Observații și consecințe.* 1° După ciocnire, o parte din energia cinetică a sistemului se transformă în energie termică, electrică, luminoasă, de deformație permanentă etc. Cantitatea care trece din forma mecanică de mișcare în altă formă de mișcare este măsurată prin diferența dintre energia cinetică a sistemului înainte (E) și după ciocnire (E'):

$$E - E' = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \frac{1}{2}(m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2) =$$

$$= \frac{m_1 m_2 (1 - e^2)}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2. \qquad (15.40)$$

2° În ipoteza ciocnirii perfect elastice ($e = 1$), relaţiile (15.38) şi (15.40) devin :

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)\, v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = \frac{(m_2 - m_1)\, v_2 + 2m_1 v_1}{m_2 + m_1}, \quad E - E' = 0. \qquad (15.41)$$

3° Dacă ciocnirea ar fi perfect plastică ($e = 0$) :

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = v_2' = v_0, \quad E - E' = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \qquad (15.42)$$

4° Dacă ciocnirea ar fi perfect elastică, iar masele sferelor egale, după ciocnire :

$$v_1' = v_2 \quad \text{şi} \quad v_2' = v_1,$$

adică : fiecare sferă îşi continuă mişcarea cu viteza celeilalte.

5° În ipoteza că sfera O_1 ar lovi o sferă O_2 cu masa foarte mare şi nemişcată, vitezele după ciocnire se deduc din (15.38), înlocuind v_2 prin zero şi apoi făcîndu-l pe m_2 să tindă către infinit :

$$v_1' = -ev_1 \quad \text{şi} \quad v_2' = 0, \qquad (15.43)$$

adică viteza sferei O_1 îşi schimbă sensul şi se micşorează. În practică, această ipoteză echivalează cu cazul unei sfere care loveşte perpendicular o placă fixă cu masa mare.

6° O consecinţă a rezultatului obţinut la 5° este determinarea experimentală a coeficientului e al ciocnirii. Se lasă sfera să cadă liber de la o înălţime oarecare h şi se măsoară înălţimea h' pînă la care sfera ajunge după ciocnirea cu placa fixă (fig. 375).

Căderea se poate presupune ca în vid, deci :

$$v_1 = \sqrt{2gh} \quad \text{şi} \quad v_1' = -\sqrt{2gh'},$$

şi ca urmare :

$$e = -\frac{v_1'}{v_1} = \sqrt{\frac{h'}{h}}. \qquad (15.44)$$

7° În ipoteza ciocnirii plastice a unei sfere cu masa m_1 de o sferă în repaus, avînd masa m_2, se găseşte din (15.42) :

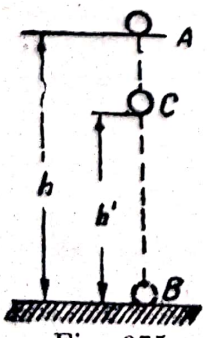


Fig. 375

$$v_1' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{v_1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = v_2', \quad E - E' = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}, \qquad (15.45)$$

iar raportul dintre energia cinetică transformată şi energia cinetică iniţială este :

$$\frac{E - E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}.$$

Cu cît raportul $\frac{m_2}{m_1}$ este mai mic, cu atît viteza sferelor după ciocnire este mai mare, iar cantitatea de energie cinetică transformată este mai mică. În practică se întîlnesc următoarele aplicaţii care se pot încadra în ipotezele făcute pentru stabilirea relaţiilor (15.45) : baterea unui cui cu masă mică m_2, cu ajutorul unui ciocan cu masa m_1 relativ mare, baterea unui pilon avînd masa m_2, cu un berbec a cărui masă m_1 este mare etc.

Invers, cu cît raportul $\frac{m_2}{m_1}$ este mai mare, cu atît viteza după ciocnire este mai mică, iar cantitatea de energie cinetică transformată în energie de deformaţie, termică etc. este mai mare.

În practică se foloseşte această situaţie la prelucrarea pieselor din materiale plastice. Astfel, îndoirea unei bare de oţel, care prin încălzire devine plastică, se face aşezînd-o pe o nicovală cu masa m_2 mare şi lovind-o cu un ciocan cu masa m_1 relativ mică. De asemenea, pentru formarea capului unui nit, acesta este imobilizat cu ajutorul contrabuterolei, o piesă avînd masa mare m_2 faţă de masa m_1 a buterolei şi a ciocanului de nituit.

c. **Ciocnire oblică.** Dacă cele două sfere au mişcări de translaţie, însă vitezele nu sînt dirijate după normala comună în punctul de contact, ciocnirea se numeşte oblică (fig. 376). Se notează, în acest caz, cu O_1 şi O_2 centrele, cu m_1 şi m_2 masele, cu $\bar{V}_1$ şi $\bar{V}_2$ vitezele sferelor înainte de ciocnire şi cu O punctul de contact în momentul ciocnirii.

Se descompun vitezele după linia centrelor şi după tangentele în O din planele $(\bar{V}_1, O_1O_2)$ şi $(\bar{V}_2, O_1O_2)$:

$$\bar{V}_1 = \bar{v}_1 + \bar{u}_1, \qquad \bar{V}_2 = \bar{v}_2 + \bar{u}_2, \tag{15.46}$$

unde $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ sînt componentele normale, iar $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ cele tangenţiale.

Pentru simplificarea problemei se poate presupune că percuţia este numai centrală, adică nu există percuţie tangenţială datorită frecării (sferele sînt perfect netede). În această ipoteză, componentele normale ale vitezelor devin $\bar{v}_1'$ şi $\bar{v}_2'$ potrivit relaţiilor (15.38), iar componentele tangenţiale rămîn neschimbate, şi ca urmare :

$$V_1' = \sqrt{v_1'^2 + u_1^2}, \qquad V_2' = \sqrt{v_2'^2 + u_2^2}. \tag{15.47}$$

Dacă direcţiile vitezelor înainte de ciocnire formau cu O_1O_2 unghiurile α_1, α_2, ele vor forma, după ciocnire, cu O_1O_2 unghiurile α_1' şi α_2' date de :

$$\operatorname{tg} \alpha_1' = \frac{u_1}{v_1'} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg} \alpha_2' = \frac{u_2}{v_2'}. \tag{15.48}$$

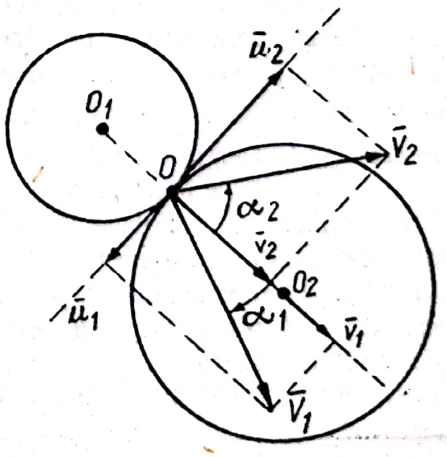


Fig. 376

d. *Observaţii şi consecinţe.* 1° Pentru rezolvarea problemei se calculează în primul rînd :

$$v_1 = V_1 \cos \alpha_1, \qquad u_1 = V_1 \sin \alpha_1,$$
$$v_2 = V_2 \cos \alpha_2, \qquad u_2 = V_2 \sin \alpha_2,$$

apoi v_1' şi v_2', se calculează V_1' şi V_2' cu (15.47) şi, în fine, direcţiile vitezelor după ciocnire cu ajutorul relaţiilor (15.48).

2° Dacă sfera O_1 loveşte o placă plană fixă (asimilată cu o sferă de masă infinită) cu viteza $\bar{V}_1$ înclinată de $\sphericalangle \alpha_1$ faţă de normala la placă (fig. 377), se calculează:

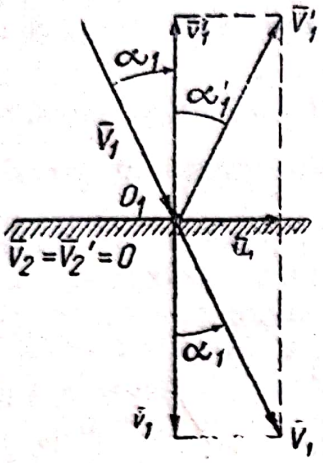


Fig. 377

$$u_1 = V_1 \sin \alpha_1, \qquad v_1 = V_1 \cos \alpha_1,$$

apoi cu ajutorul relaţiei (15.43),

$$v_1' = -ev_1 = -eV_1 \cos \alpha_1,$$

se găseşte pînă la sfîrşit:

$$V_1' = V_1 \sqrt{\sin^2 \alpha_1 + e^2 \cos^2 \alpha_1} \leqslant V_1$$

şi

$$\operatorname{tg} \alpha_1' = -\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{e};$$

α_1' este mai mare, în valoare absolută, decît α_1.

§ 156. Ciocnirea unei sfere în mişcare de translaţie cu un solid în mişcare de rotaţie

a. Un solid este în mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe (Δ), punctele de legătură fiind O_1 şi O_2. Solidul este ciocnit de o sferă în mişcare de translaţie rectilinie perpendicular pe axa (Δ), direcţia percuţiei fiind după traiectoria centrului sferei *normal în O la suprafaţa solidului.*

În momentul ciocnirii, viteza sferei este $\bar{v}$, iar rotaţia solidului este determinată prin $\bar{\omega}$ (fig. 378). Necunoscutele problemei sînt $\bar{v}'$ şi $\bar{\omega}'$, pentru mişcarea după ciocnire, precum şi percuţiile din punctul O al ciocnirii şi din punctele de legătură O_1 şi O_2.

Se notează cu M masa sferei, cu a depărtarea de la axa O_1O_2 la dreapta descrisă de centrul sferei, cu J momentul de inerţie al solidului în raport cu axa (Δ)[1], cu $\bar{\mathfrak{R}}$ *percuţia interioară* din O şi cu $\bar{\mathfrak{R}}_1$ şi $\bar{\mathfrak{R}}_2$ *percuţiile exterioare* din O_1 şi O_2.

b. Pentru a rezolva problema de mişcare se scriu ecuaţii în care nu intervin percuţii. Deoarece percuţia din O este interioară, se poate aplica ansamblului teorema momentului cinetic în raport cu axa (Δ). Cum momentele percuţiilor exterioare sînt

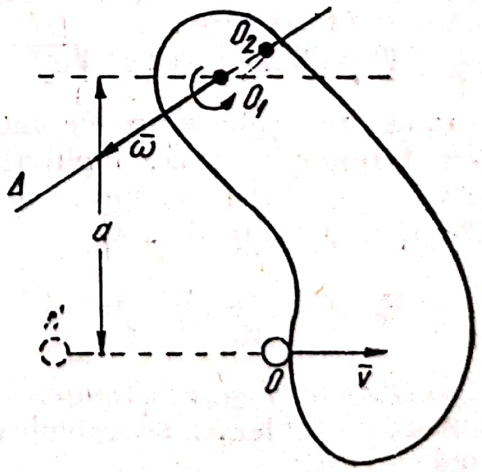


Fig. 378

[1] Pentru simplificarea scrisului s-a notat cu J în loc de J_Δ.

nule, rezultă că momentul cinetic al sistemului sferă-solid dinainte de ciocnire se menține și după ciocnire:

$$J\omega' + Mv'a = J\omega + Mva. \tag{15.49}$$

Cea de-a doua ecuație se obține ținînd seama de aspectul fizic al ciocnirii, adică de coeficientul de restituire e al percuției din punctul O:

$$e = -\frac{v' - v'_o}{v - v_o} = -\frac{v' - \omega' a}{v - \omega a}, \tag{15.50}$$

unde cu v_o, v'_o s-a notat viteza punctului O al solidului înainte și după ciocnire.

Soluțiile sistemului de ecuații (15.49) și (15.50) sînt:

$$\omega' = \frac{(J - Ma^2 e)\,\omega + Ma(1+e)\,v}{J + Ma^2},$$

$$v' = \frac{a(1+e)\,J\omega + (Ma^2 - eJ)\,v}{J + Ma^2}. \tag{15.51}$$

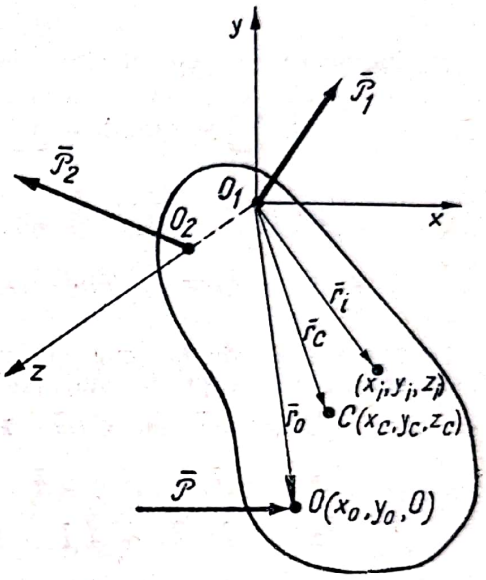


Fig. 379

Calculînd și energia cinetică transformată în alte forme de energie, se găsește:

$$E - E' = \frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} J\omega'^2 - \frac{1}{2} Mv'^2 =$$

$$= \frac{MJ(1-e^2)}{2(J + Ma^2)} (v - a\omega^2). \tag{15.52}$$

Observații. 1° În ipoteza ciocnirii perfect elastice se deduce din (15.51) și (15.52) prin substituția $e = 1$:

$$\omega' = \frac{(J - Ma^2)\,\omega + 2Mav}{J + Ma^2}, \quad v' = \frac{2aJ\omega + (Ma^2 - J)\,v}{J + Ma^2} \tag{15.53}$$

și evident $E' - E = 0$.

2° În ipoteza ciocnirii perfect plastice ($e = 0$) se găsește:

$$\omega' = \frac{J\omega + Mav}{J + Ma^2}, \quad v' = a\omega', \quad E - E' = \frac{MJ(v - a\,\omega)^2}{2(J + Ma^2)}. \tag{15.54}$$

c. **Calculul percuțiilor.** Se alege următorul sistem de referință cu originea în O_1: axa O_1O_2 ca O_1z, planul perpendicular în O_1 pe axa O_1O_2 în care se găsește percuția din O, ca plan O_1xy cu axa O_1x paralelă cu direcția percuției $\bar{\mathcal{R}}$. Se notează cu $\bar{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ vectorul de poziție al unui punct material M_i de masă m_i al solidului, cu $\bar{r}_C(x_C, y_C, z_C)$ vectorul de poziție al centrului de masă al solidului, cu m masa solidului și cu J_o, momentul de inerție al solidului în raport cu originea O_1. De asemenea, se mai notează cu $\bar{r}_0(x_0, y_0, 0)$ vectorul de poziție al punctului de ciocnire O și cu c distanța O_1O_2.

Percuțiile necunoscute sînt: $\bar{\mathcal{R}}(X, 0, 0)$, $\bar{\mathcal{R}}_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $\bar{\mathcal{R}}_2(X_2, Y_2, Z_2)$, deci în total șapte necunoscute scalare.

Se aplică teorema cantităţii de mişcare:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i' - \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i = \bar{\mathfrak{R}} + \bar{\mathfrak{R}}_1 + \bar{\mathfrak{R}}_2, \tag{15.55}$$

unde: $\bar{v}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i$, $\bar{v}_i' = \bar{\omega}' \times \bar{r}_i$ sînt vitezele punctului M_i înainte şi după ciocnire. Ecuaţia (15.55) devine:

$$(\bar{\omega}' - \bar{\omega}) \times \bar{r}_c m = \bar{\mathfrak{R}} + \bar{\mathfrak{R}}_1 + \bar{\mathfrak{R}}_2. \tag{15.56}$$

De asemenea, teorema momentelor cinetice în raport cu O_1 dă:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i' - \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \bar{r}_o \times \bar{\mathfrak{R}} + \overline{O_1O_2} \times \bar{\mathfrak{R}}_2. \tag{15.57}$$

Pe baza relaţiei: $\bar{r}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = r_i^2 \bar{\omega} - (\bar{r}_i \bar{\omega})\, \bar{r}_i$, ecuaţia (15.57) se scrie sub forma):

$$J_o(\bar{\omega}' - \bar{\omega}) - \sum_{i=1}^{n} m_i (\bar{r}_i \bar{\omega}')\, \bar{r}_i + \sum_{i=1}^{n} m_i (\bar{r}_i \bar{\omega})\, \bar{r}_i = \bar{r}_o \times \bar{\mathfrak{R}} + \overline{O_1O_2} \times \bar{\mathfrak{R}}_2. \tag{15.58.}$$

Pentru a trece de la ecuaţiile vectoriale (15.56) şi (15.58) la ecuaţii scalare se vor folosi următoarele expresii complexe:

$$\bar{\omega}' = \omega' \bar{k}, \quad \bar{\omega} = \omega \bar{k}, \quad \bar{r}_i = x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k},$$

$$\bar{r}_c = x_c \bar{i} + y_c \bar{j} + z_c \bar{k}, \quad \bar{r}_o = x_o \bar{i} + y_o \bar{j}, \quad \overline{O_1O_2} = c\bar{k};$$

$$\bar{\mathfrak{R}} = X\bar{i}, \quad \bar{\mathfrak{R}}_1 = X_1 \bar{i} + Y_1 \bar{j} + Z_1 \bar{k}, \quad \bar{\mathfrak{R}}_2 = X_2 \bar{i} + Y_2 \bar{j} + Z_2 \bar{k},$$

$$\bar{v}_i' = \omega'(x_i \bar{j} - y_i \bar{i}), \quad \bar{v}_i = \omega(x_i \bar{j} - y_i \bar{i}),$$

$$\bar{r}_o \times \bar{\mathfrak{R}} = -y_o X \bar{k}; \quad \overline{O_1O_2} \times \bar{\mathfrak{R}}_2 = c(X_2 \bar{j} - Y_2 \bar{i}).$$

Pe de altă parte, deoarece: $\bar{r}_i \bar{\omega} = \omega z_i$,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (\bar{r}_i \bar{\omega})\, \bar{r}_i = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i z_i (x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k}) = \omega(J_{zx} \bar{i} + J_{zy} \bar{j} + J_{xoy} \bar{k}),$$

unde J_{zx} şi J_{zy} sînt produse de inerţie, iar J_{xoy} este momentul de inerţie al solidului în raport cu planul O_1xy.

Expresiile complexe ale ecuaţiilor vectoriale (15.56) şi (15.58) sînt:

$$(\omega' - \omega)(x_c \bar{j} - y_c \bar{i})\, m = X\bar{i} + X_1 \bar{i} + Y_1 \bar{j} + Z_1 \bar{k} + X_2 \bar{i} + Y_2 \bar{j} + Z_2 \bar{k} \tag{15.59}$$

$$(\omega' - \omega)(J_z \bar{k} - J_{zx} \bar{i} - J_{zy} \bar{j}) = -y_o X \bar{k} + c(X_2 \bar{j} - Y_2 \bar{i}), \tag{15.60}$$

deoarece $J_o - J_{xoy} = J_z$, unde J_z este momentul de inerţie al solidului în raport cu axa O_1z.

Ecuaţiile scalare care se obţin din (15.59) şi (15.60):

$$X + X_1 + X_2 = -(\omega' - \omega)\, y_c m, \quad Y_1 + Y_2 = (\omega' - \omega)\, x_c m, \quad Z_1 + Z_2 = 0$$

$$cY_2 = (\omega' - \omega)\, J_{zx}, \quad cX_2 = -(\omega' - \omega)\, J_{zy}, \quad y_o X = -(\omega' - \omega)\, J_z$$

au ca soluţii:

$$X = -\frac{J_z(\omega' - \omega)}{y_o}, \quad X_1 = \left(\frac{J_{zy}}{c} + \frac{J_z}{y_o} - m y_c\right)(\omega' - \omega),$$

$$Y_1 = \left(m x_c - \frac{J_{zx}}{c}\right)(\omega' - \omega),$$

$$X_2 = -\frac{J_{zy}(\omega' - \omega)}{c}, \quad Y_2 = \frac{J_{zx}(\omega' - \omega)}{c}, \quad Z_1 + Z_2 = 0. \tag{15.61}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observații și consecințe. 1° Ca și în problema solidului cu o axă fixă, în repaus (§ 74) sau în mișcare (§ 147), și aici componentele percuțiilor după axa de rotație rămîn nedeterminate în ipoteza rigidității solidului.

2° Pentru ca celelalte componente ale percuțiilor $\overline{\mathfrak{P}}_1$ și $\overline{\mathfrak{P}}_2$ să fie nule, este necesar ca:

$$J_{zy} = 0, \quad J_{zx} = 0, \quad x_c = 0, \quad y_c = \frac{J_z}{my_o} = \frac{i_z^2}{y_o}, \tag{15.62}$$

unde i_z este raza de inerție a solidului în raport cu axa O_1z.

Pe de altă parte, deoarece percuția $\overline{\mathfrak{P}}$ a fost de la început situată într-un plan perpendicular pe axa de rotație, rezultă că în următoarele condiții nu apar percuții în axă:

α) Cînd percuția $\overline{\mathfrak{P}}$ este perpendiculară pe planul determinat de axa de rotație O_1O_2 și centrul C al masei solidului (pe planul O_1yz).

β) Cînd planul perpendicular pe axa de rotație și care conține percuția întîlnește axa de rotație într-un punct (O_1) în care axa de rotație este o axă principală de inerție a solidului.

γ) Cînd distanța y_o, a punctului (O), în care se produce percuția, pînă la axa de rotație, este egală cu lungimea pendulului simplu sincron al solidului în raport cu axa de rotație $\left(y_o = \frac{i_z^2}{y_c}\right)$, cu condiția ca centrul de masă să nu se afle pe axa de rotație ($y_c \neq 0$).

Punctul O în care lovind solidul nu se produce percuție în axa de rotație se numește *centru de percuție.*

3° Cunoașterea centrului de percuție a unei piese solicitate la ciocniri este deosebit de importantă în tehnică, deoarece permite evitarea percuțiilor în axa de rotație a piesei și astfel ea este ferită de rupere sau de uzură rapidă.

d. **Aplicații.** 1° Două sfere cu mase m_1 și m_2 cu viteze $v_1 > v_2$ se ciocnesc. Ciocnirea fiind dreaptă, iar după ciocnire prima sferă oprindu-se, se cere să se calculeze coeficientul de restituire și viteza după ciocnire a celei de-a doua sfere.

Răspuns:

$$e = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_2(v_1 - v_2)}, \qquad v_2' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_2}.$$

2° O bară omogenă, care se poate roti într-un plan vertical în jurul articulației O_1, este îndepărtată de verticala din O_1 pînă formează cu ea unghiul α_1. În această poziție este lăsată liber. După ce se lovește de opritorul O, bara se depărtează din nou, pînă formează unghiul $\alpha_2 < \alpha_1$ cu verticala O_1O. Să se calculeze coeficientul de restituire (N. N. Buchholtz).

Răspuns:

$$e = \frac{\sin\frac{\alpha_2}{2}}{\sin\frac{\alpha_1}{2}}.$$

3° Un ciocan este compus din coada AB de lungime l și greutate G și capul său paralelipipedic $A'B'C'D'$ ($A'B' = a$, $B'D' = h$) de greutate Q. Să se determine punctul de unde trebuie apucat ciocanul ca, sub acțiunea unei percuții $\mathfrak{P}$, aplicate normal în mijlocul lui $C'D'$, să nu se producă smuciri în mîna lucrătorului. Să se aplice rezultatul în cazul unei bare lovite normal într-unul din capete (fig. 380). (Colectiv S t o e n e s c u. *Culegere de probleme de mecanică.* București, Editura tehnică, 1958.)

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns: Fie x distanţa de la percuţie la centrul de masă C al ciocanului; $x = \dfrac{G(a+l)}{2(G+Q)}$. Notînd cu O_1 punctul căutat şi cu z distanţa acestui punct la centrul de masă C (fig. 380), se găseşte:

$$z = \frac{\frac{1}{6}Q(a^2+h^2) + \frac{1}{6}Gl^2 + \frac{GQ(a+l)^2}{2(G+Q)}}{G(a+l)},$$

în cazul particular: $Q = 0$, $a = 0$ şi $z = \dfrac{l}{6}$.

4° O bară de lungime $OA = l$, omogenă de greutate G_1, este articulată în O şi, pornind din poziţia orizontală, fără viteză iniţială, ciocneşte un corp de greutate G_2 aflat pe un plan orizontal la distanţa l de O (fig. 381). Ce distanţă mai parcurge corpul ştiind

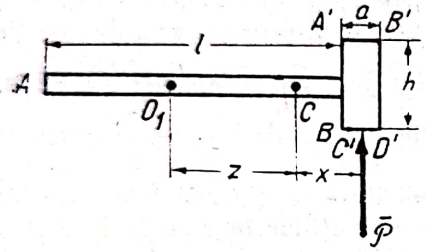


Fig. 380

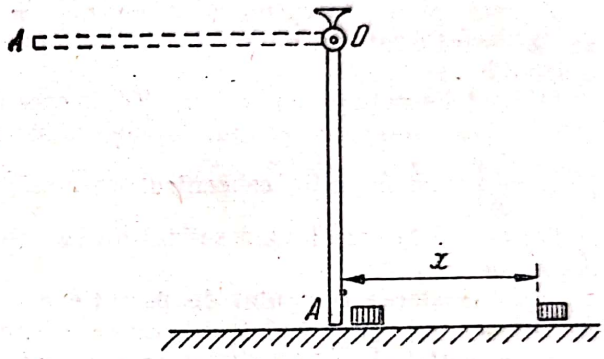


Fig. 381

că ciocnirea este perfect plastică, iar coeficientul de frecare la alunecare dintre corp şi plan este $\mu = ?$ (Ş t e f a n B ă l a n. *Culegere de probleme de mecanică*. Bucureşti, Editura tehnică, 1964).

Răspuns: Momentul de inerţie al barei în raport cu O este $J = \dfrac{G_1}{g}\dfrac{l^2}{2}$, iar viteza unghiulară ω, la începutul ciocnirii, rezultă din aplicarea teoremei energiei cinetice:

$$\frac{1}{2}\frac{G_1}{g}\frac{l^2}{2}\omega^2 = G_1\frac{l}{2},$$

deci:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

Ciocnirea fiind perfect plastică, iar ω' viteza unghiulară a barei la sfîrşitul ciocnirii, viteza corpului este $l\omega'$.

În timpul ciocnirii, momentul cinetic al sistemului în raport cu O se conservă:

$$\frac{G_1}{g}\frac{l^2}{2}\omega' + \frac{G_2}{g}l^2\omega' = \frac{G_1}{g}\frac{l^2}{2}\omega,$$

de unde:

$$\omega' = \frac{G_1}{G_1+3G_2}\omega, \qquad v = \frac{G_1 l\omega}{G_1+3G_2},$$

şi pînă la sfîrşit:

$$x = \frac{3G_1^2 l}{2\mu(G_1+3G_2)^2}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. Academia de Ştiinţe a U.R.S.S. *Bazele filozofiei marxiste* (traducere). Editura politică, 1960.
2. Academia de Ştiinţe a U.R.S.S. *Materialismul dialectic* (traducere). E.S.P.L.P. 1954.
3. Appell, P. *Traité de Mécanique rationelle.* I, II, Paris, 1941.
4. Bălan, Şt., Beiu Paladi, E. *Curs de mecanică teoretică.* I, II, Bucureşti, Ministerul Învăţământului, 1957, 1960.
5. Bălan, Şt., *Învăţământul mecanicii teoretice în institutele de învăţământ superior tehnic.* „Studii şi cercetări de mecanică aplicată," anul XI, 1960, 6, Editura Academiei R.P.R., p. 1361—1368.
6. Bălan, Şt. *Culegere de probleme de mecanică.* Editura tehnică, 1964.
7. Buchholtz, N. N., Voronkov, I. M., Minakov, A. P. *Culegere de probleme de mecanică teoretică* (traducere). Editura tehnică, 1952.
8. Chazy, J. *Cours de Mecanique rationelle.* I, II, Paris, 1947—1948.
9. Colectivul catedrei de mecanică din I.P.B. *Culegere de probleme.* I, II, Bucureşti, Editura de stat didactică şi pedagogică, 1961—1963.
10. Dragnea, O. *Momente de inerţie.* Bucureşti, Editura tehnică, 1956.
11. Engels, F. *Dialectica naturii.* Bucureşti, E.S.P.L.P., 1954.
12. Hamel, G. *Theoretische Mechanik.* Berlin, 1949.
13. Ioachimescu, G. A. *Mecanica raţională.* Bucureşti, 1947.
14. Жуковский, Н. Е. Теоретическая Механика. Москва, 1952.
15. Kocin, E. N. *Calculul vectorial şi introducere în calculul tensorial* (traducere). Bucureşti, Editura tehnică, 1954.
16. Космодемьянский, А. А. Курс теоретической механики. Москва, 1955.
17. Ladon, F. I. *Bazele calculului vectorial* (traducere), I, II, Bucureşti, Editura de stat, 1949.
18. Lenin, V. I. *Materialism şi empiriocriticism*, Ed. P.M.R., 1949.
19. Лойцянский Л. Г. и Лурье, А. И. Курс теоретической механики, (2 vol.) Москва, 1948.
20. Marcolongo, R. *Meccanica razionale*, I, II, Milano, 1923.
21. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике. Ленинград, Москва 1952.
22. Nekrasov, A. I. *Curs de mecanică teoretică* (traducere). Bucureşti, Editura tehnică, 1955.
23. Newton, Isaac. *Principiile matematice ale filozofiei naturale* (traducere). Bucureşti, Editura Academiei R.P.R., 1956.
24. Roman, V. *Despre unele probleme filozofice ale fizicii moderne.* „Lupta de clasă", 1957, nr. 5.
25. Sanielevici, S. *Curs de mecanică raţională*, vol. I, Iaşi, 1929.
26. Stan, A., Grumăzescu, M. *Culegere de probleme* (Mecanică tehnică). Bucureşti, Editura tehnică, 1953.

Scanned with OKEN Scanner

27. Stoenescu, Al., Silaş ,Gh. *Curs de mecanică teoretică.* Bucureşti, Editura tehnică, 1957.
28. Suslov, G. K. *Mecanică raţională.* Vol. I (traducere). Bucureşti, Editura tehnică, 1950.
29. Suvorov, S. G., Steinman, R. I. *Pentru o tratare consecvent materialistă a principiilor mecanicii* (traducere). Academia R.P.R. Analele româno-sovietice. Matematică-Fizică-Chimie, nr. 8. 1951.
30. Teodorescu, N. *Metode vectoriale în fizica matematică.* I, II, Bucureşti, Editura tehnică, 1954.
31. Vâlcovici V. *Curs de mecanică.* Vol. I, Bucureşti, Editura Ministerului Învăţământului, 1951.
32. Vâlcovici, V. *Fundamentele mecanicii.* „Studii şi cercetări matematice", 3—4, Ed. Academiei, R.P.R., 1956.
33. Vâlcovici, V., Bălan, Şt., Voinea, R. *Mecanica teoretică.* Editura tehnică, 1959.
34. Veselovski I. N. *Mecanica şi rezistenţa materialelor.* Bucureşti, Editura tehnică, 1950.
35. Веселовский, И. Н. Сборник задач по теоретической механике. Москва, 1955.
36. Воронков, И. М. Курс теоретической механики. Моска, 1953.
37. Woinarosky, R. *Mecanica tehnică.* I, II, Bucureşti, Editura Institutului politehnic, 1952.

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

Prefață 3

PARTEA ÎNTÎI

BAZELE TEORETICE ALE MECANICII CORPULUI SOLID

Capitolul I

Noțiuni—Principii

A. *Noțiuni fundamentale. Concepte*

§ 1. Materia, spațiul și timpul 5
§ 2. Simplificări și aproximații în mecanica newtoniană 11

B. *Caracteristicile mișcării mecanice* 14
§ 3. Sisteme de referință 14
§ 4. Traiectorie, viteză, accelerație 15

C. *Principiile mecanicii newtoniene*

§ 5. Poziția mecanicii ca știință 16
§ 6. Principiul inerției (I) 17
§ 7. Principiul acțiunii (II) 19
§ 8. Principiul egalității acțiunii și reacțiunii (III) 20
§ 9. Principiul paralelogramului forțelor (IV) 20

D. *Împărțirea și problemele mecanicii*

§ 10. Împărțirea mecanicii. Istoric 22
§ 11. Probleme generale. Unități de măsură 24

Capitolul II

Algebra vectorilor liberi

A. *Generalități*

§ 12. Definiții, notații. Tipuri de vectori 25
§ 13. Compararea vectorilor liberi. Definiții 27

B. *Operații cu vectorii liberi*

§ 14. Amplificarea vectorilor 28

Scanned with OKEN Scanner

§ 15. Însumarea vectorilor 29
§ 16. Descompunerea vectorilor liberi 31

C. *Metode simple de calcul cu vectorii*

§ 17. Generalităţi. Metoda grafică 34
§ 18. Metoda trigonometrică 35

D. *Metoda cartezianã*

§ 19. Generalităţi. Sistem de referinţă pe o dreaptă 36
§ 20. Sisteme de referinţă în plan şi în spaţiu 38
§ 21. Teoremele proiecţiei ortogonale 39
§ 22. Orientarea şi sensul mărimilor geometrice 41
§ 23. Expresia complexă a unui vector în plan 45
§ 24. Expresia complexă a unui vector liber în spaţiu 47

E. *Metoda vectorială şi relaţiile cu metoda cartezianã*

§ 25. Produsul scalar (intern) a doi vectori 49
§ 26. Produsul vectorial (extern) a doi vectori 54
§ 27. Produsul mixt a trei vectori 61
§ 28. Dublul produs vectorial a trei vectori 63

Capitolul III

Metoda vectorială în analiza şi în geometria diferenţială

A. *Noţiuni de analiză vectorială*

§ 29. Vectori variabili. Hodograful unei funcţii vectoriale 65
§ 30. Limite vectoriale. Continuitatea funcţiilor vectoriale 68
§ 31. Derivata şi deferenţiala unui vector variabil 69
§ 32. Proprietăţi şi reguli de derivare 70
§ 33. Integrale vectoriale 73

B. *Metoda vectorială în geometria diferenţială*

§ 34. Reprezentarea analitică şi vectorială a curbelor 74
§ 35. Primele două derivate ale vectorului de poziţie 75
§ 36. Triedrul natural al unei curbe 77

Capitolul IV

Teoria vectorilor alunecători

A. *Generalităţi*

§ 37. Tipul vectorial al forţei. Suportul vectorului alunecător 78
§ 38. Operaţiile elementare de echivalenţă 80
§ 39. Momentul unui vector alunecător în raport cu un punct 81
§ 40. Momentul unui vector alunecător în raport cu o axă 84
§ 41. Expresii analitice în legătură cu momentul unui vector 86

B. *Reducerea unui sistem de vectori alunecători*

§ 42. Vectori cu suporturi concurente. Vector rezultant. Moment rezultant. Teorema momentelor 88
§ 43. Cazul unui sistem de doi vectori alunecători cu suporturi paralele 91
§ 44. Cuplul de vectori alunecători. Momentul cuplului. Proprietăţi 93
§ 45. Reducerea unui sistem de cupluri de vectori alunecători 97
§ 46. Reducerea unui sistem oarecare de vectori alunecători. Torsor. Discuţia cazurilor de reducere 98
§ 47. Axa centrală a unui sistem de vectori alunecători 106
§ 48. Cazuri particulare 109
§ 49. Expresii analitice în legătură cu reducerea unui sistem de vectori alunecători 116

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul V

Centre de greutate. Centre de masă

A. *Baze teoretice*

§ 50. Greutatea şi centrul de greutate al unui corp 123
§ 51. Centrul unui sistem de mărimi scalare. Vectori legaţi 124
§ 52. Centrul de greutate, centrul de masă 126
§ 53. Teorema momentelor statice 127
§ 54. Sisteme de puncte materiale simetrice 129
§ 55. Centrul de masă al unui continuu 130

B. *Aplicaţii*

§ 56. Indicaţii metodice 134
§ 57. Sisteme unidimensionale 135
§ 58. Sisteme bidimensionale 138
§ 59. Sisteme tridimensionale 140
§ 60. Teoremele Guldin-Pappus 144

PARTEA A DOUA

STATICA

Capitolul VI

Introducere

A. *Generalităţi*

§ 61. Interacţiuni 147
§ 62. Forţele şi mişcarea mecanică 150
§ 63. Grade de libertate 151
§ 64. Legături, reacţiuni, forţe de legătură, eliberare de legături 153
§ 65. Problemele staticii 154

B. *Statica punctului material*

§ 66. Punctul material liber 155
§ 67. Punctul material cu legături 157
§ 68. Caracteristicile forţelor de legătură 159
§ 69. Frecarea de alunecare. Legile lui Coulomb 162
§ 70. Indicaţii metodice pentru rezolvarea problemelor 167
§ 71. Aplicaţii 168

Capitolul VII

Statica solidului

A. *Legăturile normale*

§ 72. Exemple de legături concrete. Scheme 172
§ 73. Articulaţia sferică 174
§ 74. Articulaţia cilindrică 176
§ 75. Încastrarea 177
§ 76. Reazemul simplu 179
§ 77. Legăturile normale în plan 180

B. *Legăturile cu frecare*

§ 78. Modificarea ipotezelor 182
§ 79. Frecarea de alunecare 185
§ 80. Frecarea de pivotare 187

Scanned with OKEN Scanner

§ 81 Frecarea de rostogolire 189
§ 82. Frecarea în articulaţii 191
§ 83. Concluzii şi indicaţii metodice pentru rezolvarea problemelor..... 193
§ 84. Aplicaţii 194

Capitolul VIII

Statica sistemelor de solide rigide

A. *Generalităţi*

§ 85. Definiţie, exemple 201
§ 86. Statica unui sistem de puncte materiale 203

B. *Statica sistemelor de bare articulate*

§ 87. Mecanisme 206
§ 88. Grinzi cu zăbrele 209

C. *Statica firelor*

§ 89. Exemple 216
§ 90. Ecuaţiile vectoriale ale staticii firelor 218
§ 91. Ecuaţiile scalare în raport cu triedrul natural 220
§ 92. Frecarea firelor 222
§ 93. Ecuaţiile scalare în raport cu un triedru fix 226
§ 94. Curbe funiculare 227

PARTEA A TREIA

DINAMICA ŞI CINEMATICA

Capitolul IX

Introducere

A. *Generalităţi*

§ 95. Precizări în legătură cu principiile fundamentale 233
§ 96. Sisteme de unităţi de măsură 234

B. *Cinematica punctului*

§ 97. Caracteristicile cinematice ale mişcării 236
§ 98. Componentele vitezei şi acceleraţiei pe axele triedrului natural 240
§ 99. Componentele vitezei şi acceleraţiei în raport cu triedrul *Oxyz* 243
§ 100. Mişcarea în coordonate polare. Viteza şi acceleraţia areolară 247

Capitolul X

Dinamica punctului material

A. *Dinamica punctului material liber*

§ 101. Problemele generale. Condiţii iniţiale 249
§ 102. Punct material acţionat de o forţă constantă 252
§ 103. Punct material acţionat de o forţă funcţie de viteză 255
§ 104. Punct material acţionat de o forţă centrală 257
§ 105. Punct material acţionat de o forţă elastică 262
§ 106. Mişcări rectilinii oscilatorii. 266

B. *Dinamica punctului material cu legături*

§ 107. Generalităţi 269
§ 108. Aplicaţii 271

Capitolul XI

Cinematica solidului rigid

A. *Mişcările simple*

§ 109. Generalităţi. Exemple de mişcări 275
§ 110. Vectorii care determină poziţia unui solid rigid 277
§ 111. Mişcarea de translaţie 279
§ 112. Mişcarea de rotaţie 280

B. *Mişcări complexe*

§ 113. Mişcarea solidului cu un punct fix 284
§ 114. Mişcarea oarecare a unui solid rigid 287
§ 115. Mişcarea elicoidală 291
§ 116. Mişcarea plan-paralelă 294
§ 117. Mişcarea plană 295
§ 118. Aplicaţii 300

Capitolul XII

Mişcarea relativă

A. *Cinematica mişcării relative a punctului*

§ 119. Generalităţi. Compunerea vitezelor şi acceleraţiilor 306
§ 120. Aplicaţii 310

B. *Dinamica mişcării relative a punctului material*

§ 121. Ecuaţia fundamentală a mişcării relative 311
§ 122. Pământul ca sistem de referinţă 316
§ 123. Echilibrul relativ 321

Capitolul XIII

Dinamica corpurilor

(Teoreme şi metode generale)

A. *Generalităţi*

§ 124. Sistem material. Forţe interioare 323
§ 125. Teoreme generale. Integrale prime 325

B. *Teoremele cantităţii de mişcare*

§ 126. Impuls. Cantitatea de mişcare 327
§ 127. Teorema variaţiei cantităţii de mişcare a unui sistem de puncte materiale 330
§ 128. Teorema conservării cantităţii de mişcare 331
§ 129. Teorema mişcării centrului de masă 332
§ 130. Aplicaţii 334

C. *Teoremele momentului cinetic*

§ 131. Moment cinetic. Moment de inerţie 335
§ 132. Teorema variaţiei momentului cinetic 338
§ 133. Teorema conservării momentului cinetic 341
§ 134. Aplicaţii 342

D. *Teoremele energiei mecanice*

§ 135. Lucru mecanic. Energie cinetică. Putere 345
§ 136. Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale 354

Scanned with OKEN Scanner

§ 137. Teorema de variaţie a energiei cinetice 355
§ 138. Teorema conservării energiei 358
§ 139. Aplicaţii 361

E. *Metode generale*

§ 140. Principiul lui d'Alembert. Metoda cinetostatică 363
§ 141. Aplicaţii 367
§ 142. Principiul lucrului mecanic virtual. Metoda deplasărilor virtuale 369
§ 143. Aplicaţii 372

Capitolul XIV

Dinamica solidului rigid

A. *Momente de inerţie*

§ 144. Definiţii. Expresii analitice 375
§ 145. Momente de inerţie în raport cu axe paralele. Teorema lui Steiner 378
§ 146. Momente de inerţie în raport cu axe concurente. Elipsoidul de inerţie 381

B. *Mişcări particulare*

§ 147. Solidul rigid cu o axă fixă. Aplicaţii 384
§ 148. Mişcarea plan-paralelă a solidului rigid. Mişcarea plană 388

Capitolul XV

Probleme speciale

A. *Dispozitive mecanice simple*

§ 149. Generalităţi 392
§ 150. Condiţia de funcţionare în regim parmanent 394
§ 151. Aplicaţii 395

B. *Ciocniri. Percuţii*

§ 152. Exemple. Forţă percutantă. Percuţie 400
§ 153. Ipotezele ciocnirii 403
§ 154. Problemele şi teoremele generale ale ciocnirii 403
§ 155. Ciocnirea a două sfere 405
§ 156. Ciocnirea unei sfere în mişcare de translaţie cu un solid în mişcare de rotaţie 410
Bibliografia 415
Tabla de materii 417

Scanned with OKEN Scanner

Redactor responsabil : Ing. NICOLAE ALEXANDRU
Tehnoredactor : BALAIȚĂ TITEL

Dat la cules 31.III.1965. Bun de tipar 20.VII.1965. Apărut 1965. Tiraj 7.000+130 ex. Hîrtie tip I A 80 g/m². Format 16/70×100. Coli editoriale 31,121. Coli de tipar 26,5. plan 2035 A 3772. C. Z. pentru bibliotecile mari 531(075.8). C. Z. pentru bibliotecile mici 53.

Intreprinderea Poligrafică „13 Decembrie 1918"
Str. Grigore Alexandrescu nr. 93—95, București — R.P.R.
Comanda nr. 559

Scanned with OKEN Scanner